Numeri naturali; principio di induzione

Il primo insieme non banale che potrebbe essere costruito direttamente a partire dalla teoria assiomatica degli insiemi è l'insieme dei numeri naturali, ovvero dei numeri 0, 1, 2, 3, ... In questa sede si darà un'impostazione assiomatica alla definizione dell'insieme $\mathbb{N}$, seguendo l'idea del matematico italiano G. Peano. Peano introdusse cinque assiomi, che oggi portano il suo nome, e che costituiscono una definizione assiomatica rigorosa dell' insieme dei numeri naturali.

Gli assiomi di Peano

I numeri naturali si susseguono in ordine uno dopo l'altro a partire dal numero zero, denotato con 0; come primo assioma va quindi chiesto che 0 sia un numero naturale:

$$\text{(A1): } 0 \in \mathbb{N}.$$

Va a questo punto detto che dal numero 0 si passa ai numeri successivi:

(A2): Per ogni numero naturale n esiste un unico numero naturale $s(n)$ detto successivo di n.

Vanno poi chiarite le proprietà fondamentali che questa operazione di successivo possiede; anzitutto il numero 0 è il primo della lista, per cui non è successivo di nessun numero:

$$\text{(A3): Per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ si ha } s(n) \neq 0.$$

Inoltre, ogni numero naturale che non sia 0 proviene da un solo numero naturale mediante l'operazione di successivo; per cui va chiesto che:

$$\text{(A4): Se } n, m \in \mathbb{N} \text{ con } s(n) = s(m)\text{, allora si ha } n = m.$$

Infine vi è l'ultimo assioma che chiude la definizione; non è infatti chiaro, sulla base degli assiomi precedente, se questa operazione di successivo iterata fornisca o no tutti i numeri naturali o se ne rimanga qualcuno escluso. Il quinto ed ultimo assioma fornisce una risposta a questa domanda e afferma proprio che iterando, a partire dallo 0, l'operazione di successivo, si ottengono tutti i numeri naturali:

(A5): Supponiamo che $A \subseteq \mathbb{N}$ e che si abbia $0 \in A$ e $n \in A \Longrightarrow s(n) \in A$; allora risulta $A = \mathbb{N}$.

I cinque assiomi di Peano costituiscono una possibile definizione rigorosa dei numeri naturali, che quindi rimangono oggetti non definiti; sono però definite le loro proprietà, e questo, il più delle volte, basta per la matematica.

Il principio di induzione

Il Teorema più importante della teoria di base dell'insieme dei numeri naturali è anche noto con il nome di principio di induzione, che è una conseguenza immediata del quinto assioma di Peano. Il Principio di induzione fornisce uno strumento molto utile che permette di dimostrare che una certa propriet $P(n)$ che dipende dai numeri naturali è vera. L'idea su cui si basa il principio è la seguente: dimostrare che è vera $P(0)$ e che è vera l'implicazione $P(n) \Longrightarrow P(s(n))$; in altre parole va controllata la verità della proprietà $P(n)$ per il numero 0, ed in un secondo momento va dimostrata l'implicazione $P(n) \Longrightarrow P(s(n))$, ovvero va dimostrato che supponendo $P(n)$ vera si ottiene che anche $P(s(n))$ è vera. In tal modo si ha la seguente catena: $P(0)$ vera, allora $P(1)$ vera, allora $P(2)$ vera, allora $P(3)$ vera, ecc. e, in linea di principio, continuando all'infinito si ha la verità di P per ogni numero naturale.

Teorema (Principio di induzione): Sia $P(n)$ una proprietà dipendente da $n \in \mathbb{N}$. Si supponga che $P(0)$ sia vera e che $P(n) \Longrightarrow P(s(n))$ per ogni n naturale; allora si ha che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$. Allora $A \subseteq \mathbb{N}$ e $0 \in A$, per ipotesi; inoltre si ha, sempre per ipotesi, $n \in A \Longrightarrow s(n) \in A$. Per il quinto assioma di Peano si ha $A = \mathbb{N}$, per cui la proprietà P è vera per ogni n naturale.

Operazioni tra numeri naturali

Attraverso la nozione di successivo è possibile introdurre le prime operazioni definite sull'insieme $\mathbb{N}$, che sono somma e prodotto, ben definite per ricorsione nel seguente modo: $n + 0 = n$, $n + s(m) = s(n + m)$ e $n \cdot 1 = n$, $n \cdot (m + 1) = n \cdot m + n$, dove $1 = s(0)$. Le operazioni tra numeri naturali godono di varie proprietà, probabilmente già note al lettore:

$$n + m = m + n, \quad n \cdot m = m \cdot n \quad \text{(proprietà commutativa)}$$

$$n + (m + p) = (n + m) + p, \quad n \cdot (m \cdot p) = (n \cdot m) \cdot p \quad \text{(proprietà associativa)}$$

$$n \cdot (m + p) = n \cdot m + n \cdot p \quad \text{(proprietà distributiva).}$$

Esempio: Dimostrare per induzione la proprietà commutativa della somma.
Dimostrazione. È da dimostrare che per ogni n, m naturali si ha $n+m = m+n$. La dimostrazione procederà per induzione su m. Per prima cosa va dimostrato quindi che per ogni n naturale si ha $n + 0 = 0 + n$. A sua volta questa proprietà va dimostrata per induzione su n; per $n = 0$ si ha $0 + 0 = 0 + 0$ che è vera, inoltre per definizione di somma si ha anche $1 + 0 = 0 + 1$, quindi supponendo $n + 0 = 0 + n$ si ha

$$(n + 1) + 0 = n + (1 + 0) = n + (0 + 1) = (n + 0) + 1 = (0 + n) + 1 = 0 + (n + 1).$$

che conclude la verifica. Con ciò stato dimostrato che per ogni n naturale vale $n + 0 = 0 + n$, che è la proprietà commutativa per $m = 0$. Come ultimo passo va quindi supposto ora che $n + m = m + n$ per ogni n, m naturali, e va dimostrato che

$$n + (m + 1) = (m + 1) + n.$$

Si ha

$$n + (m + 1) = (n + m) + 1 = (m + n) + 1 = m(n + 1) = m + (1 + n) = (m + 1) + n$$

che conclude l'intera dimostrazione.

Esempio: Dimostrare per induzione su N che

$$\sum_{n=0}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}.$$

Dimostrazione. Procedendo come al solito si ha

$$\sum_{n=0}^{0} n = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$$

per cui la formula data è vera per $N = 0$; supponendo che

$$\sum_{n=0}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$$

si ha

$$\sum_{n=0}^{N+1} n = \sum_{n=0}^{N} n + (N+1) = \frac{N(N+1)}{2} + (N+1) = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$$

che conclude la dimostrazione.

Ordinamento

Accanto alle operazioni principali definite su $\mathbb{N}$ vi è un'altra importante proprietà strutturale dell'insieme dei numeri naturali: l' ordinamento totale.
I numeri naturali sono ordinati tra loro, si ha, per definizione di ordine totale,

$$0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq \dots$$

In altre parole per ogni n naturale si ha $n \leq s(n)$. Tale ordinamento è compatibile con le operazioni di somma e prodotto, nel senso che si ha

$$n \leq m \Longrightarrow n + p \leq m + p, \quad n \leq m \Longrightarrow n \cdot p \leq m \cdot p.$$