Sottosuccessioni; Teorema di Bolzano-Weierstrass

Sottosuccessioni

Sia data una successione reale $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e sia data una successione $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente. Allora è possibile considerare la successione che ha come termine generale $x_{n(h)}$. Più precisamente si tratta della successione ottenuta come $x \circ n$. Il termine generale della successione $x \circ n$ si indica con x_{n_h}, e la successione x_{n_h} viene detta sottosuccessione della successione x_n. Il motivo di questo nome sta proprio nel fatto che la successione x_{n_h} viene ottenuta scegliendo alcuni tra i valori della successione x_n, ma sempre infiniti e corrispondenti a numeri naturali distinti.

Esempio: Sia data la successione $x_n = (-1)^n$; allora considerata la successione $n_h = 2h$ si ha che la sottosuccessione x_{n_h} vale costantemente 1; mentre se si considera la successione $n_h = 2h + 1$, la sottosuccessione x_{n_h} vale costantemente -1.

Un primo importante risulato che lega le successioni alle sottosuccessioni è il seguente.

Teorema: Sia x_n una successione; allora x_n ammette limite ℓ (finito o non finito) se e solo se ogni sottosuccessione di x_n ammette il limite ℓ (finito o infinito).

Esempio: La successione $x_n = (-1)^n$ non ammette limite, ovvero è indeterminata. Infatti esistono due sottosuccessioni di x_n che ammettono due limiti distinti, che sono 1 e -1; ne segue, per il Teorema precedente, che la successione x_n non può ammettere limite, finito o infinito.

Il seguente teorema, di Bolzano-Weierstrass, rappresenta il teorema più importante dell'intera teoria delle successioni reali:

Teorema (Bolzano-Weierstrass): Sia data una successione x_n limitata, ovvero tale per cui esiste $c > 0$ con $|x_n| \leq c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; allora esiste una sottosuccessione x_{n_h} convergente.

Dimostrazione. Sia x la successione di termine generale x_n, e sia I =Im(x); se ℓ finito, allora si conclude facilmente poichè almeno un elemento $\ell \in I$ deve corrispondere ad infiniti indici n_h, per definizione di sottosuccessione. Ne segue che la sottosuccessione x_{n_h} converge ad ℓ, essendo costante. Possiamo quindi supporre che I sia un insieme infinito; dal momento che x_n limitata, esistono $a < b$ numeri reali tali che $a \leq x_n \leq b$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia α il valore medio tra a e b, ovvero $\alpha = (a+b)/2$; si considerino dunque $I_1 = \{y \in \mathbb{R} : a \leq y \leq \alpha\}$ e $I_2 = \{y \in \mathbb{R} : \alpha \leq y \leq b\}$. Allora I ha infiniti elementi in I_1 oppure in I_2, poichè se avesse un numero finito di elementi sia in I_1 sia in I_2, dovrebbe avere un numero finito di elementi anche in $I_1 \cup I_2$, che è impossibile per ipotesi. A questo punto basta procedere iterando il procedimento: supponiamo che I_1 contenga infiniti elementi di I; allora si divide I_1 ancora dal suo punto medio, e si ripete il ragionamento.

In tal modo si viene a costruire una successione di insiemi I_n della forma

$$I_n = \{y \in \mathbb{R} : \alpha_n \leq y \leq \beta_n\}$$

con

$$0 \leq \beta_n - \alpha_n \leq \frac{b-a}{2^n}. \tag{1}$$

Per costruzione si ha $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq .... \leq \alpha_n \leq ....b$ e $\beta_1 \geq \beta_2 \geq .... \geq \beta_n \geq ....a$. Si dimostra quindi che $\alpha_n \to \ell_1$ e che $\beta_n \to \ell_2$, avendo i termini ordinati e limitati; ma allora, grazie a (1), si ha che $\ell_1 = \ell_2$, poichè $\beta_n - \alpha_n \to 0$. La dimostrazione è quindi conclusa, in quanto basta ora scegliere x_{n_1} come il primo elemento di I che cade in I_1, x_{n_2} il primo elemento di I che cade in I_2, ecc... Allora si ha $0 \leq |x_{n_h} - \ell| \leq \beta_{n_h} - \alpha_{n_h} \leq (b-a)/(2^{n_h})$ che fornisce $x_{n_h} \to \ell$ per $h \to +\infty$.