Successioni di Cauchy; completezza di $\mathbb{R}$

Il concetto di successione di Cauchy fornisce uno dei concetti di base per lo sviluppo dell'Analisi Matematica; infatti l'essere di Cauchy è una proprietà "interna" alla successione, ma che in molti casi si trasmette "all'esterno" garantendo l'esistenza del limite. Tale proprietà viene anche detta di completezza.
Si dice che una successione reale x_n è una successione di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale per cui si abbia $|x_n - x_m| < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq \bar{n}$.
Fuori dalle righe una successione di Cauchy è una successione nella quale i valori da essa assunti si avvicinano sempre di più tra loro quando n diventa grande.
Una prima proprietà elementare è la seguente:

PROPOSIZIONE: Sia x_n una successione convergente; allora x_n è di Cauchy.

Dimostrazione. Sia
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell;$$
allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale per cui per ogni $n \geq \nu$ si ha $|x_n - \ell| < \varepsilon/2$; dunque per ogni $n, m \geq \nu$ si ha $|x_n - x_m| \leq |x_n - \ell| + |x_m - \ell| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Il fatto che più interessa è che in $\mathbb{R}$ vale anche il viceversa, il che porta alla conclusione che $\mathbb{R}$ è "completo" (per definizione).

TEOREMA (CRITERIO DI CONVERGENZA DI CAUCHY): Sia x_n una successione di Cauchy; allora x_n converge.

Dimostrazione. Anzitutto la successione risulta limitata; infatti fissato $\varepsilon > 0$ e $n \geq \nu$, si ha $x_n - \varepsilon < x_m < x_n + \varepsilon$ per ogni $m \geq \nu$. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione x_{n_h} convergente ad un certo $\ell \in \mathbb{R}$. Dunque per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\mu \in \mathbb{N}$ tale per cui per ogni $h \geq \mu$ si ha $|x_{n_h} - \ell| < \varepsilon$; dal momento che x_n è di Cauchy si ha anche che $|x_n - x_m| < \varepsilon$ per ogni $n, m \geq \nu$. Sia quindi $n_h > \max\{n_\mu, \nu\}$; allora si ha $|x_n - \ell| < |x_n - x_{n_h}| + |x_{n_h} - \ell| < 2\varepsilon$ per ogni $n \geq \nu$.