Nozioni di topologia in $\mathbb{R}$

Intervalli

I principali sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, molto importanti per lo studio della struttura topologica di $\mathbb{R}$ stesso, sono gli intervalli. Si denota con

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \quad (a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \quad [a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Gli intervalli della forma (a,b) vengono anche detti aperti mentre gli intervalli della forma $[a,b]$ vengono anche detti chiusi; nei casi restanti l'intervallo non è nè aperto nè chiuso.
Una generalizzazione che coinvolge l'uso del simbolo dell'infinito si ha ponendo le seguenti definizioni:

$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \quad (-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}.$$

Chiaramente definizioni analoghe valgono per gli intervalli della forma

$$[a,+\infty), \quad (-\infty,a].$$

Poichè ∞ non è un numero reale, non ha invece senso, in $\mathbb{R}$, considerare intervalli della forma

$$[-\infty,a), \quad [-\infty,a], \quad (a,+\infty], \quad [a,+\infty].$$

Intorni; punti aderenti, di accumulazione e isolati

Sia dato $x \in \mathbb{R}$; si dice che $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intorno di x se esiste $\delta > 0$ tale per cui si abbia

$$(x-\delta, x+\delta) \subseteq I.$$

I è quindi intorno di x se E contiene tutti i punti sufficientemente vicini ad x.
Dato $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice che $x \in \mathbb{R}$ è punto aderente ad E se per ogni intorno I di x si ha $I \cap E \neq \emptyset$.
La nozione di aderenza risulta inadeguata allo scopo di selezionare quei punti x che sono vicini ai punti di E. Sia dato $E \subseteq \mathbb{R}$; si dice che $x \in E$ è un punto isolato per E se esiste un intorno I di x tale per cui si abbia

$$(I \setminus \{x\}) \cap E = \emptyset.$$

Se x è punto aderente ad un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ ma non è isolato si dice anche che x è punto di accumulazione per E; dunque si ha che x è di accumulazione per E se e solo se per ogni I intorno di x si ha

$$(I \setminus \{x\}) \cap E \neq \emptyset.$$

In altre parole x è di accumulazione per E se x è aderente ad $E \setminus \{x\}$.
Si osservi che la definizione di punto aderente o di accumulazione per un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$ non presuppone che il punto appartenga ad E, cosa che invece si richiede per la definizione di punto isolato.

Esempio: Sia dato l'insieme $E = \{0\} \cup (1, 9]$. Allora l'insieme dei punti aderenti ad E è dato da $\{0\} \cup [1, 9]$, mentre $x = 0$ è l'unico punto isolato per E; infine l'insieme dei punti di accumulazione per E è l'intervallo chiuso $[1, 9]$.

Estremo inferiore e superiore

Uno dei concetti di base nello studio dei sottoinsiemi di un insieme in cui vi sia un ordinamento totale sta nel concetto di elemento massimo o minimo; va però osservato che non necessariamente un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ possiede elementi che soddisfano a questa richiesta. Per esempio, basta considerare il generico intervallo aperto (a, b): questo insieme non possiede un elemento minimo, nè un elemento massimo. Per ovviare a questa difficoltà l'idea è quella di definire due oggetti che sostituiscono i concetti di minimo e massimo, ovvero definire l'estremo inferiore e l'estremo superiore di un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$.
Anzitutto si considerino insiemi che siano anche limitati, ovvero tali per cui esista $c > 0$ con $|x| \leq c$ per ogni $x \in E$. In tal caso si dice che $m \in \mathbb{R}$ è l'estremo inferiore di E se $m \leq x$ per ogni $x \in E$ e inoltre per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $y \in E$ con $y < m + \varepsilon$. Analogamente si dice che $M \in \mathbb{R}$ è l'estremo superiore di E se $M \geq x$ per ogni $x \in E$ e inoltre per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $y \in E$ con $y > M - \varepsilon$.
Si può dimostrare che ogni insieme limitato $E \subseteq \mathbb{R}$ possiede estremo inferiore ed estremo superiore, e tali estremi sono anche unici. Inoltre si verifica facilmente che m ed M sono sempre punti aderenti ad E, eventualmente isolati. Nel caso in cui $m \in E$ si dice anche che m è il minimo di E, mentre nel caso $M \in E$ si dice anche che M è il massimo di E.
Si consideri ora il caso di insiemi non limtati; più precisamente si dice che $E \subseteq \mathbb{R}$ è superiormente limitato se esiste $c > 0$ tale per cui si abbia $x \leq c$ per ogni $x \in E$; si dice che E è inferiormente limitato se esiste $c > 0$ tale per cui si abbia $x \geq c$ per ogni $x \in E$. Un insieme superiormente limitato ha sempre estremo superiore; in caso contario si pone anche $M = +\infty$. Analogamente un insieme inferiormente limitato ha sempre estremo inferiore, ed in caso contrario si pone $m = -\infty$.

Esempio: Sia dato l'insieme $E = (-3, 5] \cup [7, 11]$; allora $m = -3$ e $M = 11$, inoltre m è solamente estremo inferiore mentre M è anche massimo di E.

Esempio: Sia dato l'insieme$E = (-\infty, 2] \cup \{6\}$; allora E non è inferiormente limitato, da cui $m = -\infty$. Invece E è superiormente limitato e si ha $M = 6$ che risulta essere anche massimo di E. Si osservi che in questo caso il massimo è un punto isolato per E.