Limiti notevoli di funzioni

Vi sono alcuni limiti, detti notevoli, che spesso semplificano il calcolo di limiti più complicati. Nel seguito verranno illustrati, con alcune dimostrazioni, alcuni dei più importanti limiti notevoli.

1)
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m}.$$

Infatti si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^n \left(a_n + a_{n-1}x^{-1} + \cdots + a_1 x^{1-n} + a_0 x^{-n}\right)}{x^m \left(b_m + b_{m-1}x^{-1} + \cdots + b_1 x^{1-m} + b_0 x^{-m}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n + a_{n-1}x^{-1} + \cdots + a_1 x^{1-n} + a_0 x^{-n}}{b_m + b_{m-1}x^{-1} + \cdots + b_1 x^{1-m} + b_0 x^{-m}} = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m}.$$

2)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Infatti si ha

$$0 \le \sin x \le x \le \tan x$$

per ogni $x \in (0, \pi/2)$, da cui

$$\frac{1}{\tan x} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{\sin x}$$

e quindi, moltiplicando per $\sin x$ si ha

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1.$$

Per il Teorema del confronto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Grazie alla parità della funzione $\frac{\sin x}{x}$ si conclude.

3)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

4)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

5)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

6)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1.$$

Infatti si ha, ponendo $t=\log(1+x)$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1}=1.$$

6)
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Infatti si ha, ponendo $t=\frac{1}{x}$,

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\pm\infty}e^{x\log(1+\frac{1}{x})}=\lim_{t\to 0}e^{\frac{\log(1+t)}{t}}=e^1=e.$$

7)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e,\quad a>0, a\neq 1.$$

8)
$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a,\quad a>0.$$