

Cenni di topologia in $\mathbb{R}^n$

Si definisce $\mathbb{R}^n$ come l'insieme di tutte le n -ple di numeri reali, ovvero

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ per } i = 1, 2, \dots, n\}$$

Su $\mathbb{R}^n$ si definiscono due operazioni, un'operazione interna, $+$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, detta somma fra vettori, ed un'operazione esterna, $\cdot$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, detta prodotto per scalare. Presi $x, y \in \mathbb{R}^n$, e $\lambda \in \mathbb{R}$, con

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

risulta

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

La struttura algebrica $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, dato che $\mathbb{R}^n$ è chiuso rispetto alla somma fra vettori e rispetto al prodotto per scalare (vengono detti scalari gli elementi di $\mathbb{R}$), e tali operazioni soddisfano queste proprietà:

$$x + y = y + x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$$

$$\exists O \in \mathbb{R}^n : O + x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \exists (-x) \in \mathbb{R}^n : x + (-x) = O$$

$$a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{sia } 1 \text{ l'unità di } \mathbb{R}, \text{ allora } 1 \cdot x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$a(x + y) = a \cdot x + a \cdot y \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Dati due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$, con

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

si definisce *prodotto scalare* fra x e y , e si indica con $\langle x, y \rangle$, la quantità

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Proprietà del prodotto scalare

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ con $x, y \in \mathbb{R}^n$ (commutativo)
2. $\langle (\lambda x + \mu y), z \rangle = \langle \lambda \cdot x, z \rangle + \langle \mu \cdot y, z \rangle$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}^n$ (bilineare)
3. $\langle x, x \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$, dunque $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
 $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = O$ (qui, e nel seguito, con O si intende il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$, ovvero $O = (0, 0, \dots, 0)$)

Norma

Una funzione $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *norma* se e solo se rispetta queste proprietà:

1. $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
 $\|x\| = 0 \iff x = O$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (disuguaglianza triangolare)

Dato un vettore $x \in \mathbb{R}^n$, si definisce *norma euclidea* (o *modulo* o *lunghezza*) di x la quantità $\sqrt{\langle x, x \rangle}$. Da ora in poi, se non espressamente detto, con il simbolo $\|\cdot\|$ si indicherà la norma euclidea del suo argomento. Si può dimostrare (e verrà fatto in seguito) che, come dice il nome stesso, la norma euclidea rispetta le tre proprietà di una norma.

Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz dice che comunque si prendano due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$ risulta

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Dimostrazione:

preso $t \in \mathbb{R}$, risulta $\|x + t \cdot y\|^2 \geq 0$

$$\begin{aligned} \|x + t \cdot y\|^2 &= \langle (x + t \cdot y), (x + t \cdot y) \rangle = \\ &= \langle x, x \rangle + t \cdot \langle x, y \rangle + t \cdot \langle y, x \rangle + t^2 \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2t \langle x, y \rangle + t^2 \|y\|^2 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Posto $a = \|y\|^2$, $b = 2\langle x, y \rangle$, $c = \|x\|^2$, dall'ultimo membro della catena di uguaglianze si ottiene

$$at^2 + bt + c \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Per come è definito, $a \geq 0$, pertanto il discriminante di $at^2 + bt + c$ deve essere minore o uguale di zero:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{4} = \frac{b^2 - 4ac}{4} \leq 0 &\implies \frac{4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2}{4} \leq 0 \implies \\ &\implies \langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \end{aligned}$$

quindi, facendo la radice ad entrambi i membri, si ottiene

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Dimostriamo ora che la norma euclidea rispetta le tre proprietà di una norma. Le prime due proprietà discendono banalmente dalle proprietà del prodotto scalare, proviamo quindi che $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Dimostrazione:

$$\|x + y\|^2 = \langle (x + y), (x + y) \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz risulta $2\langle x, y \rangle \leq 2\|x\| \cdot \|y\|$, quindi

$$\|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

facendo la radice quadrata ad entrambi i membri si ottiene

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Distanza fra due vettori

Dati due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$, si definisce *distanza* la quantità

$$\|x - y\|$$

In particolare, presi tre vettori $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, si nota che

$$\|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\|$$

ovvero il percorso più breve che congiunge x con z è il segmento che congiunge tali punti.

Intorni sferici

Sia $x \in \mathbb{R}^n$. Si definisce *intorno sferico aperto* di x di raggio $r > 0$ l'insieme

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$$

Si definisce *intorno sferico chiuso* di x di raggio $r > 0$ l'insieme

$$B[x, r] = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}$$

Punti interni, esterni e di frontiera

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e sia $x \in \mathbb{R}^n$. Si dice che x è un *punto interno* ad A se $\exists r > 0$ tale che $B(x, r) \subset A$, ovvero se l'intorno sferico di x con raggio r è contenuto in A .

Si dice che x è un *punto esterno* ad A se $\exists r > 0$ tale che $B(x, r) \cap A = \emptyset$, ovvero se non ci sono intersezioni fra l'insieme e l'intorno sferico di x di raggio r .

Si dice che x è un *punto di frontiera* di A se non è interno né esterno ad A , ovvero se $\forall r > 0$ risulta $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ e $B(x, r) \setminus A \neq \emptyset$.

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$. Si definisce *frontiera* di A , e si indica con il simbolo ∂A , l'insieme

$$\partial A = \{x \in \mathbb{R}^n : x \text{ è un punto di frontiera di } A\}$$

Insiemi aperti, chiusi, interno, chiusura

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$. A si dice *aperto* se tutti i punti di A sono interni ad A , ovvero se $A \cap \partial A = \emptyset$.

A si dice *chiuso* se contiene anche tutti i punti di frontiera, ovvero se $A \supset \partial A$.

Ci sono insiemi che non sono né aperti né chiusi, perché contengono una parte della frontiera.

Si definisce *chiusura* di A , e si indica con $\bar{A}$, il più piccolo insieme chiuso che contiene A , ovvero $\bar{A} = A \cup \partial A$.

Si definisce *interno* di A , e si indica con $\mathring{A}$, il più grande insieme aperto contenuto in A , ovvero $\mathring{A} = A \setminus \partial A$.

Insiemi limitati, non limitati, compatti

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$. L'insieme A si dice *limitato* se esiste un intorno sferico che lo contiene, ovvero se $\exists R > 0$ tale che $B(O, R) \supset A$.

Se invece l'insieme A non è limitato si dice *illimitato*.

Un insieme si dice *compatto* se e solo se è chiuso e limitato.

Insiemi connessi e sconnessi

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$. L'insieme A si dice *connesso per archi* se ogni coppia di punti $x, y \in A$ si può congiungere con un percorso continuo contenuto in A . Se invece esistono due punti $x, y \in A$ tali che ogni percorso continuo che li congiunge esce da A , allora l'insieme A si dice *sconnesso*.

Nel caso A sia sconnesso, preso $x \in A$, si consideri

$$C_x = \{y \in A : \text{c'è un percorso continuo contenuto in } A \text{ che congiunge } x \text{ a } y\}$$

L'insieme C_x si chiama *componente connessa* di A contenente x .

Questo articolo è stato realizzato grazie alla supervisione di Luca Lussardi.