Insiemi di livello e limiti in più variabili

Insiemi di livello

Si consideri una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}^n$. Un modo per poter studiare il comportamento di una funzione in più variabili potrebbe essere quello di studiare le curve lungo cui la funzione si mantiene costante, ovvero i cosiddetti *insiemi di livello*.
Un insieme di livello di f è un insieme di punti in cui la funzione è costante, e si indica con una di queste notazioni

$$\{f = l\} = \{x \in A : f(x) = l\} = f^{-1}(l), \quad \text{dove } l \in \mathbb{R} \text{ è fissato}$$

Ovviamente, se il valore l non appartiene all'immagine della funzione f, l'insieme di livello corrispondente coinciderà con l'insieme vuoto.

Esempio: Si consideri la funzione definita da $f(x, y) = \sqrt{x + \log(y)}$

Il dominio massimale della f si determina tenendo conto che una radice quadrata è definita quando il radicando è non negativo, mentre un logaritmo ha senso solo se il suo argomento è positivo.

$$\begin{cases} y > 0 \\ y \geq \log(y) \end{cases} = \begin{cases} y > 0 \\ \log(y) \geq -x \end{cases} = \begin{cases} y > 0 \\ y \geq e^{-x} \end{cases}$$

Pertanto il dominio massimale della f (rappresentato in Figura 1) coincide con l'insieme

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq e^{-x}\right\}$$

L'insieme D è chiuso (infatti la frontiera è interamente contenuta nell'insieme stesso, $\partial D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^{-x}\right\} \subset D$), non è limitato ed è connesso per archi. Studiamo ora gli insiemi di livello della funzione f; per ogni $l \in \mathbb{R}^+$ risulta

$$f(x, y) = l \implies \sqrt{x + \log(y)} = l \implies x + \log(y) = l^2 \implies$$

$$\implies \log(y) = l^2 - x \implies y = e^{l^2} \cdot e^{-x}$$

Pertanto, per ogni $l \in \mathbb{R}^+$ fissato, l'insieme di livello $\{f = l\}$ coincide con

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^{l^2} \cdot e^{-x}\right\}$$

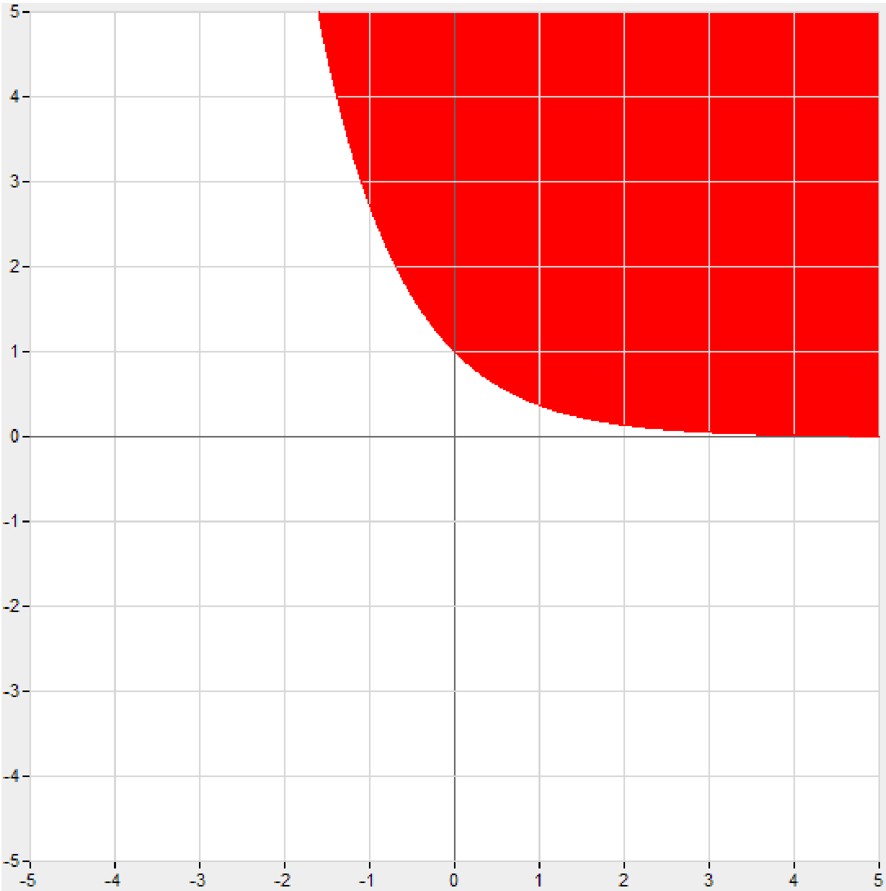

Figura 1: Rappresentazione grafica dell'insieme D dell'esempio precedente

Limiti di funzioni di più variabili

La nozione di limite si estende con semplicità dalle funzioni in una variabile alle funzioni in più variabili. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione in una variabile, e sia $x \in \mathbb{R}$. Il concetto di limite viene così definito

$$\lim_{y \to x} f(y) = l, \text{ con } l \in \mathbb{R}, \text{ se}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } |f(y) - l| < \varepsilon \quad \forall y : 0 < |y - x| < \delta$$

ovvero, la f tende a l quando il suo argomento tende a x, se per ogni ε maggiore di zero, è possibile trovare un δ maggiore di zero tale che, per ogni punto (escluso x) appartenente all'intorno di x con ampiezza δ, la differenza (in modulo) fra la rispettiva immagine tramite f e l non supera ε. In modo analogo si estende tale definizione anche alle funzioni in più variabili.

Definizione: Sia $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}^n$, e sia x un punto di accumulazione di A. Allora

$$\lim_{y \to x} f(y) = l, \quad l \in \mathbb{R}, \text{ se}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } |f(y) - l| < \varepsilon \quad \forall y : 0 < \|y - x\| < \delta$$

L'unica differenza rispetto al caso unidimensionale è che ora x e y sono vettori n-dimensionali, pertanto, per calcolare la loro distanza, è necessario ricorrere alla norma euclidea. Anche per funzioni di più variabili valgono le proprietà dei limiti rispetto al prodotto, alla somma e al rapporto, ovvero

Proposizioni: supponiamo che

$$\lim_{y \to x} g(y) = l \text{ e } \lim_{y \to x} f(x) = m, \text{ con } l, m \in \mathbb{R}, \text{ allora}$$

$$\lim_{y \to x} f(y) + g(y) = m + l$$

Vale lo stesso per il prodotto e per il rapporto, purché il limite della funzione al denominatore sia diverso da zero.
Anche il concetto di continuità per le funzioni in più variabili è del tutto analogo rispetto alle funzioni in una variabile.

Definizione: si consideri una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si dice che f è *continua* in $x \in A$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ tale che } |f(y) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall y \in A : \|y - x\| < \delta$$

Proposizione: Se $x \in A$ è un punto di accumulazione per A, allora f è continua in x se (discende dalla definizione)

$$\lim_{y \to x} f(y) = f(x)$$

Se invece $x \in A$ è un punto isolato di A allora f è continua in x. Da questo si deduce che una funzione è per definizione continua in ogni punto isolato del dominio.

Teorema: se f e g sono continue in x allora anche $f + g$ e $f \cdot g$ sono continue in x. Inoltre, se $g(x) \neq 0$, allora anche $\frac{f}{g}$ è continua in x.

Esempio: i polinomi sono funzioni continue, la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^3y^2 + 5x^2y^2 + 37x^{10}y$ è continua in tutto il suo dominio.

Proposizione: la composizione di funzioni continue è ancora una funzione continua.

Se $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ è continua in $x_0 \in A$
e $g : I \to \mathbb{R}$, dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo, è continua in $f(x_0)$

allora la funzione $g \circ f : A \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$ è continua in x_0.

Esempi:

1. Calcolare
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2}{x^3+y^2+1}$$
La funzione $f(x,y) = x^2 + 2$ è continua in $(0,0)$, poiché è un polinomio. Per lo stesso motivo anche $g(x,y) = x^3 + y^2 + 1$ è continua in $(0,0)$. Inoltre, visto che quest'ultima in $(0,0)$ vale $1 \neq 0$, allora anche la funzione $\frac{f}{g}(x,y)$ è continua in $(0,0)$, pertanto
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2}{x^3+y^2+1} = \frac{2}{1} = 2$$

2. Calcolare
$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x+y}{3x+\sin(y-1)}$$
Le funzioni definite da $x+y$, $3x$, $y-1$ sono tutte continue perché sono polinomi. Dato che il seno è una funzione continua, allora anche $\sin(y-1)$ è continua, perché data dalla composizione di funzioni continue. Pertanto anche il denominatore è una funzione continua, perché somma di funzioni continue. Dato che $3x + \sin(y-1)$ nel punto $(2,1)$ vale $6 \neq 0$, allora anche l'argomento del limite è una funzione continua, pertanto
$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x+y}{3x+\sin(y-1)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3. Calcolare
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{y}$$
Per gli stessi motivi degli esempi precedenti, anche in questo caso numeratore e denominatore sono funzioni continue, ma ora il denominatore si annula nel punto $(0,0)$. Mettendo in evidenza una x al numeratore, si ottiene
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot x$$
Ricordando il limite notevole
$$\lim_{t\to0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$
si osserva che
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 1$$
e
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$$
pertanto, dato che entrambi i limiti esistono finiti, si può concludere che
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot x = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 1 \cdot 0 = 0$$

4. Determinare il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ in cui la seguente funzione è continua

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2-y^2} & \text{se } |x| \neq |y| \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Per come è definita, si deduce che il dominio della f è

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq \pm x\} \cup \{(0,0)\}$$

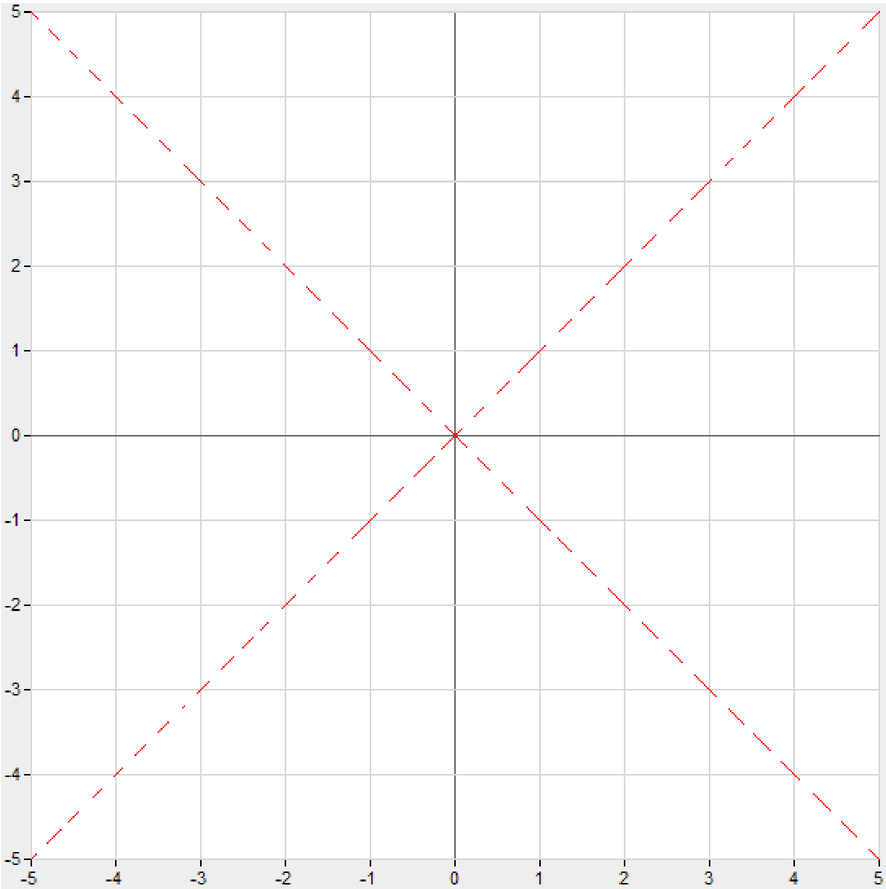

Figura 2: Rappresentazione grafica del dominio di questa funzione

La funzione è sicuramente continua in $D \backslash \{(0,0)\}$, perché composizione di funzioni continue, resta da vedere se è continua nell'origine o meno. In base alla definizione, la f è continua in $(0,0)$ se e solo se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Il limite si presenta sotto una forma di indecisione $\frac{0}{0}$. Vediamo come si comporta la funzione lungo le rette passanti per l'origine di equazione $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$, ovvero studiamo la restrizione $f(x, mx)$. In questo modo ci si riconduce ad una funzione di una variabile.

$$f(x,mx) = \frac{mx^2 \cdot x}{x^2 - m^2x^2} = \frac{mx^3}{x^2(1-m^2)} = \frac{mx}{1-m^2}$$

Se $x \to 0$, la restrizione $f(x, mx)$ tende a zero. Questo però non basta per affermare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Studiamo la restrizione di f alla parabola di equazione $y = x - x^2$.

$$f(x, x - x^2) = \frac{x^3 - x^4}{x^2 - x^2 - x^4 + 2x^3} = \frac{x^3(1-x)}{x^3(2-x)} = \frac{1-x}{2-x}$$

Se $x \to 0$ la $f(x, x - x^2)$ tende a $\frac{1}{2}$. Sono state trovate due curve lungo cui la rispettiva restrizione di f ha limite diverso. Questo è sufficiente per dire che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

non esiste, di conseguenza la f è continua in tutto il suo dominio ad eccezione del punto $(0,0)$.

Teorema del confronto

Il Teorema del confronto è un teorema molto usato nel calcolo di limiti di funzioni in più variabili. Si considerino due funzioni $f(x,y)$ e $g(x,y)$ definite in un intorno di $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Supponiamo che

1. $0 \leq |f(x,y)| \leq g(x,y)$ $\forall (x,y)$ in un intorno di (x_0, y_0)
2. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = 0$

Teorema: se le ipotesi 1. e 2. sono soddisfatte, allora

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$$

Questo teorema, così scritto, vale per funzioni in due variabili. Ma sostituendo il vettore (x,y) con un generico vettore x, e sostituendo al posto di (x_0, y_0) un generico punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, si ottiene la generalizzazione per funzioni in n variabili.

Esempio: Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Conviene passare in coordinate polari, ovvero operare la seguente trasformazione

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}, \text{con } \rho \in [0, +\infty[, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Si osserva che $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, pertanto se $(x,y) \to (0,0)$, allora $\rho \to 0$. L'argomento del limite, scritto in coordinate polari, vale

$$\frac{\rho^2\cos^2(\theta)\rho\sin(\theta)}{\rho^2} = \rho\cos^2(\theta)\sin(\theta)$$

Dato che seno e coseno sono funzioni limitate fra -1 e 1, allora

$$|\cos^2(\theta)\sin(\theta)| \leq 1 \quad \forall\theta \in [0, 2\pi]$$

quindi

$$0 \leq |\rho\cos^2(\theta)\sin(\theta)| \leq |\rho|$$

Ma se $\rho \to 0$, allora $|\rho| \to 0$, pertanto, per il teorema del confronto, si può affermare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

Esempio (coordinate polari traslate): Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{x^2-2x+1}{\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}}$$

Il limite si presenta sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Conviene passari in coordinate polari centrate nel punto $(1,-2)$, attraverso la trasformazione

$$\begin{cases} x-1 = \rho\cos(\theta) \\ y+2 = \rho\sin(\theta) \end{cases}, \text{ con } \rho \in [0,+\infty[, \quad \theta \in [0,2\pi]$$

da cui si deduce che $\rho = \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}$, dunque, se $(x,y) \to (1,-2)$ allora $\rho \to 0$. L'argomento del limite equivale a

$$\frac{x^2-2x+1}{\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+(y+2)^2} = \frac{\rho^2\cos^2(\theta)}{\rho} = \rho\cos^2(\theta)$$

Dato che

$$0 \leq |\rho\cos^2(\theta)| \leq \rho$$

poiché

$$\cos^2(\theta) \leq 1 \quad \forall\theta \in [0,2\pi]$$

allora il limite vale zero per il teorema del confronto.

Proposizione: in generale, dato $l \in \mathbb{R}$, supponiamo che esista un $R > 0$ tale che

1. $|f(x_0+\rho\cos(\theta), y_0+\rho\sin(\theta)) - l| \leq \varphi(\rho)$ $\forall\theta \in [0,2\pi]$, $\forall\rho \leq R$
2. $\lim_{\rho\to 0}\varphi(\rho) = 0$

allora

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l$$

Esempio: Calcolare, se esiste, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

Proviamo, in prima battuta, a passare in coordinate polari, ponendo,

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}, \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{x^2y}{x^4+y^2} = \frac{\rho^3\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{\rho^4\cos^4(\theta)\rho^2\sin^2(\theta)} = \frac{\rho\cos^2(\theta)\sin(\theta)}{\rho^2\cos^4(\theta)+\sin^2(\theta)}$$

strada non percorribile a causa del denominatore troppo complicato.

Proviamo allora a studiare gli insiemi di livello di $f(x,y)$. Fissato $l \in \mathbb{R}$, risulta

$$f(x,y) = l \implies \frac{x^2y}{x^4+y^2} = l \implies x^2y = l(x^4y^2) \implies x^2y = lx^4 + ly^2 \implies$$

$$\implies ly^2 - x^2y + lx^4 = 0 \implies y = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^4-4l^2x^4}}{2l} \implies$$

$$\implies y = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^4(1-4l^2)}}{2l}$$

Poiché se $\Delta < 0$, ovvero se $l < -\frac{1}{2} \vee l > \frac{1}{2}$, l'equazione non ha valori reali, si nota che la funzione assume valori compresi fra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$, dunque $l \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. L'insieme di livello relativo al valore generico l ($-\frac{1}{2} \leq l \leq \frac{1}{2}$), ha equazione (raccogliendo x^2)

$$y = \left(\frac{1 \pm \sqrt{1-4l^2}}{2l} \right) x^2$$

e, al variare di l, denota un insieme di parabole passanti per l'origine. Pertanto la funzione è costante sulle parabole passanti per l'origine aventi questa equazione.

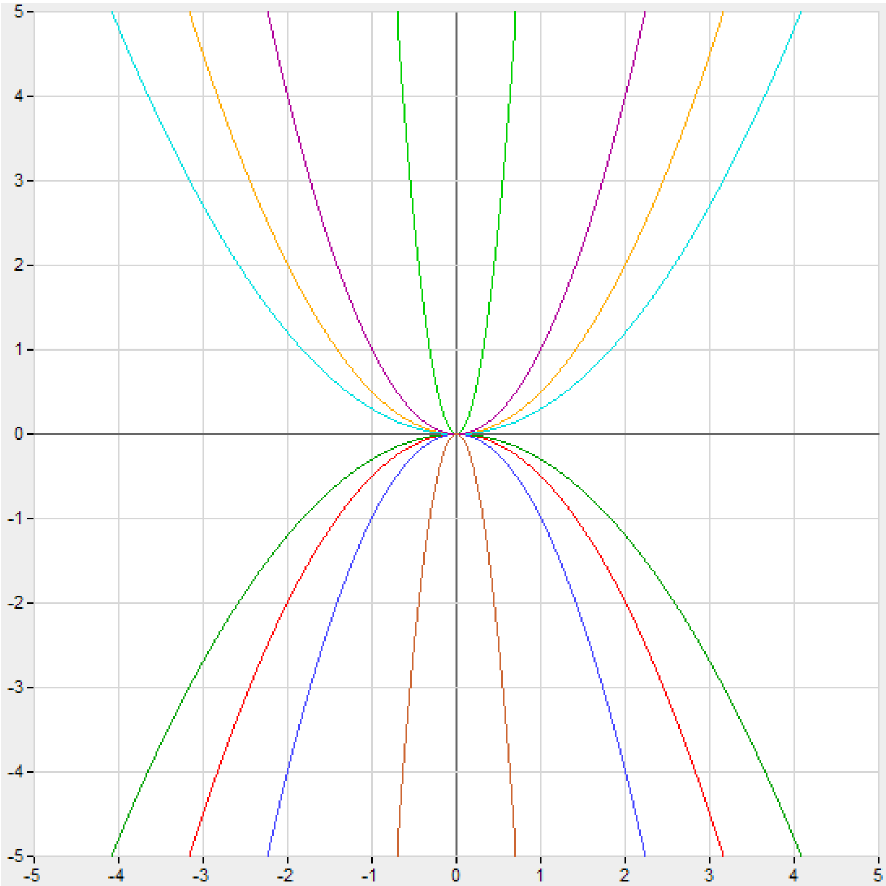

Figura 3: Insiemi di livello della funzione

Considerando la parabola (passante per l'origine) di equazione

$$y = \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4\left(\frac{1}{4}\right)^2}}{2 \cdot \frac{1}{4}} \right) x^2 \qquad \text{ovvero per } l = \frac{1}{4}$$

si trova l'equazione dell'insieme di livello in cui la funzione assume costantemente il valore $\frac{1}{4}$. Pertanto, il limite per $(x, y) \to (0, 0)$ della restrizione della f a questa parabola fa $\frac{1}{4}$. Considerando invece la parabola (sempre passante per l'origine) di equazione

$$y = \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4\left(\frac{1}{8}\right)^2}}{2 \cdot \frac{1}{8}} \right) x^2 \qquad \text{ovvero per } l = \frac{1}{8}$$

si trova l'equazione dell'insieme di livello in cui la funzione assume costantemente il valore $\frac{1}{8}$.
Pertanto, il limite per $(x, y) \to (0, 0)$ della restrizione della f a questa parabola fa $\frac{1}{8}$.
Ma allora, visto che esistono due curve lungo cui la f ammette due limiti diversi, il limite iniziale non esiste.

Questo articolo è stato realizzato grazie alla supervisione di Luca Lussardi.