Derivabilità parziale e direzionale in $\mathbb{R}^n$

Per funzioni in una variabile la derivata viene definita come limite del rapporto incrementale. Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e $x_0 \in \mathbb{R}$, se esiste finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

allora il risultato di tale limite viene detto derivata prima di f calcolata in x_0, e generalmente si indica con una di queste notazioni: $f'(x_0)$, $D[f](x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$.
Quando si ha a che fare con fare con funzioni in n variabili, la prima idea che si può avere è quella di incrementare una sola variabile. Si consideri una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto, nelle due variabili x_1, x_2. Sia $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in A$ un punto appartenente al dominio, e sia $h \in \mathbb{R}$. Se

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}_1 + h, \bar{x}_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{h}$$

esiste finito, allora il risultato si chiama *derivata parziale* di f rispetto a x_1 calcolata nel punto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, e si indica con $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Se invece

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2 + h) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{h}$$

esiste finito, allora il risultato è la derivata parziale di f rispetto a x_2 calcolata nel punto $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, e si indica con $\frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.
Nello studiare la derivata parziale rispetto a x_1 la variabile x_2 viene congelata, in quanto si lascia variare solo x_1, quindi, quello che succede in pratica, è che si va a lavorare con una funzione in una sola variabile.

$$\varphi(x_1) = f(x_1, x_2) \qquad (x_2 \text{ è congelata})$$

La derivata si ottiene calcolando

$$\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x_1 + h) - \varphi(x_1)}{h} = \varphi'(x_1) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)$$

Per calcolare la derivata di f rispetto a x_1 si possono usare le stesse regole di derivazione nel caso di funzioni in una variabile trattando x_2 come se fosse una costante.

Esempi: calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x + 2y$$

$$f(x,y) = ye^x + \sin(xy^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^x + \cos(xy^2)\cdot y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^x + \cos(xy^2)\cdot(2xy)$$

Se una funzione f è sufficientemente regolare è possibile derivare ulteriormente le due derivate parziali (ovviamente seguendo le stesse regole di derivazione) ottenendo le sue derivate parziali seconde

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \text{ derivata seconda di } f \text{ rispetto a } x \text{ due volte}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \text{ derivata seconda mista}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \text{ derivata seconda mista}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \text{ derivata seconda di } f \text{ rispetto a } y \text{ due volte}$$

Esempio: data la funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto ye^x + \sin(xy^2)$$

le derivate parziali prime e le derivate seconde miste sono pari a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^x + y^2\cos(xy^2) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^x + 2xy\cos(xy^2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(ye^x + y^2\cos(xy^2)) = \\ &= e^x + 2y\cos(xy^2) + y^2 - 2xy(-\sin(xy^2)) = \\ &= e^x + 2y\cos(xy^2) + 2xy^3\sin(xy^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(e^x + 2xy\cos(xy^2)) = \\ &= e^x + 2y\cos(xy^2) - (2xy)(-\sin(xy^2))y^2 = \\ &= e^x + 2y\cos(xy^2) + 2xy^3\sin(xy^2)\end{aligned}$$

Le derivate seconde miste sono uguali.

Nota: l'uguaglianza

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

sotto opportune condizioni vale in generale.

Fino ad adesso sono state considerate solo funzioni in due variabili. Le cose dette si estendono analogamente anche a funzioni in n variabili. In generale, sia $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, e sia $x \in A$, con $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Per fare la derivata rispetto a x_i si congelano tutte le variabili e si incrementa rispetto a x_i, ovvero

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{h}$$

supponendo, ovviamente, che tale limite esista finito. Considerando ancora per un attimo il caso in due variabili, si nota che l'incremento può anche essere scritto così

$$(x_1 + h, x_2) = (x_1, x_2) + (h, 0) = (x_1, x_2) + h(1, 0) = (x_1, x_2) + he_1$$

dove con $e_1 = (1, 0)$ si intende il primo versore fondamentale di $\mathbb{R}^2$. Analogamente

$$(x_1, x_2 + h) = (x_1, x_2) + (0, h) = (x_1, x_2) + h(0, 1) = (x_1, x_2) + he_2$$

dove con $e_2 = (0, 1)$ si intende il secondo versore fondamentale di $\mathbb{R}^2$. Il tutto si generalizza così in n dimensioni

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) +$$
$$+ h(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + he_i$$

dove, al solito, con e_i si intende l'i-esimo versore fondamentale di $\mathbb{R}^n$, ovvero il vettore che ha tutte le componenti nulle eccetto l'i-esima che vale 1. Da questo si nota che nel determinare le derivate parziali gli incrementi vengono calcolati lungo direzioni parallele a quelle degli assi cartesiani.
Anziché incrementare rispetto ad una di queste direzioni, è possibile incrementare nella direzione di un generico versore v (un versore è un vettore di lunghezza unitaria), ottenendo la derivata direzionale della funzione nella direzione di v.

Definizione: sia $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, e sia $x \in A$. Considerato $v \in \mathbb{R}^n$, con $\|v\| = 1$, se

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}$$

esiste finito, allora il risultato di tale limite prende il nome di *derivata direzionale* della funzione f calcolata in x, e si indica con $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$.

Definizione: data una funzione in n variabili $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, si dice che f è *derivabile* in $x \in A$ se esistono

$$\frac{\partial f}{x_1}(x), \frac{\partial f}{x_2}(x), \ldots, \frac{\partial f}{x_n}(x)$$

Si dice che f è *derivabile in ogni direzione* in $x \in A$ se $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ esiste $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$.

Proposizione: come mostra l'esempio successivo, la derivabilità in $\mathbb{R}^n$ non implica la continuità.

Esempio: si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right)^2 & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Per determinare il limite della funzione per $(x, y) \to (0, 0)$, studiamo le seguenti restrizioni:

$$f(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x, x^2) = \left(\frac{x^4}{2x^4} \right)^2$$

Dato che

$$\lim_{x \to 0} f(x, 0) = \lim_{x \to 0} 0 = 0 \qquad \lim_{x \to 0} f(x, x^2) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^4}{2x^4} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

si può concludere che

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$$

non esiste, pertanto la funzione non è continua in $(0,0)$. Mostriamo ora che in $(0,0)$ la funzione è derivabile in ogni direzione $v=(v_1,v_2)$ tale che $\sqrt{v_1^2+v_2^2}=1$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f((0,0)+h(v_1,v_2))-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(hv_1,hv_2)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}h^2(\frac{v_1v_2}{h^2v_1^4+v_2^2})^2=\lim_{h\to 0}h(\frac{v_1v_2}{h^2v_1^4+v_2^2})^2=0$$

quindi $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)=0$. Benché la funzione non sia continua nell'origine, in tale punto è derivabile in ogni direzione, quindi, a maggior ragione, nell'origine esistono anche le derivate parziali, e sono (ovviamente) nulle.

Questo articolo è stato realizzato grazie alla supervisione di Luca Lussardi.