Derivate seconde in $\mathbb{R}^n$

Si consideri una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Sotto opportune condizioni, vale la seguente uguaglianza

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Come mostra l'esempio successivo, ci sono casi in cui questa uguaglianza non è rispettata.

Esempio: si consideri una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Nei punti tali che $y \neq 0$ la f è continua, perché ottenuta per composizione di funzioni continue. Fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, la f è continua in $(x_0, 0)$ se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y) = 0$$

Dato che $|y^2| = y^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}$, e considerando che $\operatorname{arctg}(\cdot)$ è una funzione limitata fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, risulta

$$0 \leq \left| y^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) \right| \leq y^2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

Se $(x,y) \to (x_0, 0)$, allora $y^2 \cdot \frac{\pi}{2} \to 0$, pertanto, per il Teorema del confronto, si può affermare che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y)} f(x,y) = 0$$

Sfruttando le regole di derivazione e ricorrendo alla definizione di derivata per i punti di $\mathbb{R}^2$ tali che $y = 0$, si arriva a questi risultati

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Considerando che $\operatorname{arctg}(\cdot)$ è una funzione limitata e passando in coordinate polari, in virtù del Teorema del confronto in entrambi i casi si dimostra che le derivate prime sono continue in tutto $\mathbb{R}^2$, pertanto, per il Teorema del differenziale totale, la f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.
Se si vanno a calcolare le derivate seconde miste, con le solite regole di derivazione e sfruttando in alcuni casi la definizione, si trovano questi risultati

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Quindi la funzione f ha derivate parziali seconde miste differenti nell'origine (e in particolare, non è vero che entrambe sono continue in $(0,0)$). Da questo esempio si capisce che non sempre

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Infatti vale il seguente Teorema, detto Teorema di Schwarz, o Teorema dell'inversione dell'ordine di derivazione.

Teorema: data una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, sia $x \in A$ un punto interno al dominio. Se f ha derivate

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

definite in un intorno di x e continue in x, allora queste derivate, calcolate in x, sono uguali

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

Definizione: dato un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, se $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione con tutte le derivate seconde continue in A, allora si dice che f è una funzione di *classe* C^2 *di* A, e si scrive $f \in C^2(A)$.

In particolar modo si nota che $C^2(A) \subset C^1(A)$, ovvero se una funzione è di classe C^2 allora è sicuramente anche di classe C^1 ed è differenziabile, ovviamente non vale il contrario.
Le funzioni di classe C^2 soddisfano le ipotesi del Teorema di Schwarz, pertanto le derivate seconde miste risultano uguali, percui possono essere calcolate nell'ordine preferito.

Definizione: dato un insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^n$, sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione tale che $f \in C^2(A)$. Lo Jacobiano di ∇f si chiama *matrice Hessiana* di f, si indica con Hf ed ha questa struttura

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Come si può notare, la k-esima riga è il gradiente di $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, per $k = 1, 2, \dots, n$, infatti

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} \nabla \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \nabla \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \nabla \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Come si può notare la matrice Hessiana è quadrata di ordine n. Se $f \in C^2(A)$, allora le derivate seconde sono continue in A, quindi, per il teorema di Schwarz, risulta

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i, \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

per ogni $i, j = 1, 2, \dots, n$, in particolare si deduce che Hf è una matrice simmetrica.
Se $f \in C^2(A)$ se ne può scrivere lo sviluppo di Taylor al secondo ordine

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2} \cdot h \cdot Hf(x) \cdot h^T + o(\|h\|^2)$$

dove, al solito, h^T indica il traspoto di h, e vale

$$h \cdot Hf(x) \cdot h^T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_j$$

Il prodotto $h \cdot Hf(x) \cdot h^T$ è una *forma quadratica.*

Questo articolo è stato realizzato grazie alla supervisione di Luca Lussardi.