SILSIS-MI
Scuola Interuniversitaria Lombarda di Specializzazione
per l'Insegnamento Secondario - Sezione di Milano
- V CICLO -

LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE: INTRODUZIONE E MODELLI

Docente supervisore: prof.sa Silvana BOCCARDO
Docente universitario: prof.sa Cristina TURRINI

Relazione finale di:
Anna ARCARA
matricola Y02091
classe di concorso 47/A

Anno Accademico 2004 / 2005

INDICE

INTRODUZIONE

Curiosando tra i miei libri di matematica delle superiori mi è capitato sottomano il testo di seconda[1] e in esso ho trovato un capitolo sulle geometrie non euclidee con una semplice presentazione attraverso modelli. In quello stesso periodo alcuni colleghi della SILSIS stavano presentando diverse lezioni sulle geometrie non euclidee per il Laboratorio di Autoaggiornamento B tenuto dalla professoressa Turrini. Tali lezioni erano tutte rivolte a classi quinte e avendo fatto tirocinio nel biennio di un liceo scientifico, mi sono chiesta se potesse essere interessante e utile presentare agli studenti l'argomento in questa fase del loro percorso scolastico.

Nonostante i dubbi iniziali ho scelto questo argomento per diversi motivi: durante il Laboratorio di Tirocinio ho sentito parlare spesso di una didattica di tipo elicoidale, che riprende gli argomenti approfondendoli di volta in volta; le geometrie non euclidee generalmente vengono affrontate in quinta, ma effettivamente potrebbe essere utile cominciare a presentarle agli studenti in seconda proprio in vista di un sapere che si costruisce sulla base di conoscenze già acquisite (le conoscenze vanno via via riprese e 'ristrutturate' a un livello superiore). Inoltre, affrontando l'argomento a partire dalle conoscenze dei ragazzi sulla geometria euclidea, ho pensato che poteva essere utile farlo non troppo lontano dalla prima, classe in cui i ragazzi studiano questo argomento. Infine, la classe in cui avrei fatto il mio tirocinio attivo si presentava come una classe di soggetti molto svegli, attivi, curiosi e interessati.

Nella prima parte di questo lavoro sono descritti il contesto in cui mi sono trovata ad elaborare il mio intervento didattico nell'ambito del tirocinio attivo e l'intervento didattico stesso nelle sue fasi di progettazione, svolgimento e verifica.

Successivamente, dopo una parte dedicata ad alcune riflessioni sull'esperienza, è riportato un modello del pensiero scientifico elaborato da Einstein, nella cui teoria le geometrie non euclidee trovarono una loro applicazione; in questa stessa parte (*Einstein*: *un modello del pensiero scientifico*) si trovano alcune riflessioni sulla matematica e le sue applicazioni in campo scientifico.

In appendice viene, infine, presentato a grandi linee un modo alternativo di introdurre la geometria euclidea rispetto all'impostazione tradizionale che prevede la descrizione degli enti primitivi.

[1] Cfr. M. Battelli

CONTESTO

Ho svolto la mia attività di tirocinio presso alcune classi del biennio di un Liceo Scientifico.
Essendo stata affidata a due insegnanti di matematica, ho avuto la possibilità di osservare diversi stili di insegnamento oltre che diversi gruppi classe.
In realtà entrambe le professoresse si servivano prevalentemente della lezione frontale più o meno dialogata con gli studenti, a volte partendo da domande rivolte ai ragazzi per introdurli e guidarli nella scoperta dell'argomento trattato, altre volte introducendo direttamente l'argomento ma lasciando agli studenti la possibilità di intervenire con domande e osservazioni.
Le classi, invece, si sono rivelate molto differenti riguardo all'interesse, la partecipazione alle lezioni e l'impegno scolastico: in una classe prima, ad esempio, ho potuto riscontrare molte difficoltà dovute soprattutto allo scarso interesse degli studenti, la maggior parte dei quali già ripetenti; mentre nella seconda dove ho poi svolto il mio lavoro di tirocinio attivo ho trovato una forte motivazione, interesse e una grande vivacità: molti degli studenti partecipavano attivamente alle lezioni con osservazioni molto intelligenti e domande frequenti, al punto che la professoressa si vedeva a volte costretta a selezionare gli interventi rispondendo solo alle domande utili al contesto e a una trattazione efficace degli argomenti.
I ragazzi, nonostante i timori iniziali, hanno partecipato attivamente anche alle mie lezioni dimostrando interesse e curiosità. Come si vedrà, i loro interventi mi hanno in qualche modo guidato nell'impostazione del lavoro.

INTERVENTO DIDATTICO

Progettazione

Nella progettazione di queste lezioni la prima fase è stata soprattutto di documentazione: non avendo mai incontrato questo argomento nel corso dei miei studi, mi sono preoccupata di recuperare diversi testi (scolastici e non) che potessero fornirmi una preparazione adeguata; ho sfruttato anche diverso materiale che ho potuto recuperare su Internet. Da qui ho cercato di capire cosa potesse essere utile presentare in una seconda liceo per fornire ai ragazzi una prima idea sulle geometrie non euclidee.

Riguardo alla programmazione, mi sono inserita subito dopo l'intera trattazione della circonferenza. Sapendo di avere a disposizione tre ore di lezione, ho impostato il mio intervento secondo questo schema:

I ora	geometria euclidea: assiomi e postulati V postulato e sua evidenza tentativi di dimostrazione nuove teorie: le geometrie non euclidee
II ora	le geometrie non euclidee: geometria ellittica e geometria iperbolica modello di Riemann modello di Klein
III ora	geometria e spazio fisico conclusioni

Se a grandi linee le mie lezioni si sono svolte seguendo lo schema sopra riportato, in realtà in alcuni punti mi sono lasciata guidare dalle domande e dagli interventi degli studenti che sono stati frequenti. Fin dall'inizio ho cercato di coinvolgerli ed essi hanno risposto positivamente mostrandosi interessati e incuriositi (ho potuto constatare che anche chi inizialmente mi era parso distratto, in realtà ha preso appunti e grazie ad essi all'inizio della II ora, ad esempio, è stato in grado di riassumere insieme agli altri quanto visto durante la prima lezione). L'idea di introdurre la pseudosfera di Beltrami, come si vedrà, è nata proprio da una difficoltà che ho potuto riscontrare nei ragazzi grazie ad alcuni loro interventi.

Sempre a partire dalla domanda di uno studente abbiamo visto come nel modello di Riemann esistono rette perpendicolari. Infine, le considerazioni fatte sulla somma degli angoli interni di un triangolo nelle diverse geometrie inizialmente non erano previste; ho pensato però che potesse essere interessante per loro notare alcune differenze nelle diverse geometrie. Il fatto che la somma degli angoli interni di un triangolo misuri 180° deriva proprio dal V postulato; abbiamo così visto un esempio concreto di come può cambiare una teoria cambiando i postulati di partenza.

Generalmente ho risposto subito alle diverse domande degli studenti, ma ciò non è avvenuto per una domanda che mi sono sentita rivolgere spesso in diversi modi durante le lezioni: ″sono vere queste geometrie?″. Non ho disatteso questa loro curiosità, ma ho voluto comunque lasciare alla fine le considerazioni sulla verità delle geometrie non euclidee preoccupandomi innanzitutto di mostrare la loro coerenza. Anche nella storia è accaduto che i matematici si interrogassero sulla verità delle teorie nate dalla negazione del V postulato, ma non potendo inizialmente rispondere a questo quesito, si sono preoccupati di verificare se almeno queste teorie non fossero contraddittorie e avessero una loro validità matematica. ″Con le geometrie non euclidee si è visto un esempio di come la matematica abbia spesso studiato ed elaborato alcuni concetti o teorie ritenuti, in principio, astratti, e che nei periodi storici successivi hanno trovato utili o addirittura indispensabili applicazioni in settori diversi delle conoscenze umane; anzi è possibile affermare che al progresso delle conoscenze ha notevolmente contribuito il lavoro di matematici che mai avrebbero immaginato le possibili applicazioni della loro teoria″[2]. Se le geometrie non euclidee non presentavano alcun interesse per la fisica dei tempi in cui sorsero, ciò non è così oggi che sono utilizzate per descrivere alcuni fenomeni fisici e nello studio delle proprietà gravitazionali dello spazio nell'ambito della teoria generale della relatività di Einstein, che anzi affonda le sue radici proprio nella nascita delle geometrie non euclidee.

La trattazione di questo argomento può offrire una visione non consueta della matematica, può aiutare a rendere gli studenti consapevoli che la verità non è sempre quella che appare e, nonostante si basi su riflessioni astratte e possa quindi creare difficoltà di comprensione, ″può costituire un'esperienza molto stimolante proprio perché nell'adolescenza l'essere umano è maggiormente portato alla riflessione e tende a mettere in discussione tutto ciò che è determinato e imposto dall'esterno″[3].

Attraverso un approccio storico ho cercato anche di trasmettere agli studenti che la matematica ha avuto e ha tuttora una sua storia e un suo sviluppo; non è una scienza data e immutabile. Come dice A.M. Cappelletti ″purtroppo quando si insegna matematica [...] non c'è tempo, non c'è voglia, talvolta non c'è preparazione culturale, per dedicare attenzione alla storia del suo sviluppo. Si finisce, senza dirlo esplicitamente, con il far credere che la matematica sia stata fatta trovare all'uomo, non si comprende da chi, tutta confezionata, pronta: un perfetto strumento al quale si possono apportare solo banali perfezionamenti ma

---

[2] Cfr. F. Fontana & C. Rovelli

[3] Progetto Docente - Percorso didattico sulle geometrie non euclidee, realizzato dalle professoresse Astone Maria Rosa, Thiella Catterina Silene e Tonizzo Raffaella, www.atuttascuola.it

non radicali modifiche″[4]. Le geometrie non euclidee sono un esempio di come questo non sia vero.

Metodologie e strumenti

Avendo a che fare con una seconda e trattando un argomento generalmente non inserito nella programmazione del biennio, non ho voluto fornire agli studenti una trattazione formale dell'argomento. Nell'idea di una didattica di tipo elicoidale ho solo cercato di introdurre l'argomento nel modo più semplice possibile, sapendo che comunque verrà ripreso e affrontato largamente in quinta (come ho potuto notare dal testo di una verifica[5]).

Ho cercato di fare in modo che le lezioni fossero il più possibile dialogate con gli studenti. All'inizio di ogni lezioni facevo riassumere loro i ″concetti fondamentali″ esposti la volta precedente, guidandoli con domande per favorire la comprensione e la riorganizzazione degli argomenti presentati; lo stesso facevo durante la spiegazione (soprattutto nell'introdurre i modelli ho fatto in modo che fossero loro a verificare i postulati delle diverse geometrie).

Nella presentazione del modello di Riemann ho utilizzato alcune sferette di plastica con l'aiuto delle quali è stato più facile verificare gli assiomi della geometria ellittica; e per le considerazioni finali sulla geometria e lo spazio fisico mi sono avvalsa di alcune immagini tratte dal libro *Zero, La storia di un'idea pericolosa* di Charles Seife (Bollati Boringhieri, 2002).

Ho, infine, fornito agli studenti appunti del percorso didattico seguito.

Svolgimento delle lezioni

Ho cominciato la prima lezione del mio lavoro di tirocinio attivo ripercorrendo insieme ai ragazzi quanto da loro già acquisito sulla geometria euclidea. In particolare ho posto l'attenzione sull'opera di Euclide (330-275 circa a.C.), *Elementi* (300 a.C.), in cui egli organizzò tutto il sapere matematico del tempo e diede una sistemazione teorica della geometria in forma deduttiva a partire da:

- i **termini** o *definizioni*: descrizioni che precisano il significato degli enti geometrici fondamentali;
- i **postulati**: proposizioni primitive che si riferiscono agli enti geometrici prima definiti;
- le **nozioni comuni** o *assiomi*: proprietà logiche valide non solo per la geometria.

[4] Cfr. A.M. Cappelletti
[5] Vedi allegato 2

Per Euclide, assiomi e postulati sono affermazioni la cui verità è garantita dall'*evidenza* intuitiva, senza che sia necessaria alcuna dimostrazione. Ogni altra affermazione (**proposizioni** o *teoremi*) è invece ricavata a partire da queste attraverso un procedimento di dimostrazione.

La geometria euclidea è fondata su 5 postulati e 5 nozioni comuni:

I postulati di Euclide

Risulti postulato che:

I. si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto;
II. che ogni retta terminata si possa prolungare continuamente per diritto;
III. si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni raggio;
IV. tutti gli angoli retti siano uguali tra loro;
V. se una retta, venendo a cadere su due rette, forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette, prolungate illimitatamente, si incontreranno dalla parte in cui sono gli angoli minori di due retti.

Le nozioni comuni

I. Cose uguali ad una stessa cosa sono uguali tra loro
II. Se cose uguali sono aggiunte a cose uguali, le somme sono uguali
III. Se da cose uguali sono sottratte cose uguali, le differenze sono uguali
IV. Cose che coincidono fra loro sono uguali
V. Il tutto è maggiore della parte

A partire da queste dieci semplici proposizioni Euclide 'costruisce' l'intera geometria in maniera deduttiva attraverso dimostrazioni, in ognuna delle quali vengono considerati veri solamente i postulati e le proposizioni già precedentemente dimostrate.

Ho fatto notare agli studenti che oggi non si fa più alcuna distinzione tra assiomi e postulati e gli assiomi che loro conoscono sono di più e leggermente diversi perché Hilbert, nella sua opera *Fondamenti della geometria* (1899), ha riorganizzato la geometria euclidea colmando gli *Elementi* di Euclide di tutti quei postulati non espressi esplicitamente e sistemandone le lacune. Gli assiomi che loro hanno studiato sono dovuti a questo riassetto generale della geometria, operato da Hilbert appunto, ed è proprio agli assiomi di Hilbert che mi sono rifatta nella lezione successiva per mostrare la coerenza dei modelli di geometria non euclidea.

Il **V postulato di Euclide** era conosciuto dagli studenti come **postulato della parallela** nella forma:

V. Fissati nel piano un punto P ed una retta r, non passante per P, esiste ed è unica la retta s passante per P e parallela alla retta prefissata r;

ho cercato, quindi, di fornire loro un'idea intuitiva di come le due forme del V postulato siano in realtà equivalenti.

Ho fatto, poi, notare loro come in realtà il V postulato non ha le stesse caratteristiche di *evidenza* degli altri quattro perché rimanda a una proprietà che si verifica all'infinito. Lo stesso Euclide probabilmente nutriva qualche dubbio riguardo a questo postulato perché le prime 28 proposizioni del I libro degli *Elementi* sono dimostrate senza il suo utilizzo.

Non essendo così evidente come gli altri, per oltre duemila anni molti matematici hanno cercato di 'eliminarlo' in diversi modi:

- sostituendolo con altri postulati che fossero più evidenti;
- modificando la definizione di rette parallele, in modo da far apparire ovvia l'esistenza di una sola retta, passante per un punto, parallela alla retta data;
- dimostrandolo a partire dagli altri quattro postulati, in modo da farlo diventare un teorema.

Ho accennato loro qualcuno dei tentativi di dimostrazione citando in particolare G. Saccheri (1667-1733) che tentò di dimostrare il V postulato ragionando per assurdo: egli negò il V postulato e cercò di raggiungere una contraddizione.

In realtà non riuscì a dedurre una vera e propria contraddizione, ma non accettò comunque l'idea che il quinto postulato non fosse 'vero'; aprì, però, la strada alle geometrie non euclidee: non riuscendo a dimostrare il postulato della parallela, agli inizi del 1800 si cominciò a pensare che fosse indipendente dagli altri quattro e si cercò di dimostrarlo mostrando la coerenza delle nuove teorie nate dalla negazione del V postulato.

Il postulato della parallela può essere negato in relazione all'esistenza della parallela ad una retta fissata passante per un punto non appartenente ad essa, oppure in relazione alla sua unicità; ho presentato loro le geometrie non euclidee come quelle geometrie che non accettano il V postulato e propongono al suo posto una della due negazioni:

Postulato V_1: fissati nel piano un punto P ed una retta r, non passante per P, non esiste alcuna retta s passante per P e parallela alla retta prefissata r

Postulato V_2: fissati nel piano un punto P ed una retta r, non passante per P, esistono almeno due rette s e s' passanti per P e parallele alla retta prefissata r

Dopo aver presentato la prima di queste due 'versioni' del V postulato un ragazzo mi ha chiesto: "Ma hanno dimostrato che è così?". Mi sono così resa conto di aver introdotto le geometrie non euclidee troppo in fretta e ho preso spunto dalla domanda per ribadire e

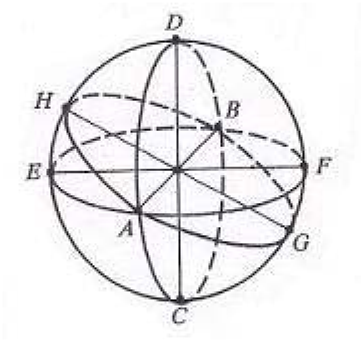
chiarire loro la differenza tra postulati e teoremi e come a partire dai primi si può costruire una teoria attraverso dimostrazioni.
L'utilizzo del postulato V_1 origina la geometria *ellittica* dovuta a Riemann (1826-1866); mentre la geometria *iperbolica*, dovuta a diversi matematici quali Bolyai (1802-1860) Lobacevskij (1793-1856) e Gauss (1777-1855), prevede l'utilizzo del postulato V_2.
Prima ancora di verificare se queste geometrie fossero 'vere' o meno, i matematici dell'epoca si preoccuparono di mostrare la loro coerenza cercando di trovare dei modelli, ovvero degli insiemi 'concreti' di oggetti geometrici che verifichino gli assiomi di partenza scelti.
E' di questo che mi sono occupata nella seconda ora di lezione, dopo aver chiesto ai ragazzi di riassumere quanto visto la volta precedente. Ho fatto notare loro come un modello per la geometria euclidea è ad esempio quello che conoscono fin dalle medie costituito dai punti, le rette e i piani che siamo abituati a considerare normalmente: questi enti primitivi costituiscono un modello per la geometria euclidea perché soddisfano tutti i postulati di Euclide (e di conseguenza anche tutti i teoremi della geometria, che sono dimostrati a partire da questi).
Prima di presentare dei modelli di geometria non euclidea, ho fatto un accenno al teorema di Beltrami (1835-1900) il quale afferma che se la geometria euclidea è non contraddittoria, allora lo è anche quella iperbolica.

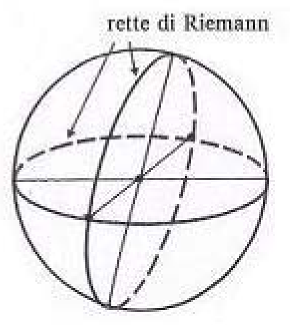
La geometria ellittica di Riemann

La *geometria ellittica* o riemanniana si ottiene considerando il postulato V_1 al posto del V postulato. Per la geometria ellittica ho presentato ai ragazzi il modello fornito dallo stesso Riemann; egli considerò come enti primitivi:

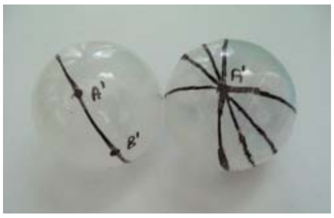
- *piano di Riemann*: una qualunque superficie sferica
- *punto di Riemann*: una qualunque coppia di punti diametralmente opposti sulla superficie sferica
- *retta di Riemann*: una qualsiasi circonferenza massima sulla superficie della sfera

$P' \equiv (A,B)$
$P'' \equiv (C,D)$
$P''' \equiv (E,F)$
$P'''' \equiv (G,H)$





Ho cercato di vedere insieme a loro come questi enti soddisfino gli assiomi della geometria con l'ausilio di alcune sferette su cui abbiamo potuto disegnare punti e rette di Riemann. In particolare abbiamo visto come per un punto passino infinite rette e per due punti passi una sola retta e abbiamo verificato il postulato V_1 (due circonferenze massime qualsiasi su una superficie sferica si intersecano sempre in due punti diametralmente opposti, ossia in un *punto di Riemann*; allora non esistono *rette di Riemann* parallele).



Avendo visto che non esistono rette parallele, qualcuno si è chiesto se esistevano rette perpendicolari. Sapendo che, su una sfera, l'angolo tra due circonferenze massime è l'angolo formato dai due piani che le contengono, insieme abbiamo verificato che la perpendicolare ad una retta per un punto esiste sempre (in alcuni casi ne esistono infinite).

Abbiamo così visto come la geometria ellittica sia coerente e quindi valida al pari della geometria euclidea.

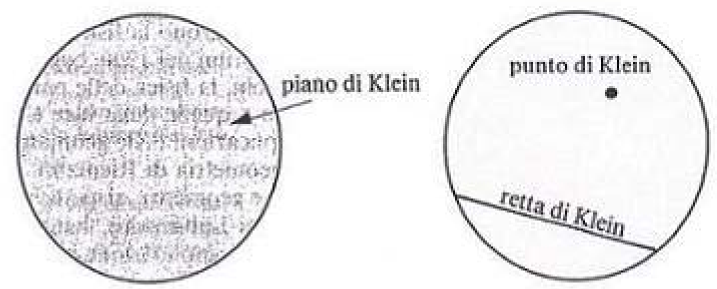
Dopo aver presentato questo modello facendo molti riferimenti alla Terra immaginata come una sfera, cosa che ha aiutato molto i ragazzi nella visualizzazione, uno studente mi ha chiesto: ″Per la geometria ellittica un modello è la sfera; ma per la geometria iperbolica?″. Mi sono resa conto che il modello di Klein per la geometria iperbolica non sarebbe stato così 'intuitivo' come quello presentato per la geometria ellittica e ho deciso di introdurlo precisando che un modello non deve necessariamente descrivere la realtà (a partire da alcuni assiomi di geometria euclidea, ad esempio, è possibile elaborare modelli diversi da quello che conosciamo, considerando come enti fondamentali oggetti differenti dal punto, la retta e il piano che siamo abituati a considerare[6]).

6 In questo senso si potrebbe pensare ad un modo alternativo di introdurre la geometria euclidea rispetto all'impostazione tradizionale (vedi appendice).
L'argomento può, comunque, essere approfondito in quinta con lo studio dell'assiomatica moderna unito a una riflessione filosofica sui fondamenti della matematica.

La geometria iperbolica di Bolyai-Lobacevskij

La *geometria iperbolica* si ottiene considerando il postulato V_2 al posto del V postulato. Il modello fornitone da Klein considera come enti primitivi:

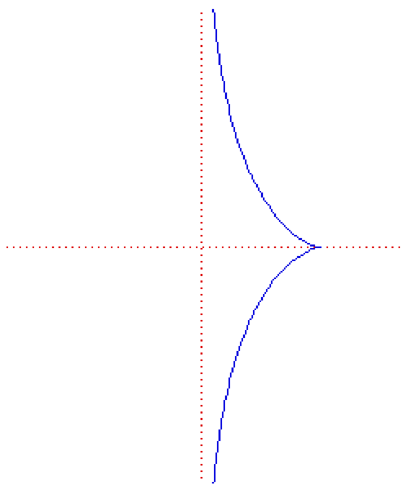
- *piano di Klein*: la superficie interna a un qualunque cerchio
- *punto di Klein*: un qualsiasi punto interno al cerchio
- *retta di Klein*: una qualsiasi corda della circonferenza



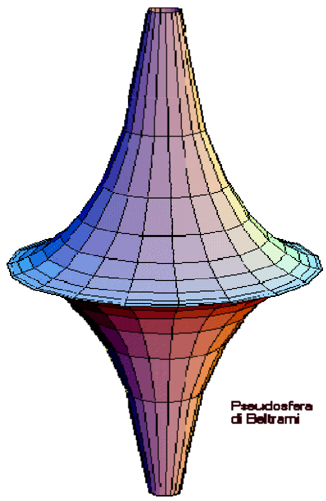
Anche per questo modello abbiamo verificato alcuni assiomi e il postulato V_2 (data una corda e un punto interno al cerchio non appartenente ad essa, esistono almeno due corde passanti per il punto che non intersecano la corda di partenza).
Abbiamo così visto come anche la geometria iperbolica sia coerente e quindi valida al pari della geometria euclidea.

Nel presentare questo modello, grazie anche ad alcune considerazioni dei ragazzi che non ricordo con precisione, ho colto l'occasione per osservare che i modelli di geometria non euclidea sono 'costruiti' utilizzando oggetti della geometria euclidea; questo permette di intuire il teorema di Beltrami (trovare una contraddizione nella geometria iperbolica, ovvero in un suo modello, significa aver trovato una qualche contraddizione anche nella geometria euclidea con l'aiuto della quale il modello è stato 'costruito').

I ragazzi hanno notato subito la differenza tra i due modelli presentati e, come previsto, hanno trovato qualche difficoltà nel secondo perché meno visualizzabile rispetto alla sfera di Riemann (mentre non hanno avuto difficoltà nel verificare gli assiomi perché avevano appena studiato la circonferenza). Ho pensato, allora, di fare un accenno alla pseudosfera di Beltrami, un modello un po' più complesso che non rappresenta globalmente una geometria iperbolica, ma che resta più visualizzabile; l'ho introdotta come solido di rotazione intorno ad una particolare curva detta *trattrice* e ho mostrato loro alcune immagini senza entrare nei dettagli:



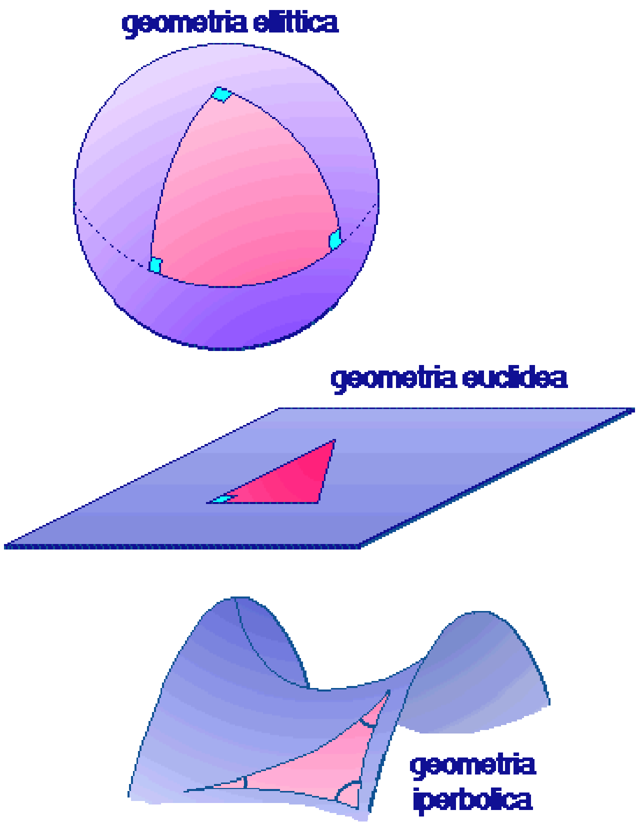
Trattrice



Pseudosfera di Beltrami

Nella terza ora di lezione, prima di rispondere alla domanda: "Sono vere queste geometrie?" ho pensato che potevano essere interessanti per i ragazzi alcune considerazioni sulla somma degli angoli interni di un triangolo.

Gli studenti sanno che la proprietà dei triangoli di avere la somma degli angoli interni pari a 180° discende dal postulato della parallela (abbiamo rivisto insieme la dimostrazione). Cosa succede allora nel caso delle geometrie non euclidee dove il V postulato non vale? Ho mostrato loro con degli esempi come in generale la somma degli angoli interni di un triangolo in geometria ellittica è maggiore di un angolo piatto, mentre in geometria iperbolica risulta essere minore.



La somma è variabile e dipende dalla grandezza del triangolo: quanto più il triangolo è grande, tanto più la somma dei suoi angoli si 'allontana' da 180° (per eccesso o per difetto). Per triangoli piccoli la differenza è talmente piccola da diventare trascurabile (nel caso della geometria ellittica ho fatto l'esempio di un triangolo disegnato per terra: esso si trova sulla superficie terrestre che può essere vista come una sfera, ma è talmente piccolo rispetto alla Terra che la somma degli angoli interni risulta di 180°).
Questo ha dato loro un'idea di come le geometrie non euclidee possono essere considerate una generalizzazione della geometria euclidea, vista come caso limite.

Durante il riassunto di quanto visto fin qui qualcuno si è domandato: ″Ma chi glielo ha fatto fare a questi? Cos'è, si sono svegliati un giorno e ...?″. Nel rispondere a questa domanda ho ricordato loro come le geometrie non euclidee siano in realtà il frutto di molti studi; non è che un matematico a un certo punto si è detto: ″Oggi invento la geometria non euclidea″, anzi lo stesso Lobacevskij era vissuto nel dubbio se la sua teoria fosse vera o quanto meno coerente e utile.

Nel concludere la mie lezioni mi sono preoccupata, infine, di rispondere alla domanda: sono vere le geometrie non euclidee? E' capitato più di una volta durante le prime due ore di lezione che qualche ragazzo si chiedesse se queste geometrie fossero vere o meno, se esistessero o meno in fisica degli spazi in cui valgono i postulati della geometria ellittica o di quella iperbolica.
Ho spiegato loro che per molti secoli si è ritenuto che la geometria di Euclide fosse l'unica adatta a descrivere il mondo che ci circonda; su di essa Galileo e Newton fondarono la fisica classica. La geometria euclidea era considerata l'unica vera geometria ed è per questo che le geometrie non euclidee incontrarono una forte resistenza: l'idea era quella che lo spazio reale fosse euclideo e quindi non era possibile ammettere altre geometrie all'infuori di questa (alcuni matematici ebbero paura di pubblicare i loro studi e i loro risultati nel campo delle geometrie non euclidee proprio nel timore di forti critiche).
Lo stretto legame tra geometria euclidea e spazio fisico venne meno agli inizi del 1900 con la teoria della relatività generale di Einstein (1879-1955); essa è basata sull'ipotesi che i corpi materiali producano una distorsione dello spazio circostante modificandone la geometria: ho detto loro di immaginare l'universo come un foglio di gomma su cui siano appoggiati i corpi celesti; più un corpo ha massa, più il foglio si incurverà deformando lo spazio e creando delle zone in cui la geometria non è più quella euclidea.

Successivamente ho mostrato e commentato loro le seguenti immagini[7]:

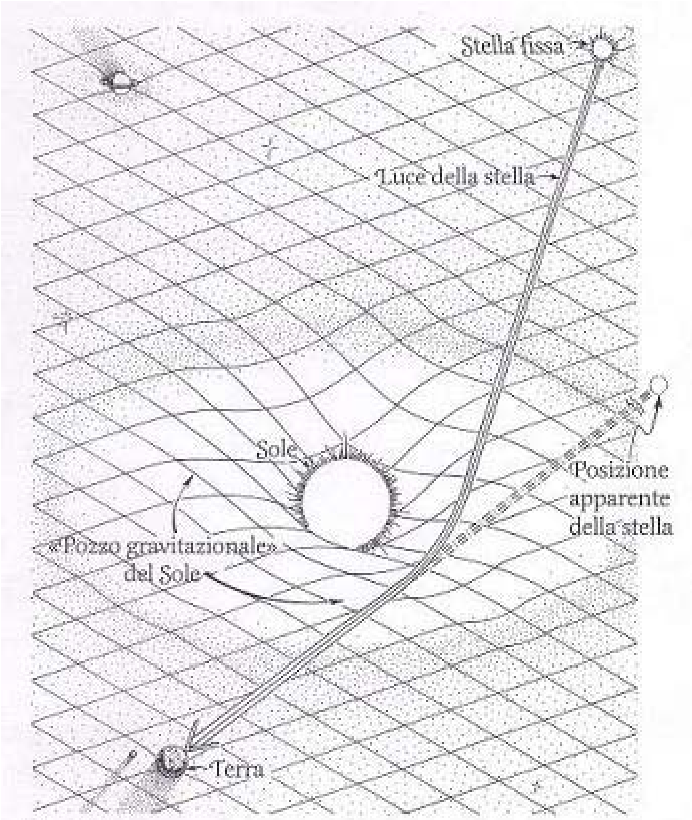


Figura 7.7
La gravità devia i raggi luminosi che transitano vicino al Sole.

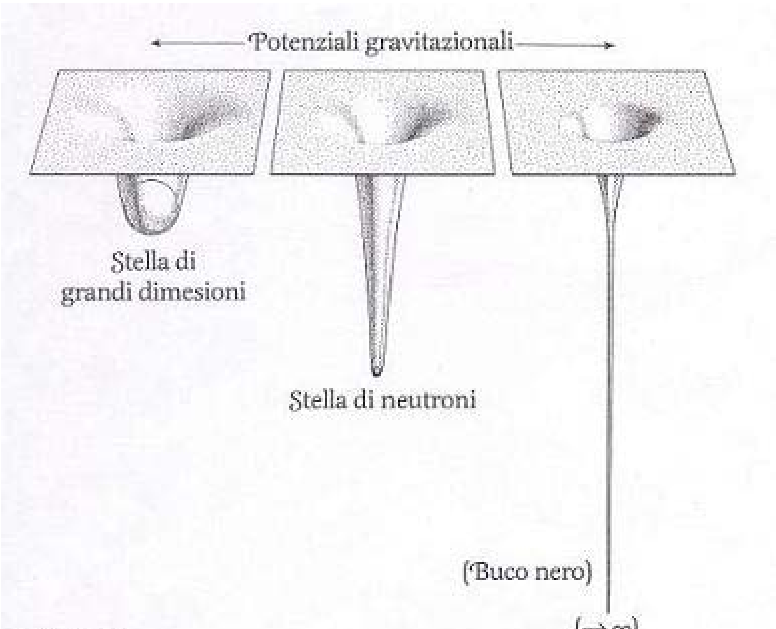


Figura 7.8
A differenza delle stelle normali, un buco nero perfora lo spazio-tempo.

[7] Le immagini sono tratte dal libro di C. Seife, *Zero. La storia di un'idea pericolosa*, Bollati Boringhieri, 2002

La teoria di Einstein affonda le sue radici nella nascita delle geometrie non euclidee ed è grazie ad essa che tali geometrie trovarono una loro applicazione.
Le tre geometrie hanno, quindi, ciascuna una loro validità e possibilità di applicazione in situazioni concrete del campo scientifico.

Verifica

Al termine delle mie lezioni per la classe era già stata programmata dall'insegnante accogliente una verifica su altri contenuti; affinché gli studenti potessero avere un riscontro di quanto fatto con me, sono state inserite quattro domande sulle geometrie non euclidee[8] alle quali i ragazzi sono stati invitati a rispondere utilizzando un foglio a parte, perché anche io potessi avere una riscontro sul mio lavoro.
Nonostante il poco tempo a disposizione (i ragazzi si sono occupati primariamente del resto della verifica), gli studenti in generale hanno risposto con correttezza alle domande eccetto in alcuni casi in cui ho riscontrato delle incertezze.
Gli esiti migliori si sono evidenziati nei compiti degli studenti più bravi che, essendo stati più veloci nello svolgere i vari esercizi della verifica, hanno avuto più tempo a disposizione per elaborare la parte sulle geometrie non euclidee; essi non si sono limitati a dare risposte sintetiche, ma le hanno sviluppate con argomentazioni corrette, evidenziando la comprensione di quanto svolto in classe. Soprattutto dalle risposte date alla domanda 2 (come sono nate le geometrie non euclidee?), ho potuto avere conferma dell'attenzione e dell'interesse suscitato dall'argomento.

[8] Vedi allegato 1

RIFLESSIONI

Subito dopo la conclusione del mio tirocinio attivo ho avuto un interessante scambio di opinioni con l'insegnante accogliente, da cui è emersa la validità dell'esperienza, utile per i ragazzi sia per l'anno scolastico in corso sia in vista della classe quinta, in cui tratteranno le geometrie non euclidee con la professoressa del triennio.

Certamente questo non è un lavoro proponibile in una qualsiasi seconda di un liceo scientifico; questa classe si era rivelata particolarmente adatta per l'interesse, l'impegno e la curiosità dimostrati da gran parte degli studenti[9]. Ciò non ha impedito di riscontrare comunque problemi dovuti soprattutto alle riflessioni astratte su cui si basa l'argomento, alla difficoltà con cui si presta ad essere visualizzato e a una trattazione forse un po' veloce: avendo a disposizione più ore di lezione si potrebbe insistere maggiormente su alcuni aspetti, anche per dare agli studenti la possibilità e il tempo di assimilare i concetti. Essi, comunque, hanno avuto modo di farsi un'idea sulle geometrie non euclidee e hanno apprezzato soprattutto i tentativi di renderle il più visualizzabili possibile attraverso immagini e disegni.

L'esperienza si è, poi, rivelata interessante per me, non solo per la relazione instaurata con i ragazzi, ma anche perché ho avuto modo di sperimentare quanto sia importante coinvolgere e stimolare l'intera classe e quanto sia più facile, invece, interagire solo con chi interviene più spesso ed è capace di farsi 'sentire'. Come appreso anche nei corsi di Scienze dell'Educazione, mi sono resa conto di persona di come spesso un insegnante è portato a dimostrare maggiore attenzione nei confronti degli allievi che considera migliori; il 'contatto oculare'[10] deve essere, invece, frequente con tutti gli studenti affinché anche i più timidi e i meno bravi possano sperimentare fiducia e stima nei loro confronti.

[9] Parlando con l'insegnante accogliente quando ancora il tirocinio attivo era in fase di progettazione, era stata lei a propormi questa classe per un eventuale lavoro di questo tipo, facendomi notare quanto i ragazzi fossero 'svegli'

[10] Espressione utilizzata nei corsi di Scienze dell'Educazione a proposito dello sguardo con cui un insegnante può e deve far sentire ogni allievo al centro dell'attenzione

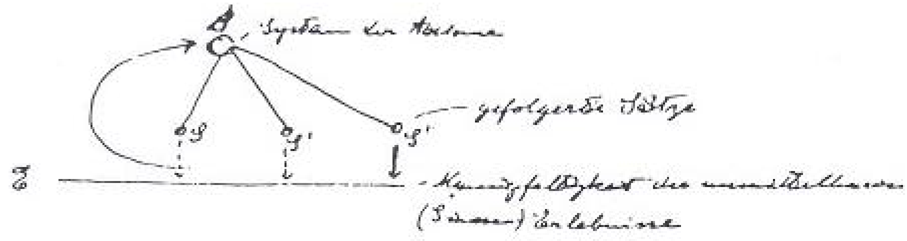
EINSTEIN: UN MODELLO DEL PENSIERO SCIENTIFICO

Al termine delle lezioni uno studente si è avvicinato per chiedermi: ″E' vero che Einstein aveva 2 in matematica?″; al di là della risposta la domanda riassume bene la generale curiosità dei ragazzi per questo grande scienziato, a cui ho accennato in conclusione delle mie lezioni. Ciò mi ha stimolato ad approfondire la sua conoscenza e in particolare il modo in cui egli sia arrivato a formulare le sue teorie. Discutendo di questa esigenza con il docente supervisore ci siamo imbattuti in un interessante documento contenuto nell'articolo degli atti di un seminario; lo schema del modello di pensiero scientifico di Einstein in esso riportato ci ha dato lo spunto per approfondire la questione: ″come nasce una teoria scientifica?″.

Einstein era profondamente consapevole della necessità di una riflessione filosofica unita alla pratica scientifica, non solo per la rilevanza delle discussioni sulle basi, gli obiettivi e i metodi della scienza che egli ebbe modo di sperimentare, ma anche perché, secondo lui, uno scienziato è necessariamente portato a considerazioni epistemologiche: ″il fisico non può semplicemente lasciare al filosofo la considerazione critica delle basi teoriche; poiché egli stesso sa meglio e sente con maggiore sicurezza dov'è il punto dolente″[11].

In particolare Einstein sentiva la necessità di un modello del pensiero scientifico; egli ne presenta uno, in modo semplice e schematico, in una lettera del 1952 all'amico Maurice Solvine, in cui scrive[12]:

«Io vedo schematicamente la cosa in questo modo:



(1) Ci sono date le E (esperienze)

(2) A sono gli assiomi, dai quali traiamo conclusioni.

Da un punto di vista psicologico le A poggiano sulle E. Non c'è comunque una via logica che conduce dalle E alle A, ma solo una connessione intuitiva (psicologica), e sempre ″sino a nuovo ordine″.

[11] A. Einstein, *Ideas and Opinions*, tradotto e curato da S. Bargmann, New York, Dell, 1954

[12] Quella riportata è una traduzione, tratta da *Einstein e la cultura scientifica del XX secolo*, cfr. G. Holton; lo schema è, invece, una copia di quello disegnato dallo stesso Einstein nella lettera in questione

(3) Dalle A, per via logica, si deducono particolari enunciati S - deduzioni che possono pretendere di essere vere.
(4) Le S sono poste in relazione con le E (confronto con l'esperienza).
A un'attenta considerazione, questa procedura appartiene pure alla sfera extra-logica (intuitiva), poiché le relazioni tra i concetti che compaiono in S e le esperienze E non sono di natura logica. Questa relazione tra le S e le E è, tuttavia (pragmaticamente), molto meno incerta della relazione tra le A e le E. Se tale corrispondenza non si potesse raggiungere con grande certezza (anche se non è logicamente dominabile), gli strumenti logici sarebbero del tutto privi di valore ai fini della ″comprensione della realtà″.»
La conoscenza scientifica, dunque, parte dall'esperienza e termina in essa.
La linea orizzontale E rappresenta la «molteplicità (o varietà) di immediate esperienze sensibili» e può essere pensata come un piano su cui giacciono, in maniera caotica, esperienze e osservazioni (che non sono 'pure', ma dipendono comunque da una teoria osservativa).
″La varietà caotica di «fatti» può essere dominata costruendo su di essa una struttura teorica che miri a stabilire relazioni e ordine″[13]; e secondo Einstein ″la scienza è″ proprio ″il tentativo di rendere la varietà caotica della nostra esperienza sensibile corrispondente a un sistema di pensiero logicamente uniforme″[14].
Questo avviene con il passaggio all'insieme A degli assiomi, indicato nello schema da una freccia curva; essa è staccata dalla linea E perché non esiste un metodo logico che porti dalle E alle A: ″tutti i concetti, anche quelli più vicini all'esperienza sono, dal punto di vista logico, convenzioni liberamente scelte″[15]. C'è, dunque, una certa arbitrarietà nella scelta degli assiomi; essi possono derivare da un'intuizione, una supposizione, una congettura o un sospetto, comunque suggeriti dall'esperienza (″non esiste nessun filo logico che porti a queste leggi; soltanto l'intuizione, basata sulla comprensione congeniale dell'esperienza, è in grado di coglierle. [...] in pratica, il mondo empirico determina in modo univoco il sistema teorico, benché non esista nessun ponte logico tra i fenomeni e i loro principi″[16]). A partire da ciò che suggerisce l'esperienza lo scienziato formula nuovi concetti (frutto a volte di diversi tentativi e non improvvisati), nella consapevolezza che essi non sono immutabili, ma dati ″sino a nuovo ordine″.

[13] Cfr. G. Holton
[14] A. Einstein, *Ideas and Opinions*, tradotto e curato da S. Bargmann, New York, Dell, 1954
[15] A. Einstein, *Note autobiografiche*, in *Albert Einstein, scienziato e filosofo*, Torino, Boringhieri, 1958
[16] A. Einstein, *Comment je vois le monde*, Flammarion, 1934

Einstein vede la formazione del sistema di assiomi come una ″libera invenzione dell'intelletto umano″[17]; questo non significa che egli esalti l'intuizione a discapito della ragione, ma secondo lui a volte bisogna avere il coraggio di azzardare congetture ed elevarle a postulati, mettendo magari anche in discussione cose elementari, così come egli fece per la teoria della relatività: egli assunse come assioma il fatto che la luce si propaga con la stessa velocità in qualunque sistema di riferimento, sconvolgendo alcune basi ormai consolidate (un'alternativa era quella di rivedere e riformulare le teorie già conosciute per far rientrare questo concetto, ma ciò avrebbe allontanato Einstein dalla teoria universale che stava cercando).

Una volta formulati gli assiomi, da essi si deducono per via logica diverse conseguenze S. E' qui che entra in gioco la ragione, di cui Einstein evidenzia l'importanza nella costruzione di una teoria; ″se egli argomenta per riconoscere la necessaria componente intuitiva nella formulazione delle ipotesi fondamentali a livello di A, continua poi dicendo che «la struttura del sistema è opera della ragione»″[18].

Vi è, infine, il confronto delle S con l'esperienza: è su questo che si misura la validità o meno di una teoria, anche se essa non potrà mai avere una conferma definitiva (″l'esperienza può decidere sulla falsità di una teoria, non sulla verità″[19]). Una teoria può avere, infatti, conferme parziali dall'esperienza che fanno aumentare la fiducia nei confronti della sua validità, ma niente garantisce che in futuro non possano sorgere dei problemi. Come scrive Einstein nella stessa lettera «il nocciolo della questione è» proprio «la connessione eternamente problematica tra il mondo delle idee e quello dell'esperienza (le esperienze sensoriali)» (questa connessione problematica è indicata nello schema con linee tratteggiate che portano dalle S alle E).

In sintesi: ″l'esperienza è l'alfa e l'omega di tutto il nostro sapere intorno alla realtà [...] abbiamo assegnato alla ragione e all'esperienza il loro posto in un sistema di fisica teorica. La ragione assicura la struttura al sistema; i contenuti empirici e le loro relazioni reciproche, grazie alle proposizioni conseguenti della teoria, devono trovare la loro rappresentazione. Nella possibilità di una tale rappresentazione consiste unicamente il valore e la giustificazione dell'intero sistema e, in particolare, dei concetti e dei principi che ne stanno alla base″[20].

---

[17] A. Einstein, *Note autobiografiche*, in *Albert Einstein, scienziato e filosofo*, Einaudi, 1958
[18] Cfr. G. Holton
[19] J.J. Sanguineti, *Il realismo scientifico - Popper e Einstein a confronto*, in *Il Fare della Scienza* (a cura di F. Barone ed altri), numero del 1997 della rivista Contratto, Il Poligrafo, Padova 1997, pp. 97-122
[20] A. Einstein, *Idee e opinioni*, Ed. Schwartz, 1957

Trattandosi di un modello valido per qualunque teoria scientifica, potremmo vedere questo schema applicato alle teorie sulle geometrie non euclidee. In effetti la formulazione dei postulati della geometria iperbolica ed ellittica non deriva direttamente dall'esperienza, ma piuttosto da un sospetto: non riuscendo a dimostrare il V postulato per assurdo a partire dagli altri, alcuni matematici intuirono che forse era indipendente e quindi negabile senza contraddizioni. Matematicamente queste teorie erano comunque da considerarsi valide perché coerenti e aventi una loro struttura logica a partire da assiomi fissati; esse però hanno poi trovato anche una loro applicazione in situazioni concrete, che le hanno rese in qualche modo 'vere'.

Le geometrie non euclidee non sono l'unico esempio di teorie matematiche che solo successivamente alla loro elaborazione, a volte anche a distanza di secoli, hanno trovato applicazioni in campo scientifico. In molti casi si potrebbe quasi parlare di 'matematica prefabbricata'[21] o addirittura 'predestinata'[22].

″Il calcolo di Ricci usato da Einstein per la teoria della relatività generale è sicuramente un «meraviglioso esempio» di matematica prefabbricata, ma ve ne sono altri: [...] Un esempio particolarmente emblematico di «matematica prefabbricata» è costituito dalla teoria delle sezioni coniche (la circonferenza, l'ellisse, la parabola e l'iperbole che si studiano a scuola) introdotta da Apollonio di Perga nel III secolo a. C. e utilizzata, ben diciotto secoli dopo, da Johannes Kepler per i suoi studi di astronomia.

Nel caso del calcolo tensoriale, tuttavia, si ha davvero la sensazione che ancor più di matematica prefabbricata si possa addirittura parlare di matematica predestinata″[23].

[21] Espressione usata da S. Bochner in *The role of Mathematics in the Rise of Science*, Princeton University Press, Princeton, 1966

[22] Termine utilizzato da F. Toscano, in *Il genio e il gentiluomo* (cfr. F. Toscano), per il calcolo tensoriale di Ricci Curbastro: ″nella relatività generale il calcolo differenziale assoluto trovò finalmente «la sua applicazione naturale», tanto da sembrare [...] «quasi predestinato» all'elaborazione matematica della teoria einsteniana″

[23] Cfr. F. Toscano

APPENDICE

Un modo alternativo di introdurre la geometria euclidea

Negli *Elementi* di Euclide punto, retta e piano vengono definiti in termini descrittivi prima dei postulati ed è così che tradizionalmente viene introdotta la geometria euclidea: si cerca di dare agli studenti un'idea degli enti fondamentali dicendo loro, ad esempio, di immaginare il punto come un segno sottilissimo lasciato su un foglio di carta da una penna, ... e così via; solo successivamente vengono introdotti gli assiomi.

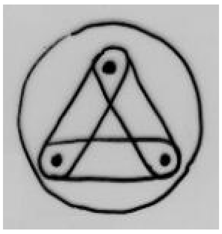
Un modo alternativo di procedere può essere quello di introdurre i tre enti fondamentali alla base del sistema che si intende costruire, senza darne una definizione esplicita (diamo solo loro i nomi di punto, retta e piano); essi saranno definiti implicitamente dal loro comportamento descritto dagli assiomi, i quali stabiliscono le relazioni che devono soddisfare. Questo modo di procedere è attualmente diffuso sui libri di testo scolastici del biennio e riprende l'assiomatizzazione di Hilbert: ″[...] occorre concepire le proposizioni di una teoria come delle proposizioni del tutto 'vuote' ed occorre considerare i nomi degli enti che si presentano come dei puri 'segna-posti', destinati soltanto a distinguere un ente dall'altro e a chiarirne le proprietà attraverso quel procedimento che viene chiamato di 'definizione implicita'. In tal modo la teoria è passibile di applicazione a diversi oggetti concreti, senza specificarne alcuno. [...] in questa impostazione si rinuncia del tutto a precisare la natura delle cose che si prendono in considerazione; o meglio ancora, si rinuncia a precisare tale natura all'inizio del discorso; essa viene precisata, ma non univocamente, dagli assiomi che vengono enunciati e non dai nomi che vengono dati alle cose né da un richiamo alla esperienza ed alla realtà esteriore″[24].

In questo senso ecco a grandi linee un esempio di come si potrebbe procedere nelle classi.
Una volta introdotti i primi tre assiomi di appartenenza[25]:

1. per due punti A, B c'è sempre una retta a che appartiene ad ognuno dei due punti A, B
2. per due punti c'è al massimo una retta che appartiene ad ognuno dei due punti A, B
3. su una retta ci sono sempre almeno due punti; ci sono almeno tre punti che non giacciono su una retta

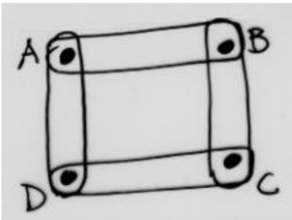
[24] Cfr. D. Hilbert. La parte citata è tratta dall'introduzione di C. F. Manara.
[25] Gli assiomi riportati sono presi dai *Fondamenti della geometria* di Hilbert (cfr. D. Hilbert), in cui vengono chiamati 'assiomi di collegamento' perché ″stabiliscono un collegamento tra gli oggetti sopra introdotti: punti, rette e piani″

l'idea è quella di ragionare insieme ai ragazzi ponendo loro domande riguardo all'idea intuitiva che essi hanno circa gli enti fondamentali definiti implicitamente dagli assiomi e mostrando loro che esistono modelli differenti da quello tradizionale a cui sono abituati, ma che ugualmente soddisfano gli assiomi. Un esempio è dato da:



punti: dischetti
rette: insiemi di due punti
piano: tre punti e tre rette

A questo punto si potrebbero mostrare agli studenti dei modelli chiedendo che siano loro a verificare se e quali assiomi valgono. Nel seguente modello, ad esempio, il primo assioma non è verificato perché i punti A e C non appartengono ad alcuna retta:



Potrebbe essere interessante proporre anche il seguente esercizio, tratto da *Multi Format*[26]:
«Considera il seguente esempio di sistema assiomatico formale:
Termini primitivi: pirotto, carulizzzare
Assiomi:

P1: se A e B sono due pirotti distinti, allora A carulizza B oppure B carulizza A (è esclusa la possibilità che si verifichino entrambi i casi)

P2: nessun pirotto carulizza se stesso

P3: se A, B e C sono pirotti tali che A carulizza B e B carulizza C, allora A carulizza C

P4: vi sono esattamente 4 pirotti

Trova un'interpretazione per i 'pirotti che carulizzano', cioè trova quattro oggetti (i 'pirotti') e una relazione fra essi ('carulizzare') tali che gli assiomi P1, P2, P3, P4 siano proposizioni vere; e dimostra i seguenti teoremi:

T1: Se un pirotto ne carulizza un altro, non è carulizzato da esso.

T2: Se A carulizza B, C è distinto da A e A non carulizza C, allora C carulizza B.

[26] Cfr. W. Maraschini & M. Palma (2)

T3: Esiste almeno un pirotto che carulizza tutti gli altri (esso è chiamato pirotto prepotente).

T4: Esiste uno e un solo pirotto prepotente (che carulizza tutti gli altri).»

L'esercizio (in particolare la prima parte e magari la prima dimostrazione) potrebbe essere svolto in classe insieme all'insegnante o, ancora meglio, lo si potrebbe proporre a gruppi per poi confrontare le diverse interpretazioni dei termini primitivi.

L'obiettivo di questo modo di procedere è quello di aiutare gli allievi a maturare la capacità di astrarre e di ragionare criticamente e di prepararli all'acquisizione del significato di sistema ipotetico-deduttivo.

ALLEGATO 1

Sono riportate di seguito le domande sulle geometrie non euclidee inserite nella verifica svolta in classe dopo le mie lezioni:

1. Cosa sono le geometrie non euclidee?
2. Come sono nate?
3. Quali sono i postulati della geometria iperbolica?
4. Descrivi un modello per la geometria ellittica.

ALLEGATO 2

E' riportato di seguito il testo di una verifica sulle geometrie non euclidee effettuata in una classe quinta (la sezione è la stessa della classe in cui ho svolto il mio tirocinio attivo):

1. In cosa consiste l'originalità della geometria greca?
2. Qual è la differenza tra termini, postulati e assiomi?
3. Cosa si intende per metodo assiomatico-deduttivo?
4. Quali sono le particolarità che rendono il V postulato 'strano' rispetto agli altri?
5. Descrivi le caratteristiche del quadrilatero birettangolo isoscele.
6. Descrivi l'ipotesi dell'angolo retto di Saccheri.
7. Enuncia l'ipotesi dell'angolo ottuso. A quali conclusioni giunge Saccheri?
8. Enuncia l'ipotesi dell'angolo acuto. Come Saccheri confuta questa ipotesi? Giunge effettivamente ad un assurdo logico?
9. Quali sono i postulati della geometria iperbolica?
10. In cosa differiscono tra loro la geometria sferica e la geometria ellittica?
11. Quale modello si può utilizzare per la geometria iperbolica? E per la geometria ellittica? Descrivili.
12. Cosa significa la frase ″ogni geometria è coerente″?
13. Quale geometria è vera?
14. Quale geometria è più adatta a descrivere lo spazio fisico?
15. Indica in quali geometrie (euclidea, iperbolica, sferica, ellittica) valgono i seguenti enunciati:
    a. la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di 2R;
    b. una retta può essere prolungata illimitatamente;
    c. due esagoni che hanno angoli rispettivamente uguali sono congruenti;
    d. le rette sono linee chiuse;
    e. una obliqua e una perpendicolare alla stessa retta si incontrano;
    f. due rette possono racchiudere un'area.

Bibliografia

E. Agazzi, D. Palladino, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Editrice La Scuola, 1998

M. Battelli, *Corso di matematica sperimentale e laboratorio*, Le Monnier

A.M. Cappelletti, *Didattica interculturale della geometria*, EMI, Bologna, 2000

R. Courant & H. Robbins, *Che cos'è la matematica?*, Boringhieri, 1978

N. Dodero, P. Baroncini, R. Manfredi, *Nuovi elementi di matematica*, Ghisetti e Corvi Editori

F. Fontana & C. Rovelli, *Matematica 1, corso di matematica per il biennio della scuola media superiore,* a cura di W.Cavalieri e P. Lattanzio, Arnoldo Mondatori Editore

D. Hilbert, *Fondamenti della geometria, con i supplementi di Paul Bernays*, Feltrinelli, 1970

G. Holton, *Einstein e la cultura scientifica del XX secolo*, Il Mulino, 1991

W. Maraschini & M. Palma, *Format, Spe*, Paravia, 2002

W. Maraschini & M. Palma (2), *Multi Format, moduli per la formazione matematica nel biennio,* 10 *Piano euclideo,* Paravia, 2000

F. Toscano, *Il genio e il gentiluomo. Einstein e il matematico italiano che salvò la teoria della relatività generale*, Sironi Editore, 2005

http://www.atuttascuola.it/matematica/geometria.htm

http://www.matefilia.it/argomen/euclide/sommario.htm

http://users.libero.it/prof.lazzarini/geometria_sulla_sfera/geo.htm

http://www.cronologia.it/cronoein.htm