

Università degli Studi di Pisa

**Scuola di Specializzazione per
l'Insegnamento Secondario**

Indirizzo Fisico-Informatico-Matematico

V CICLO

II ANNO

**Isometrie e similitudini
con i numeri complessi**

Specializzando

Francesco Daddi

Anno Accademico 2004/2005

Indice

Introduzione	pag. 3
Prerequisiti	pag. 3
Obiettivi	pag. 4
Traslazioni	pag. 5
Rotazioni	pag. 6
Rotazioni con centro diverso dall'origine	pag. 8
Composizione di rotazioni	pag. 10
Simmetrie assiali	pag. 12
Simmetrie assiali rispetto a rette non passanti per O	pag. 15
Simmetria rispetto ad una retta dati due punti	pag. 18
Glissoriflessioni	pag. 19
Composizione di simmetrie assiali	pag. 22
Traslazioni come composizione di due simmetrie assiali	pag. 23
Composizione di una rotazione e di una simmetria	pag. 25
Isometrie che fanno corrispondere coppie di punti	pag. 25
Omotetie	pag. 28
Composizione di due omotetie	pag. 30
Rotoomotetie di centro O	pag. 31
Rotomotetie	pag. 33
Similitudini e coppie di punti	pag. 34
Affinità e numeri complessi	pag. 36
Verifica scritta proposta	pag. 38

Introduzione

Proporrei questa unità didattica in una classe quinta liceo scientifico ad indirizzo PNI e la collocherei dopo aver introdotto le trasformazioni geometriche (e mi riferisco alle isometrie e alle similitudini, che solitamente vengono affrontate in quarta), affrontate con l'utilizzo delle matrici, ed i numeri complessi; per quanto riguarda questi ultimi suppongo di aver introdotto l'esponenziale complesso, di cui si farà un largo uso nel seguito.

Ipotizzo inoltre di aver introdotto i numeri complessi senza aver dato troppa importanza all'interpretazione geometrica delle operazioni algebriche (è uno dei miei obiettivi principali da raggiungere), ma solo sulla loro rappresentazione nel piano di Gauss.

Personalmente ritengo molto utile questo argomento perché i ragazzi hanno l'opportunità di constatare come la matematica non sia una disciplina *a compartimenti stagni*, ma anzi sia tutt'altro: è positivo quindi fare più collegamenti possibili tra gli aspetti algebrici da una parte e quelli geometrici dall'altra.

Troppo spesso, infatti, nelle scuole medie superiori i ragazzi non si appassionano alla Matematica e una delle principali cause può essere ricercata nell'assenza (a volte ingiustificata) di collegamenti tra le diverse aree della disciplina. Una presentazione "unificata" avrebbe l'effetto non solo di aiutare gli studenti a comprendere meglio ciò che viene loro presentato, ma stimolerebbe forse anche lo stesso insegnante a cercare legami, connessioni tra più temi per analizzare le relazioni che si stabiliscono fra di essi.

Prerequisiti

Per quanto riguarda le trasformazioni geometriche:

- saper scrivere, mediante l'uso del calcolo vettoriale (utilizzando quindi le matrici), l'equazione di una traslazione, di una rotazione, di una simmetria, di una glissoriflessione, di un'omotetia, di una similitudine;
- saper comporre due generiche trasformazioni affini (e quindi in particolare quelle elencate al punto precedente) con l'uso delle matrici;
- saper scomporre una trasformazione assegnata;
- saper interpretare, da un punto di vista geometrico, i risultati algebrici.

Per quanto riguarda i numeri complessi:

- saper rappresentare un numero complesso in forma algebrica e in forma geometrica;
- conoscere le proprietà dell'esponenziale complesso e saper rappresentare un numero complesso in forma polare ($z = \rho e^{i\varphi}$);

- saper eseguire le operazioni fondamentali con numeri complessi, con particolare riguardo all'esponenziale complesso;
- saper semplificare espressioni algebriche con numeri complessi.

Si noti che non è necessario che i ragazzi sappiano calcolare le radici n -esime di un numero complesso.

Obiettivi

- saper individuare il corrispondente significato geometrico di ogni operazione algebrica fra numeri complessi;
- saper scrivere con i numeri complessi le equazioni di traslazioni, rotazioni, simmetrie assiali, glissoriflessioni, omotetie e rotoomotetie;
- essere in grado di ricavare algebricamente, e di saper interpretare geometricamente, mediante l'uso dei numeri complessi, la composizione di due trasformazioni.

L'obiettivo principale è quello di riflettere sulle proprietà geometriche dei numeri complessi, riesaminando le trasformazioni affini principali (le isometrie e le similitudini), cercando di mettere in luce come le proprietà algebriche trovino "riscontro" proprio in quelle geometriche.

Ovviamente non si tratta di un argomento semplice da esporre in un liceo scientifico, ma credo che la difficoltà sia principalmente nella prima fase, dove i ragazzi troveranno maggiori ostacoli alla comprensione di ciò che viene spiegato.

C'è da prestare molta attenzione al fatto che in questo argomento c'è un continuo passaggio dal lato algebrico a quello geometrico e viceversa; da non sottovalutare inoltre la (inevitabile) confusione che si può creare parlando allo stesso tempo di punti e di numeri complessi; è però interessante mostrare come sia possibile, grazie proprio ad un opportuno utilizzo dei numeri complessi, semplificare molte situazioni geometriche.

Traslazioni

E' conveniente introdurre l'argomento dalle trasformazioni più semplici, ovvero le traslazioni; l'equazione di una traslazione di vettore $(x_0; y_0)$ è

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Fissiamo un numero complesso z_0 , ad esempio $z_0 = 2 + i$; sommiamo questo numero complesso ad alcuni numeri z :

$$(2 + i) + (1 + 3i) = 3 + 4i \quad ; \quad (2 + i) + (3 - 2i) = 5 - i$$

Si fa notare agli studenti che, **confrontando le parti reale e immaginaria rispettivamente con le coordinate x e y** , si ottiene lo stesso risultato sommando i seguenti vettori:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

La somma di due numeri complessi può essere allora interpretata geometricamente (si veda la figura 1) con la regola del parallelogrammo (e questa proprietà dovrebbe già essere loro nota).

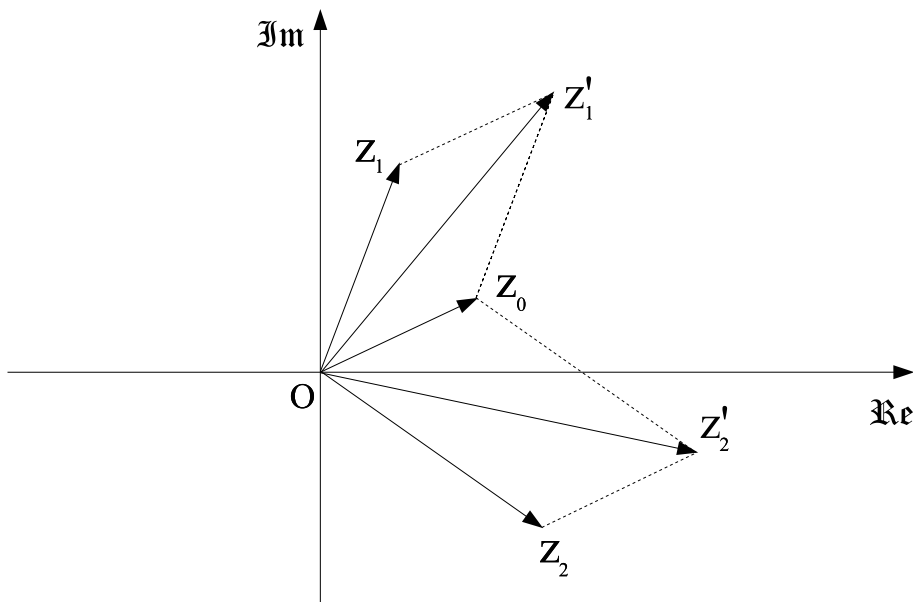


Figura 1: Traslazione nel piano complesso

In definitiva, possiamo riscrivere la (1) con i numeri complessi:

$$z \mapsto z' = z + z_0; \quad (2)$$

in generale, dato il generico numero complesso $z_0 = a + ib$ si ha:

$$x + iy \mapsto x' + iy' = (x + iy) + (a + ib) = (x + a) + i(y + b).$$

Osservazione 1. La trasformazione inversa della (2) ha come equazione

$$z \mapsto z' = z - z_0. \quad (3)$$

Rotazioni

Le traslazioni sono forse troppo "semplici" per poter comprendere bene le idee di fondo ed è allora opportuno continuare lo studio delle trasformazioni, soffermandoci sulle rotazioni.

Consideriamo ora il numero i e moltiplichiamolo per alcuni numeri complessi:

$$(1 + 0i) \cdot i = i; \quad (-1 + i) \cdot i = -1 - i; \quad (-i) \cdot i = 1;$$

analizzando la situazione nel piano complesso si trova (si veda la figura 2) che i numeri complessi vengono ruotati attorno all'origine di un angolo pari a 90° in senso antiorario.

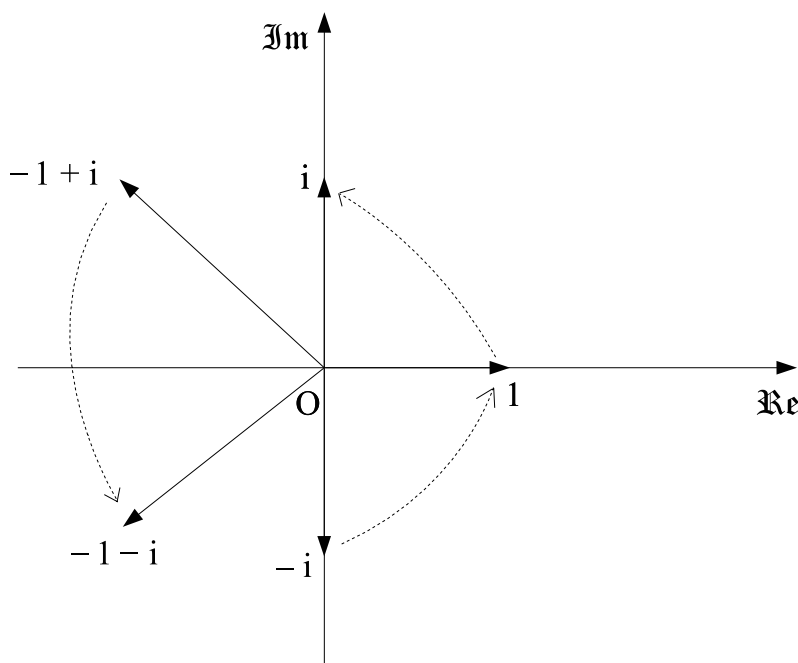


Figura 2: Effetto della moltiplicazione per il numero i

Dopo aver presentato dei casi particolari, studiamo ora la moltiplicazione di un generico numero complesso $z = x + iy$ per i :

$$z \cdot i = (x + iy) \cdot i = -y + ix. \quad (4)$$

Scriviamo ora l'equazione della rotazione con centro l'origine e angolo pari a 90° :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & -\sin(\pi/2) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}; \quad (5)$$

il risultato che si ottiene in questo modo coincide con la (4) perché, come visto per le traslazioni, dobbiamo confrontare le parti reale e immaginaria della (4) con (rispettivamente) la prima e seconda coordinata della (5).

Se ricorriamo ora alla forma trigonometrica di un numero complesso,

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$$

possiamo scrivere i come $e^{i\pi/2}$ e la moltiplicazione $i \cdot z$ risulterà essere uguale a

$$i \cdot z = e^{i\pi/2} \cdot \rho e^{i\theta} = \rho e^{i\pi/2+i\theta} = \rho e^{i(\pi/2+\theta)}$$

da cui deduciamo che il modulo di z non cambia e che la fase viene aumentata di $\pi/2$ rad: tutto ciò corrisponde proprio alla rotazione attorno ad O di 90° in senso antiorario.

A questo punto, anziché moltiplicare per il numero i , moltiplichiamo un generico numero complesso z per un numero complesso z_0 avente norma uguale a 1 ($z_0 = e^{i\theta_0}$):

$$z_0 \cdot z = e^{i\theta_0} \cdot \rho e^{i\theta} = \rho e^{i\theta_0+i\theta} = \rho e^{i(\theta_0+\theta)}. \quad (6)$$

Si nota che l'immagine di z è il numero complesso avente lo stesso modulo di z ma con fase ottenuta aumentando di θ_0 rad la fase di z ; non è difficile capire che si tratta di una rotazione in senso antiorario (sempre attorno all'origine O come nel caso precedente) di angolo θ_0 .

Lo stesso risultato può essere raggiunto considerando la moltiplicazione con le coordinate cartesiane:

$$z \cdot z_0 = (x + iy)(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0) = (\cos \theta_0 x - \sin \theta_0 y) + i(\cos \theta_0 y + \sin \theta_0 x) \quad (7)$$

infatti, se confrontiamo la (7) con l'equazione della rotazione avente centro in O ed angolo pari a θ_0 , si trova che rappresentano la stessa trasformazione:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 x - \sin \theta_0 y \\ \cos \theta_0 y + \sin \theta_0 x \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Osservazione 2. Esiste dunque un'equivalenza tra il moltiplicare per $e^{i\theta_0}$ un numero complesso $z = x + iy$ ed il moltiplicare un vettore $[x; y]$ per la matrice di rotazione con angolo θ_0 :

$$e^{i\theta_0} z \sim \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Osservazione 3. Se vogliamo una rotazione di θ_0 in senso orario è sufficiente considerare la moltiplicazione per $e^{-i\theta_0}$ (perché la matrice da considerare deve avere proprio quell'angolo):

$$e^{-i\theta_0} \cdot z = e^{-i\theta_0} \cdot \rho e^{i\theta} = \rho e^{i(\theta-\theta_0)}; \quad (9)$$

se $\theta_0 = \pi$ si ottiene la rotazione

$$z \mapsto e^{i\theta_0} z = e^{i\pi} z = (-1)z = -z; \quad (10)$$

la trasformazione (10) ci ribadisce che la **simmetria centrale rispetto ad O coincide con la rotazione di un angolo piatto attorno ad O** . Può essere opportuno rivedere questo risultato, pur essendo già noto agli allievi, in quanto molto spesso capita di sentire affermazioni del tipo "la simmetria centrale è una simmetria": la terminologia in uso non aiuta di certo a capire come stanno davvero le cose.

Rotazioni con centro diverso dall'origine

Una rotazione di angolo θ_0 e di centro $C = (x_0 ; y_0)$ si rappresenta così:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Dalla (11) si osserva che vengono compiute *nell'ordine indicato* queste tre trasformazioni¹ (si veda la figura 3):

- Traslazione $\tau_{\vec{w}}$ di vettore $\vec{w} = -(x_0; y_0)$;
- Rotazione R_φ di centro O e angolo φ ;
- Traslazione $\tau_{-\vec{w}}$ di vettore $-\vec{w} = (x_0; y_0)$.

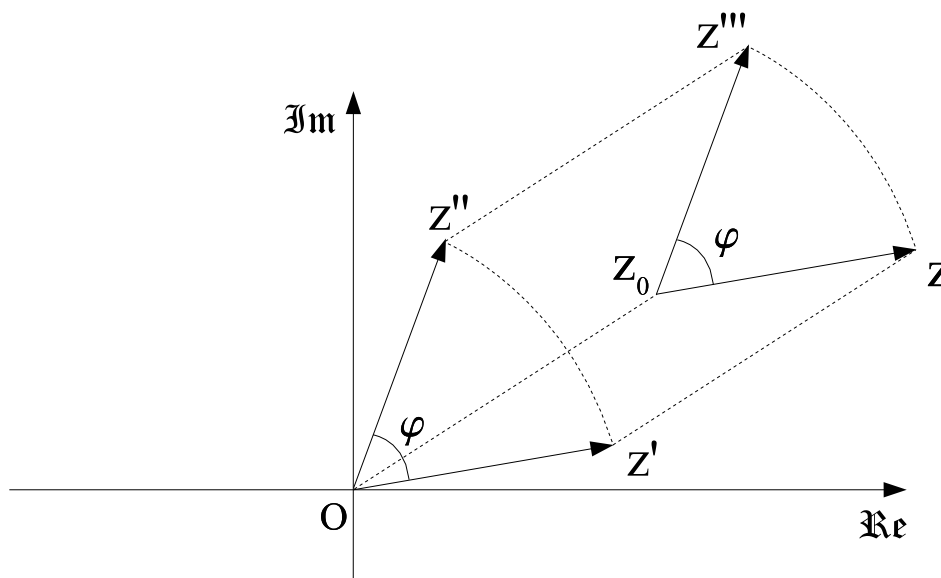


Figura 3: Rotazione con centro z_0 diverso dall'origine

¹gli studenti devono sapere che l'ordine di composizione è importantissimo perché, in generale, due trasformazioni qualsiasi non commutano

La rotazione risulta quindi essere data dalla composizione

$$R = \tau_{-\vec{w}} \circ R_\varphi \circ \tau_{\vec{w}}; \quad (12)$$

vediamo ora di "interpretare" la (12) nel piano complesso: la prima trasformazione assume la forma

$$z' = z - z_0; \quad (13)$$

la seconda trasformazione, come visto dalla (6), risulta essere:

$$z'' = e^{i\theta_0} z'; \quad (14)$$

è importante far notare alla classe che bisogna operare sul risultato della prima trasformazione, ovvero su z' , e non su z ; infine per la terza trasformazione si ha:

$$z''' = z'' + z_0. \quad (15)$$

Mettendo assieme le (13), (14) e (15) si ottiene la formula seguente:

$$z \longmapsto e^{i\theta_0}(z - z_0) + z_0. \quad (16)$$

Osservazione 4. Non è superfluo far notare che, sostituendo al posto di z il numero z_0 si ottiene:

$$z_0 \longmapsto e^{i\theta_0}(z_0 - z_0) + z_0 = e^{i\theta_0} \cdot 0 + z_0 = z_0 \quad (17)$$

cioè z_0 è un punto fisso per la trasformazione (16); ma non poteva che essere così, visto che si tratta del centro della rotazione. Quindi la (17) non ne rappresenta altro che la verifica algebrica.

Assegnata l'equazione della trasformazione

$$z \longmapsto e^{i\varphi} z + b \quad (\text{con } \varphi \neq 2k\pi) \quad (18)$$

si vuol dimostrare che si tratta di una rotazione di angolo φ attorno ad un opportuno centro.

Per far ciò possiamo confrontare le equazioni (18) e (16); si osserva che, per poter operare il confronto, è conveniente scrivere la rotazione (16) nella forma seguente:

$$z \longmapsto e^{i\varphi}(z - z_0) + z_0 = e^{i\varphi} z + z_0 - e^{i\varphi} z_0; \quad (19)$$

le equazioni (18) e (19) hanno in comune il termine $e^{i\varphi} z$; uguagliando i termini noti ($z_0 - e^{i\varphi} z_0$) e b si ottiene:

$$z_0 - e^{i\varphi} z_0 = b \Rightarrow z_0(1 - e^{i\varphi}) = b \Rightarrow z_0 = \frac{b}{1 - e^{i\varphi}}; \quad (20)$$

la (18) rappresenta dunque una rotazione di angolo φ avente centro $z_0 = \frac{b}{1 - e^{i\varphi}}$.

Esempio 5. Come applicazione di quanto esposto, proporrei ai ragazzi di trovare il centro della seguente rotazione:

$$z \mapsto \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)z + 2i - 3.$$

Gli allievi possono essere un po' disorientati perché da una parte vedono $e^{i\varphi}$ e dall'altra $\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)$: sarà allora necessario verificare che si tratta di un numero complesso avente norma unitaria e che quindi può essere espresso come $e^{i\varphi}$ (cioè esiste un numero reale φ tale che $\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right) = e^{i\varphi}$; basta considerare $\varphi = -\arctan\left(\frac{4}{3}\right)$). Ma tale rappresentazione non ci interessa se vogliamo calcolare il centro z_0 di questa rotazione, che può essere ricavato risolvendo la seguente equazione:

$$\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)z_0 + 2i - 3 = z_0$$

oppure riprendendo direttamente la (20):

$$z_0 = \frac{2i - 3}{1 - \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)} = \frac{1}{2} + 4i.$$

E' interessante verificare tutto ciò dal punto di vista geometrico, considerando l'immagine di qualche punto, scelto opportunamente: tutti i punti ruotano attorno al centro $z_0 = \frac{1}{2} + 4i$.

Composizione di rotazioni

Se componiamo due rotazioni aventi centro in O

$$\begin{cases} z' = e^{i\varphi_1}z \\ z'' = e^{i\varphi_2}z' \end{cases}$$

si trova che

$$z'' = e^{i\varphi_2}e^{i\varphi_1}z = e^{i(\varphi_2+\varphi_1)}z \quad (21)$$

cioè si trova che la composizione è uguale alla rotazione avente lo stesso centro e angolo pari alla somma dei due angoli (si veda la figura 4).

Osservazione 6. E' interessante ritrovare le formule di addizione del seno e del coseno; riscriviamo la (21):

$$\begin{aligned} z'' &= e^{i\varphi_2}e^{i\varphi_1}z = (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)z = \\ &= [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_2 \sin \varphi_1 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)]z = \\ &= [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]z. \quad (22) \end{aligned}$$

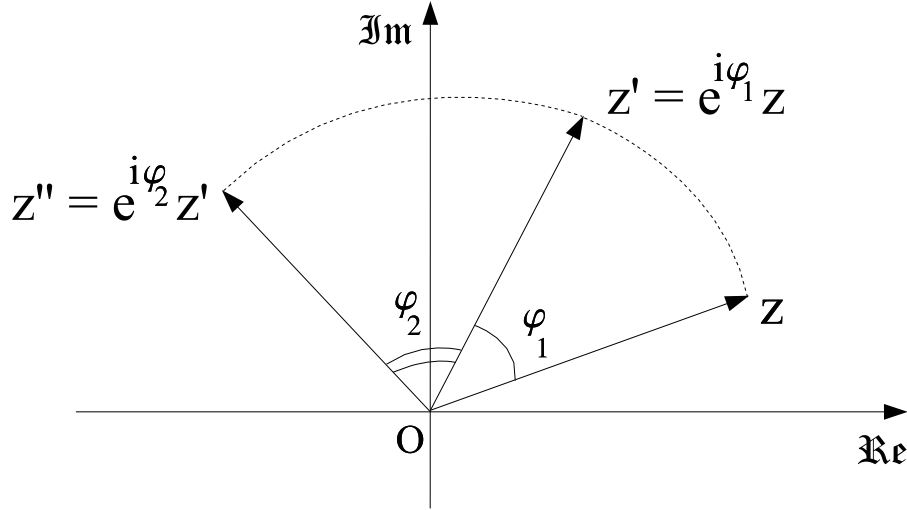


Figura 4: Composizione di due rotazioni aventi centro in O

Osservazione 7. L'ordine in questo caso non muta il risultato finale, in quanto la moltiplicazione tra numeri complessi è un'operazione commutativa. Da una proprietà algebrica discende una proprietà geometrica e viceversa: è molto importante far leva su questi aspetti.

Se componiamo una rotazione di θ_0 rad in senso antiorario con una di θ_0 rad in senso orario, siamo di fronte alla trasformazione identica, in quanto

$$\begin{cases} z' = e^{i\theta_0} z \\ z'' = e^{-i\theta_0} z' \end{cases} \Rightarrow z'' = e^{-i\theta_0} \cdot e^{i\theta_0} z = e^{i \cdot 0} z = z. \quad (23)$$

Se componiamo due rotazioni aventi lo stesso centro z_0 si trova:

$$\begin{cases} z' = e^{i\varphi_1}(z - z_0) + z_0 \\ z'' = e^{i\varphi_2}(z' - z_0) + z_0 \end{cases} \Rightarrow z'' = e^{i\varphi_2}(e^{i\varphi_1}(z - z_0) + z_0 - z_0) + z_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow z'' = e^{i\varphi_2}(e^{i\varphi_1}(z - z_0)) + z_0 = e^{i(\varphi_2 + \varphi_1)}(z - z_0) + z_0; \quad (24)$$

la trasformazione risultante è la rotazione avente centro in z_0 e angolo pari alla somma dei due angoli. La (24) è in sostanza una generalizzazione della (21). Anche in questo caso le due trasformazioni commutano.

Considerando invece due rotazioni aventi centri diversi $z_1 \neq z_2$,

$$\begin{cases} z' = e^{i\varphi_1}(z - z_1) + z_1 \\ z'' = e^{i\varphi_2}(z' - z_2) + z_2 \end{cases} \quad (25)$$

la situazione cambia:

$$\begin{aligned} z'' &= e^{i\varphi_2}(e^{i\varphi_1}(z - z_1) + z_1 - z_2) + z_2 = \\ &= e^{i(\varphi_2 + \varphi_1)}z + (z_2 + e^{i\varphi_2}(z_1 - z_2) - e^{i(\varphi_2 + \varphi_1)}z_1); \quad (26) \end{aligned}$$

scambiando l'ordine di composizione nella (25) si arriva alla trasformazione

$$z'' = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}z + (z_1 + e^{i\varphi_1}(z_2 - z_1) - e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}z_2) . \quad (27)$$

Si ottengono due rotazioni (se $\varphi_1 + \varphi_2 \neq 2k\pi$) aventi lo stesso angolo $\varphi_1 + \varphi_2$ ma con centri in generale diversi: per verificarlo basta vedere quando i termini noti delle (26) e (27) sono uguali:

$$\begin{aligned} z_2 + e^{i\varphi_2}(z_1 - z_2) - e^{i(\varphi_2+\varphi_1)}z_1 &= z_1 + e^{i\varphi_1}(z_2 - z_1) - e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}z_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (z_2 - z_1)(1 - e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2} + e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}) = 0 \end{aligned}$$

poiché $z_2 \neq z_1$ (i due centri di rotazione sono distinti) deve risultare:

$$\begin{aligned} 1 - e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2} + e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = 0 &\Rightarrow e^{i\varphi_1}(e^{i\varphi_2} - 1) + (1 - e^{i\varphi_2}) = 0 \\ &\Rightarrow (1 - e^{i\varphi_2})(1 - e^{i\varphi_1}) = 0; \end{aligned} \quad (28)$$

se entrambe le rotazioni sono diverse dall'identità (cioè se nella (28) le quantità tra parentesi sono diverse da zero) non commutano.

Osservazione 8. Proporrei agli studenti di analizzare le due rotazioni:

$$z \mapsto iz - 2 \quad \text{e} \quad z \mapsto -iz + 3 - 4i$$

e di verificare che *le loro due composizioni sono sì diverse (dalla (28)), ma sono in realtà delle traslazioni (rispettivamente di vettori $(3 - 2i)$ e $(2 + 3i)$).*

Esempio 9. Lascerei come esercizio la verifica delle (26) e (27) con le due rotazioni:

$$z \mapsto iz + 5i \quad \text{e} \quad z \mapsto -z + 2 - i$$

cercando il centro di entrambe le rotazioni ottenute come composizione (facendo molta attenzione all'*ordine di composizione*).

Simmetrie assiali

Analizziamo il coniugato \bar{z} di un numero complesso z (figura 5):

$$z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy. \quad (29)$$

La simmetria assiale rispetto alla retta $\{y = 0\}$ è rappresentata dunque dalla trasformazione

$$z \mapsto \bar{z}. \quad (30)$$

Osservazione 10. Se prendiamo il coniugato di $x - iy = \bar{z}$ si riottiene di nuovo $x + iy = z$, ovvero applicando due volte la simmetria rispetto all'asse x troviamo l'identità; questa proprietà si esprime dicendo che la simmetria è un'*involutione*. La proprietà involutoria del coniugio ($\overline{\bar{z}} = z$) ha così un riscontro geometrico.

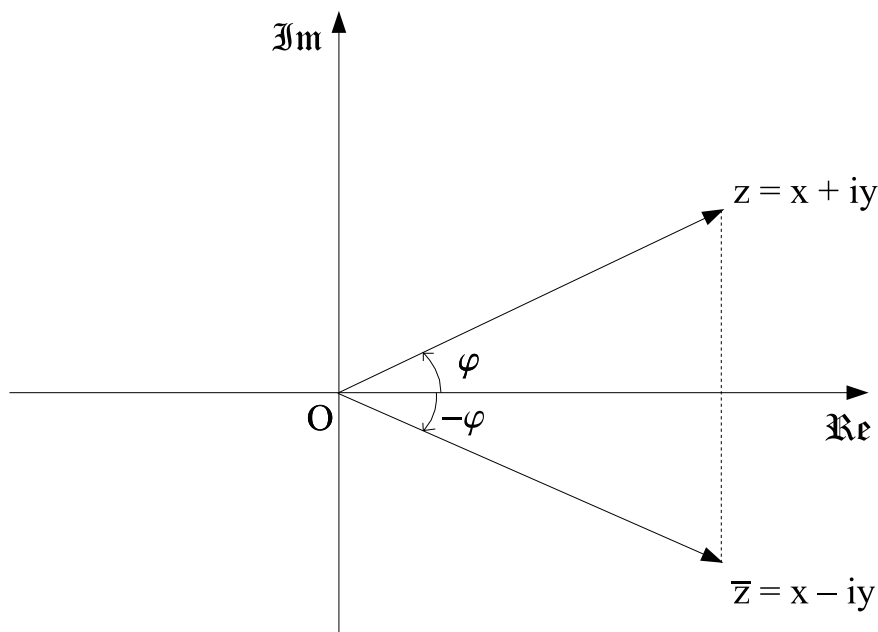


Figura 5: Numero complesso coniugato di z

La simmetria (30) è di fondamentale importanza in quanto tutte le simmetrie assiali possono essere ottenute grazie a sue composizioni con opportune rotazioni e traslazioni.

Se vogliamo ottenere ad esempio una simmetria assiale rispetto ad una retta passante per l'origine e inclinata di un angolo φ rispetto all'asse delle ascisse, si "scompon" questa simmetria in tre trasformazioni (si veda la figura 6):

- Rotazione $R_{-\varphi}$ in senso orario di un angolo pari a φ
- Simmetria S_0 rispetto all'asse x
- Rotazione R_{φ} in senso antiorario di un angolo pari a φ

Dunque si ha:

$$S_{\varphi} = R_{\varphi} \circ S_0 \circ R_{-\varphi}; \quad (31)$$

visto che ora siamo in grado di scrivere le equazioni di traslazioni e rotazioni con i numeri complessi, se interpretiamo la (31) nel piano complesso

$$R_{-\varphi} : z \mapsto e^{i(-\varphi)} z = z' \quad (32)$$

$$S_0 : z' \mapsto \overline{z'} = z'' \quad (33)$$

$$R_{\varphi} : z'' \mapsto e^{i\varphi} z'' = z''' \quad (34)$$

Mettendo assieme le (32), (33) e (34) si ottiene:

$$z \mapsto e^{i\varphi} \overline{e^{-i\varphi} z} \quad (35)$$

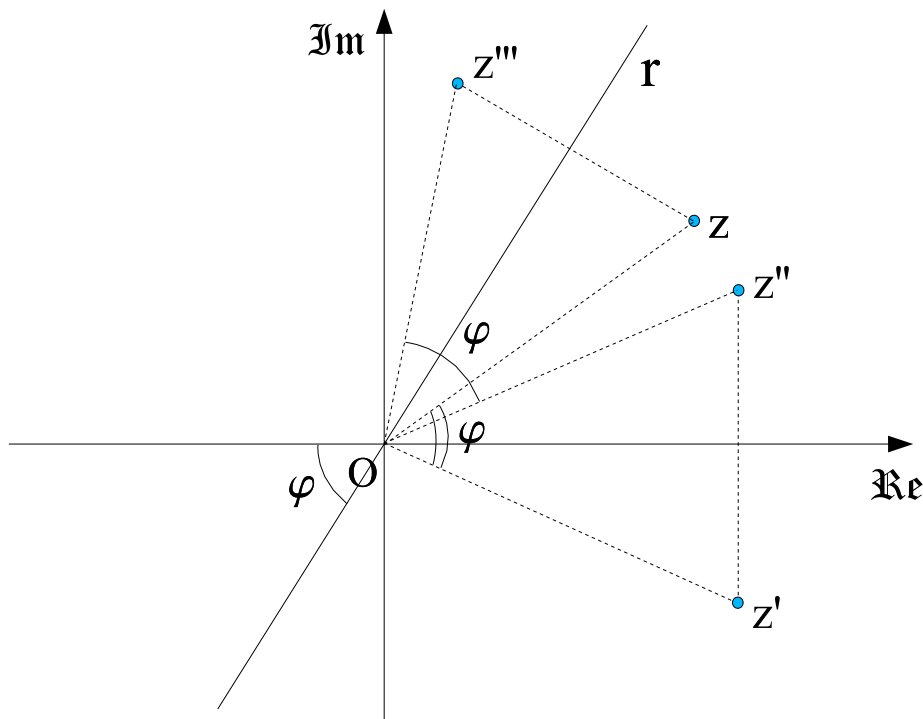


Figura 6: Simmetria rispetto ad una retta passante per O

tenendo presente che $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ e che $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$, la (35) diventa:

$$z \mapsto e^{i\varphi} \overline{(e^{-i\varphi} z)} = e^{i\varphi} e^{i\varphi} \overline{z} = e^{2i\varphi} \overline{z}. \quad (36)$$

Osservazione 11. Dalla (36) si deduce che una simmetria rispetto ad una retta passante per O ed inclinata di un angolo φ può essere considerata come la composizione di una simmetria rispetto all'asse delle ascisse con una rotazione di centro O e angolo pari a 2φ (si veda in seguito la figura 8 dove però il centro di rotazione non è O ma z_P). Con le matrici infatti risulta:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix};$$

l'ultima espressione trovata coincide proprio con l'equazione della simmetria voluta.

Esempio 12. Proponerei alla classe di verificare che la trasformazione

$$z \mapsto \left(\frac{12}{13} - \frac{5}{13}i \right) \overline{z}$$

rappresenta una simmetria assiale trovando la retta fissa \mathbf{r} (avente equazione $\{x+5y=0\}$) e considerando l'immagine di alcuni punti che non giacciono su \mathbf{r} : è interessante vedere cosa accade quando consideriamo punti vicini alla retta \mathbf{r} .

Simmetrie assiali rispetto a rette non passanti per O

Una volta trovata l'espressione algebrica di una simmetria assiale rispetto ad una retta passante per l'origine, non è difficile capire che operando con una opportuna traslazione è possibile trovare l'equazione di una simmetria assiale rispetto ad una retta \mathbf{r} non passante per O ; si segue il metodo adottato in precedenza e si scompone la trasformazione considerata nel seguente modo:

- Traslazione $\tau_{\vec{v}}$ di vettore $\vec{v} = -(x_0; y_0)$ dove $(x_0; y_0) \sim z_0$ è un punto appartenente alla retta \mathbf{r}
- Simmetria S_φ rispetto alla retta passante per O e inclinata di un angolo φ rispetto all'asse delle x
- Traslazione $\tau_{-\vec{v}} = -\tau_{\vec{v}}$

La simmetria risulta essere così scomposta (si veda la figura 7):

$$S_{\varphi, z_0} = \tau_{-\vec{v}} \circ S_\varphi \circ \tau_{\vec{v}} \quad (37)$$

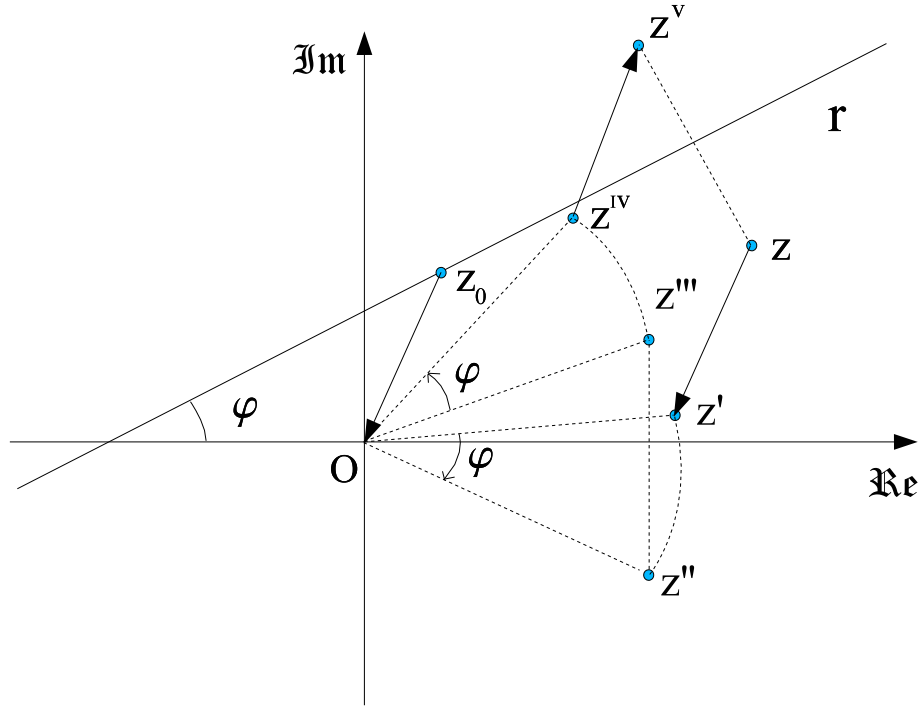


Figura 7: Simmetria rispetto ad una retta non passante per O

e quindi, scomponendo a sua volta la simmetria S_φ come indicato dalla (31), la (37) può essere riscritta così:

$$S_{\varphi, z_0} = \tau_{-\vec{v}} \circ R_\varphi \circ S_0 \circ R_{-\varphi} \circ \tau_{\vec{v}} . \quad (38)$$

Mettendo assieme (nell'ordine indicato) le trasformazioni (3), (32), (33), (34) e (2) si ottiene:

$$z \mapsto e^{i\varphi} \overline{e^{-i\varphi}(z - z_0)} + z_0 = e^{i\varphi} e^{i\varphi} (\bar{z} - \bar{z}_0) + z_0 = e^{2i\varphi} (\bar{z} - \bar{z}_0) + z_0. \quad (39)$$

Osservazione 13. Se indichiamo con P il punto di intersezione² della retta \mathbf{r} con l'asse delle x , visto che sappiamo scrivere l'equazione di una rotazione con centro diverso dall'origine (si veda per questo la formula (16)), possiamo riferirci all'osservazione 11 per ricavare l'equazione della simmetria in modo molto più semplice; basta infatti comporre la simmetria rispetto all'asse delle x (il coniugio) con la rotazione di centro P e angolo 2φ (si veda la figura 8):

$$\begin{cases} z' = \bar{z} \\ z'' = e^{2i\varphi}(z' - z_P) + z_P \end{cases} \Rightarrow z'' = e^{2i\varphi}(\bar{z} - z_P) + z_P \quad (40)$$

dove con z_P si indica il numero complesso $z_P = x_P + i \cdot 0$. Dato che z_P è un numero reale (e quindi $z_P = \bar{z}_P$), è possibile scrivere:

$$z'' = e^{2i\varphi}(\bar{z} - \bar{z}_P) + z_P. \quad (41)$$

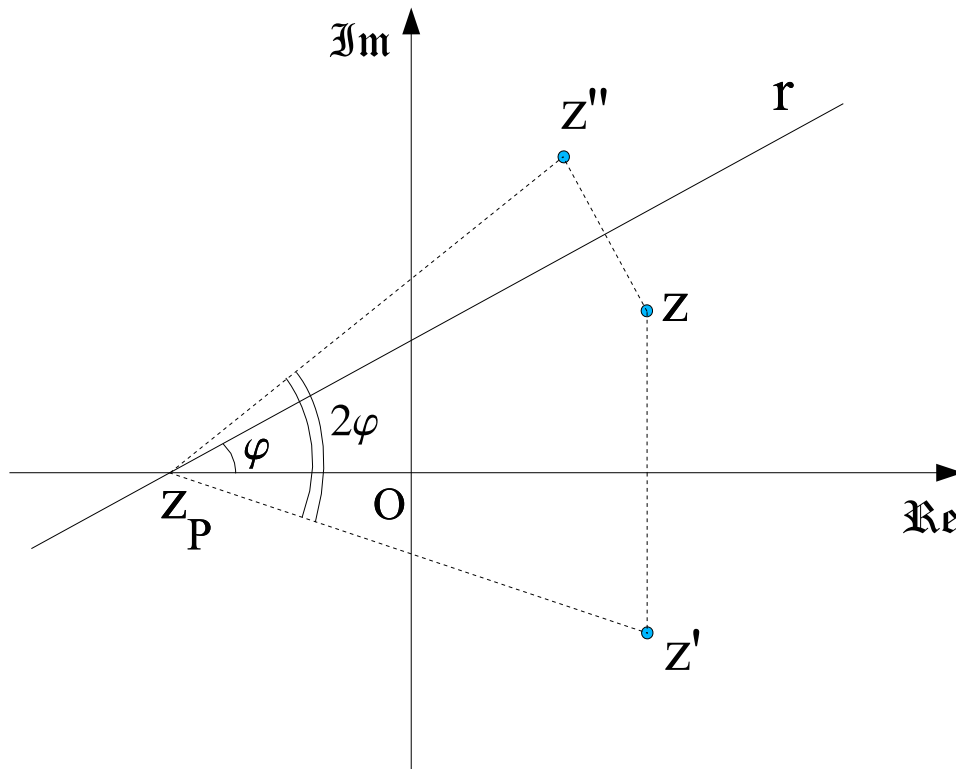


Figura 8: Simmetria rispetto ad una retta non passante per l'origine vista come composizione del coniugio e della rotazione di centro z_P e angolo 2φ .

²se la retta \mathbf{r} è parallela all'asse x la simmetria assiale ha equazione $z \mapsto \bar{z} - \bar{z}_0 + z_0$ dove z_0 è un punto qualsiasi $\in \mathbf{r}$

Se nella (39) sostituiamo z_0 al posto di z si trova che

$$z_0 \mapsto e^{2i\varphi}(\overline{z_0} - \overline{z_0}) + z_0 = e^{2i\varphi} \cdot 0 + z_0 = z_0;$$

il punto z_0 è fisso rispetto alla trasformazione considerata; chiaramente la formula (39) non è l'unica rappresentazione della simmetria che stiamo analizzando perché il punto z_0 è stato scelto arbitrariamente ed è quindi possibile ricavarne un'altra con un qualsiasi altro punto $z_1 \neq z_0$ appartenente alla retta \mathbf{r} (la (41) ne è un chiaro esempio):

$$z \mapsto e^{2i\varphi}(\overline{z} - \overline{z_1}) + z_1. \quad (42)$$

Confrontiamo ora la (39) con la (42) imponendo che rappresentino la stessa trasformazione:

$$\begin{cases} z \mapsto e^{2i\varphi}(\overline{z} - \overline{z_0}) + z_0 \\ z \mapsto e^{2i\varphi}(\overline{z} - \overline{z_1}) + z_1 \end{cases} \Rightarrow z_0 - e^{2i\varphi} \overline{z_0} = z_1 - e^{2i\varphi} \overline{z_1}$$

da cui ricaviamo la relazione esistente tra z_0 e z_1 :

$$z_0 - z_1 = e^{2i\varphi}(\overline{z_0} - \overline{z_1}).$$

Operando la sostituzione $w = z_0 - z_1$ l'ultima espressione diventa:

$$w = e^{2i\varphi} \overline{w}; \quad (43)$$

geometricamente la (43) si interpreta nel seguente modo: per ottenere il numero complesso w partendo dal suo coniugato \overline{w} , è sufficiente considerare (si veda la figura 5) la rotazione di centro O e angolo pari al doppio dell'argomento φ di w (che infatti coincide con l'angolo 2φ formato da w e \overline{w}). Algebricamente tutto ciò corrisponde, come sappiamo, a moltiplicare quest'ultimo proprio per $e^{2i\varphi}$.

Dalla (43) discende dunque che la fase di w è uguale a φ e quindi:

$$w = e^{i\varphi} |w| \Rightarrow z_0 - z_1 = e^{i\varphi} |z_0 - z_1| \quad (44)$$

la (44) indica che z_0 e z_1 appartengono alla retta rispetto alla quale viene fatta la simmetria assiale.

E' interessante a questo punto sostituire nella (39) al posto di z l'espressione $z_0 + \rho e^{i\varphi}$ (ovvero una parametrizzazione della retta \mathbf{r}):

$$\begin{aligned} z \mapsto e^{2i\varphi}(\overline{z} - \overline{z_0}) + z_0 &= e^{2i\varphi}(\overline{z_0 + \rho e^{i\varphi}} - \overline{z_0}) + z_0 = \\ &= e^{2i\varphi}(\overline{z_0} + \rho e^{-i\varphi} - \overline{z_0}) + z_0 = e^{2i\varphi}(\rho e^{-i\varphi}) + z_0 = \rho e^{i\varphi} + z_0. \end{aligned}$$

Il risultato di questo calcolo va così interpretato: tutti i numeri complessi che si possono scrivere nella forma $z = \rho e^{i\varphi} + z_0$ (e che giacciono quindi sulla retta \mathbf{r}) sono punti fissi rispetto alla trasformazione considerata.

Osservazione 14. E' possibile ritrovare in modo più semplice lo stesso risultato cercando direttamente i punti fissi della (39):

$$z' = z \Rightarrow e^{2i\varphi}(\bar{z} - \bar{z}_0) + z_0 = z \Rightarrow e^{2i\varphi}(\bar{z} - \bar{z}_0) = z - z_0$$

se sostituiamo al posto di $(z - z_0)$ il numero w , otteniamo:

$$e^{2i\varphi}\bar{w} = w; \quad (45)$$

scrivendo il numero complesso w nella forma $w = \rho e^{i\theta}$ la (45) diventa:

$$e^{2i\varphi}\rho e^{-i\theta} = \rho e^{i\theta} \Rightarrow \rho e^{2i\varphi - i\theta} = \rho e^{i\theta} \Rightarrow i(2\varphi - \theta) = i\theta \Rightarrow \theta = \varphi$$

e quindi si ottiene nuovamente la relazione (44).

Esempio 15. Proporrei alla classe di fare un confronto con l'esempio (12) verificando che la trasformazione

$$z \mapsto \left(\frac{12}{13} - \frac{5}{13}i\right)\bar{z} + 1 + 5i$$

rappresenta una simmetria rispetto alla retta \mathbf{r}' parallela alla retta \mathbf{r} di equazione $\{x+5y=0\}$ e passante dal punto $(13; 0)$ (trovando così l'equazione $\{x+5y-13=0\}$).

Osservazione 16. Se viene assegnata una trasformazione

$$z \mapsto e^{i\theta}\bar{z} + b$$

si tratta di una simmetria assiale solo se ha punti fissi, cioè se l'equazione

$$e^{i\theta}\bar{z} + b = z \quad (46)$$

ammette soluzioni in \mathbb{C} . Se invece la (46) non ammette soluzioni, si tratta di una *glissoriflessione*.

Va fatto notare agli allievi che l'esempio (15) non è stato casuale perché il vettore b è ortogonale alla retta \mathbf{r} .

Simmetria rispetto ad una retta dati due punti

Dati due punti w_1 e w_2 si vuole trovare l'equazione della simmetria assiale rispetto alla retta passante per w_1 e w_2 ; per prima cosa l'angolo φ che la retta forma con l'asse x soddisfa la relazione

$$\frac{w_2 - w_1}{|w_2 - w_1|} = e^{i\varphi} \quad (47)$$

poiché nella (39) compare $e^{2i\varphi}$, basta elevare al quadrato entrambi i membri della (47):

$$\frac{(w_2 - w_1)^2}{|w_2 - w_1|^2} = (e^{i\varphi})^2 = e^{2i\varphi}$$

sempre facendo riferimento alla (39), l'equazione della simmetria considerata è (nella (39) al posto di z_0 possiamo sostituire, per semplicità, w_1 o w_2):

$$z \mapsto e^{2i\varphi}(\bar{z} - \bar{w}_1) + w_1 = \frac{(w_2 - w_1)^2}{|w_2 - w_1|^2}(\bar{z} - \bar{w}_1) + w_1. \quad (48)$$

Glissoriflessioni

Una *glissoriflessione* (o *glissosimmetria*) si ottiene componendo una simmetria assiale rispetto ad una retta \mathbf{r} con una traslazione di vettore $\vec{\mathbf{g}}$ parallelo alla retta (si veda la figura 9). E' possibile dare anche la definizione inversa, scambiando l'ordine di composizione (le due trasformazioni considerate, infatti, commutano).

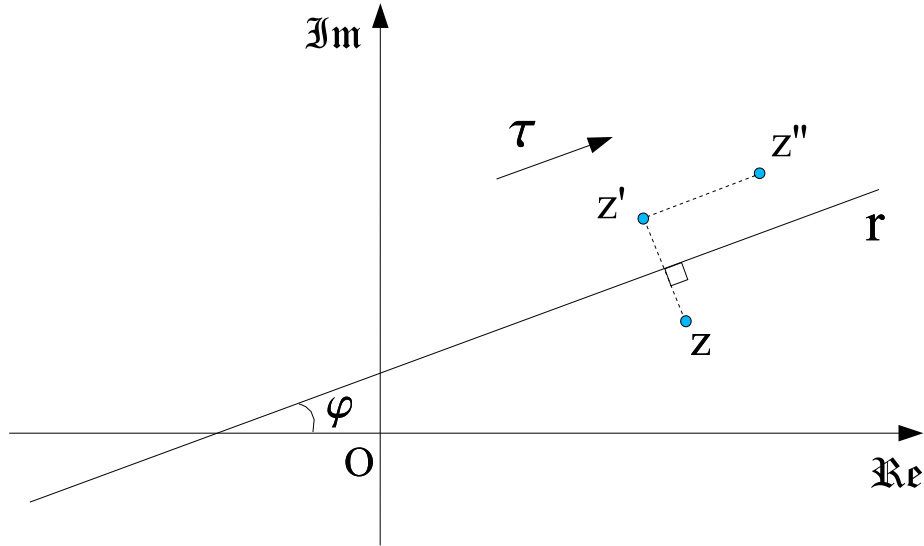


Figura 9: Glissoriflessione

Se vogliamo ottenere una glissoriflessione, possiamo al solito scomporre la trasformazione in questo modo:

- Traslazione $\tau_{\vec{\mathbf{v}}}$ di vettore $\vec{\mathbf{v}} = -(x_0; y_0)$ dove $(x_0; y_0)$ è un punto della retta \mathbf{r}
- Rotazione $R_{-\varphi}$ di centro O e di angolo $-\varphi$
- Simmetria assiale S_0 rispetto all'asse delle x
- Traslazione $\tau_{\vec{\mathbf{t}}}$ di vettore $\vec{\mathbf{t}} = (L; 0)$
- Rotazione R_{φ}
- Traslazione $\tau_{-\vec{\mathbf{v}}}$ di vettore $-\vec{\mathbf{v}} = (x_0; y_0)$

Mettendo tutto assieme si ricava (t è il numero complesso $L + 0 \cdot i$):

$$z \longmapsto e^{i\varphi} \left[\overline{e^{-i\varphi}(z - z_0)} + t \right] + z_0 = e^{2i\varphi}(\bar{z} - \bar{z}_0) + L e^{i\varphi} + z_0 \quad (49)$$

si noti che se $t = 0$ (e quindi di conseguenza se $L = 0$) si riottiene la (39).

Osservazione 17. Possiamo ottenere l'equazione (49) sfruttando l'equazione di una simmetria assiale (ovvero la (39)) e tenendo presente che il vettore \vec{g} ammette nel piano complesso la rappresentazione $Le^{i\varphi}$ (\vec{g} ha modulo L e forma un angolo φ con l'asse delle x) possiamo scrivere:

$$z \mapsto e^{2i\varphi}(\bar{z} - \bar{z}_0) + z_0 + Le^{i\varphi} \quad (50)$$

che coincide con la (49). Questo è un modo molto più semplice del precedente e ci consente di arrivare all'equazione voluta.

Vogliamo ora dimostrare che operando prima la traslazione e successivamente la simmetria assiale, ritroviamo l'equazione (50) (e quindi la stessa trasformazione); infatti:

$$\begin{cases} z \mapsto z' = z + Le^{i\varphi} \\ z' \mapsto z'' = e^{2i\varphi}(\bar{z}' - \bar{z}_0) + z_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow z'' &= e^{2i\varphi}(\overline{z + Le^{i\varphi}} - \bar{z}_0) + z_0 = e^{2i\varphi}(\bar{z} + Le^{-i\varphi} - \bar{z}_0) + z_0 = \\ &= e^{2i\varphi}\bar{z} + Le^{(2i-i)\varphi} - e^{2i\varphi}\bar{z}_0 + z_0 = e^{2i\varphi}(\bar{z} - \bar{z}_0) + z_0 + Le^{i\varphi}. \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto, di nuovo, la (50).

Se cerchiamo a questo punto i punti fissi della trasformazione rappresentata dalla (49) si ha:

$$z' = z \Rightarrow e^{2i\varphi}(\bar{z} - \bar{z}_0) + Le^{i\varphi} + z_0 = z \Rightarrow e^{2i\varphi}(\bar{z} - \bar{z}_0) + Le^{i\varphi} = z - z_0$$

se al posto di $(z - z_0)$ sostituisco w ho che:

$$e^{2i\varphi}(\bar{w}) + Le^{i\varphi} = w; \quad (51)$$

analogamente con l'equazione (45), operiamo la sostituzione $w = \rho e^{i\theta}$ nella (51):

$$e^{2i\varphi}(\rho e^{-i\theta}) + Le^{i\varphi} = \rho e^{i\theta} \Rightarrow e^{i\varphi}(\rho e^{i\varphi} \cdot e^{-i\theta} + L) = \rho e^{i\theta} \Rightarrow$$

dividendo per $e^{i\varphi}$ entrambi i membri dell'ultima equazione si ottiene:

$$\rho e^{i(\varphi-\theta)} + L = \rho e^{i(\theta-\varphi)}$$

se nella precedente sostituisco $h = \rho e^{i(\varphi-\theta)}$ si trova:

$$h + L = \bar{h} \Rightarrow \bar{h} - h = L; \quad (52)$$

dalla (52) si deve avere che la differenza tra il numero complesso h ed il suo coniugato \bar{h} deve essere uguale al numero reale L : se $L \neq 0$ si ha un assurdo perché, in generale, questa differenza è pari ad *un numero immaginario puro*.

Solo nel caso in cui L è nullo si hanno punti fissi, ma si ricade nel caso della simmetria assiale.

Di fronte alla trasformazione

$$z \mapsto a\bar{z} + b \quad \text{con } |a| = 1 \quad (53)$$

ci possiamo chiedere se rientra nel caso delle glissoriflessioni "vere e proprie" (cioè senza punti fissi); scriviamo il numero complesso a come $e^{2i\varphi}$ (ciò è possibile poiché $|a| = 1$) e scomponiamo il numero b in questo modo (si veda la figura 10): $b = b_{\perp} + b_{\parallel}$, dove b_{\perp} è la componente di b perpendicolare a \mathbf{r} e b_{\parallel} è quella parallela.

La trasformazione avente equazione (53) è una composizione di una simmetria rispetto alla retta \mathbf{r} passante per l'origine ed inclinata di un angolo φ rispetto all'asse delle ascisse e della traslazione di vettore b (si faccia riferimento alla figura 10).

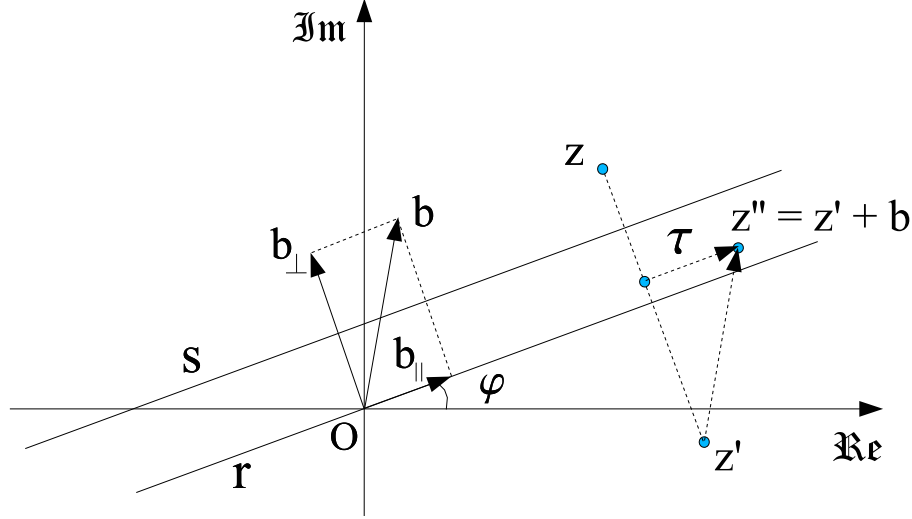


Figura 10: Composizione di una simmetria assiale e di una traslazione

Se analizziamo la (53), ci accorgiamo che la possiamo scrivere così:

$$z \mapsto a\bar{z} + b = e^{2i\varphi}\bar{z} + b_{\perp} + b_{\parallel} = (e^{2i\varphi}\bar{z} + b_{\perp}) + b_{\parallel}; \quad (54)$$

per questioni di perpendicolarità, il numero complesso b_{\perp} può essere espresso, a seconda del caso esaminato, come $b_{\perp} = |b_{\perp}|e^{i(\varphi+\pi/2)}$ oppure come $b_{\perp} = |b_{\perp}|e^{i(\varphi-\pi/2)}$ (chiaramente un caso esclude l'altro) e l'espressione tra parentesi che appare nella (54) è una simmetria assiale rispetto alla retta \mathbf{s} parallela alla \mathbf{r} e passante dal punto $b_{\perp}/2$; per verificarlo scriviamo l'equazione della simmetria assiale

$$z \mapsto e^{2i\varphi}\left(\bar{z} - \frac{\overline{b_{\perp}}}{2}\right) + \frac{b_{\perp}}{2}$$

e sostituiamo a b_{\perp} l'espressione $|b_{\perp}|e^{i(\varphi+\pi/2)}$ (se ovviamente siamo in questo caso):

$$\begin{aligned} z \mapsto e^{2i\varphi}\bar{z} - e^{2i\varphi}\frac{|b_{\perp}|}{2}e^{i(-\varphi-\pi/2)} + \frac{|b_{\perp}|}{2}e^{i(\varphi+\pi/2)} &= \\ = e^{2i\varphi}\bar{z} + \frac{|b_{\perp}|}{2}(-e^{i(\varphi-\pi/2)} + e^{i(\varphi+\pi/2)}) &= e^{2i\varphi}\bar{z} + \frac{|b_{\perp}|}{2}e^{i\varphi}2i = \\ = e^{2i\varphi}\bar{z} + |b_{\perp}|e^{i\varphi}e^{i\pi/2} &= e^{2i\varphi}\bar{z} + |b_{\perp}|e^{i(\varphi+\pi/2)} = e^{2i\varphi}\bar{z} + b_{\perp}. \end{aligned}$$

A questa simmetria assiale dobbiamo sommare il numero complesso b_{\parallel} , che quindi corrisponde a comporre per la traslazione di un vettore parallelo alla retta \mathbf{r} : siamo di fronte ad una glissoriflessione se e solo se $b_{\parallel} \neq 0$.

Esempio 18. E' interessante lasciare questo problema alla classe: data la trasformazione

$$z \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) \bar{z} + 2 + 5i$$

verificare che si tratta di una glissoriflessione e determinarne la retta di simmetria e il vettore di traslazione parallelo ad essa.

Composizione di simmetrie assiali

Vogliamo dimostrare con i numeri complessi che la composizione di due simmetrie assiali rispetto a due rette incidenti³ non è altro che una rotazione avente centro nel punto di intersezione delle rette (anche se questo fatto rientra a pieno titolo nei prerequisiti, è importante insistere sulla dualità algebra-geometria); per far questo consideriamo, per ragioni di semplicità⁴, due simmetrie rispetto a due rette \mathbf{r} e \mathbf{s} passanti per l'origine degli assi (si veda la figura 11).

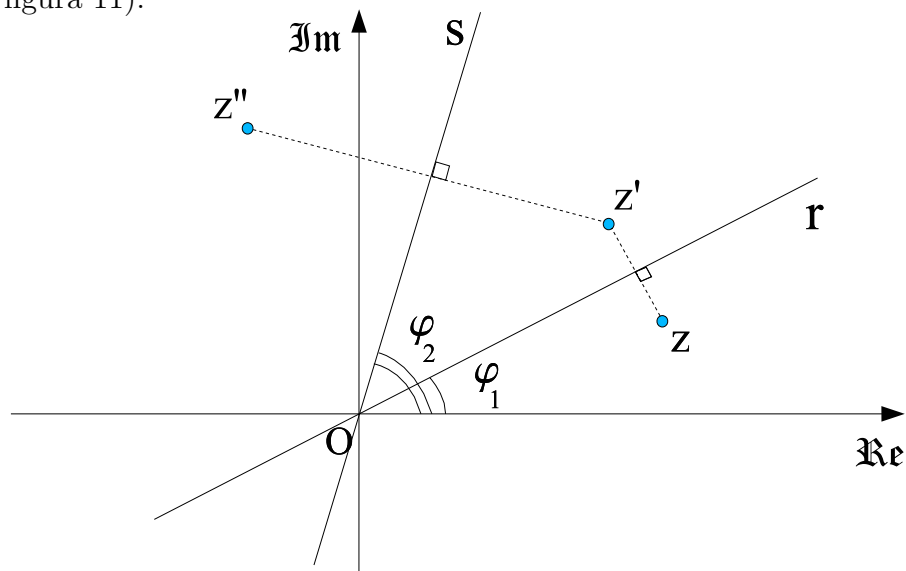


Figura 11: Composizione di due simmetrie assiali

Algebricamente con i numeri complessi si trova

$$\begin{cases} z' = e^{2i\varphi_1} \bar{z} \\ z'' = e^{2i\varphi_2} \bar{z}' \end{cases} \Rightarrow z'' = e^{2i\varphi_2} \overline{e^{2i\varphi_1} \bar{z}} = e^{2i\varphi_2} e^{-2i\varphi_1} z \Rightarrow z'' = e^{2i(\varphi_2 - \varphi_1)} z$$

si ottiene dunque una rotazione di centro O e angolo pari a $\varphi = 2(\varphi_2 - \varphi_1)$.

Componendo in ordine inverso le due simmetrie si ottiene la rotazione inversa, cioè quella (sempre con centro nell'origine) di angolo pari a $-\varphi = -2(\varphi_2 - \varphi_1)$.

³il caso delle rette parallele è discusso in seguito

⁴ma senza perdita di generalità

Osservazione 19. Se facciamo la verifica con le matrici dobbiamo passare attraverso le formule di addizione di $\sin x$ e $\cos x$. E' dunque molto conveniente trattare queste trasformazioni con i numeri complessi.

Osservazione 20. In generale, se componiamo due simmetrie assiali rispetto a due rette che si incontrano in un punto z_0 , otteniamo una rotazione di angolo $\varphi = 2(\varphi_2 - \varphi_1)$ (come prima) e avente centro nel punto z_0 .

Traslazioni come composizione di due simmetrie assiali

Se componiamo due simmetrie assiali rispetto a due rette parallele, entrambe inclinate di un angolo φ (si veda la figura 12),

$$\begin{aligned} \begin{cases} z' = e^{2i\varphi} (\bar{z} - \bar{z}_1) + z_1 \\ z'' = e^{2i\varphi} (\bar{z}' - \bar{z}_2) + z_2 \end{cases} &\Rightarrow z'' = e^{2i\varphi} \left(\overline{e^{2i\varphi} (\bar{z} - \bar{z}_1) + z_1} - \bar{z}_2 \right) + z_2 = \\ &= e^{2i\varphi} \left(e^{-2i\varphi} (z - z_1) + \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \right) + z_2 = e^{2i(\varphi - \varphi)} (z - z_1) + e^{2i\varphi} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + z_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow z'' = z - z_1 + e^{2i\varphi} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + z_2 = z + (z_2 - z_1) + e^{2i\varphi} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \end{aligned} \quad (55)$$

abbiamo ottenuto dunque una traslazione.

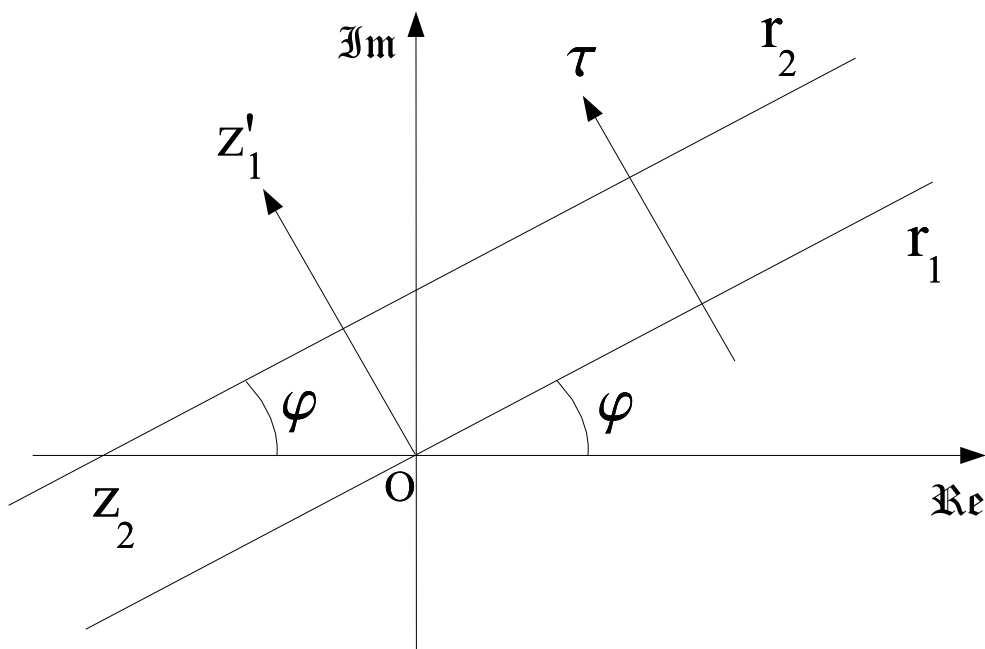


Figura 12: Traslazione come composizione di due simmetrie assiali (prima viene effettuata la simmetria rispetto a r_1). Si osservi che z_2 è reale; z_1' rappresenta l'immagine dell'origine con la traslazione di vettore τ .

Senza perdita di generalità, posso supporre che la retta \mathbf{r}_1 (ma potrei anche scegliere l'altra, dal momento che non c'è una retta "privilegiata") passi dall'origine; in questo caso, visto che al posto di z_1 possiamo sostituire (in modo arbitrario) qualsiasi punto della retta, conviene operare (per semplicità algebrica) la scelta $z_1 = 0$.

In questo modo il vettore di traslazione τ risulta essere:

$$\tau = z_2 + e^{2i\varphi}(-\overline{z_2}); \quad (56)$$

se consideriamo il punto di intersezione della retta \mathbf{r}_2 con l'asse delle x e lo facciamo coincidere con z_2 (tutto ciò è lecito dal momento che, come detto in precedenza, non esistono vincoli nella scelta del punto sulle rette), il numero complesso z_2 è reale e quindi $\overline{z_2} = z_2$, da cui discende che

$$\tau = z_2 + e^{2i\varphi}(-z_2) = z_2(1 - e^{2i\varphi}).$$

Se desideriamo avere delle informazioni geometriche su τ , ci è sufficiente esaminare il numero complesso tra parentesi, ovvero $1 - e^{2i\varphi}$; facendo riferimento alla figura 13 si dimostra facilmente che il vettore τ è perpendicolare alle rette \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 .

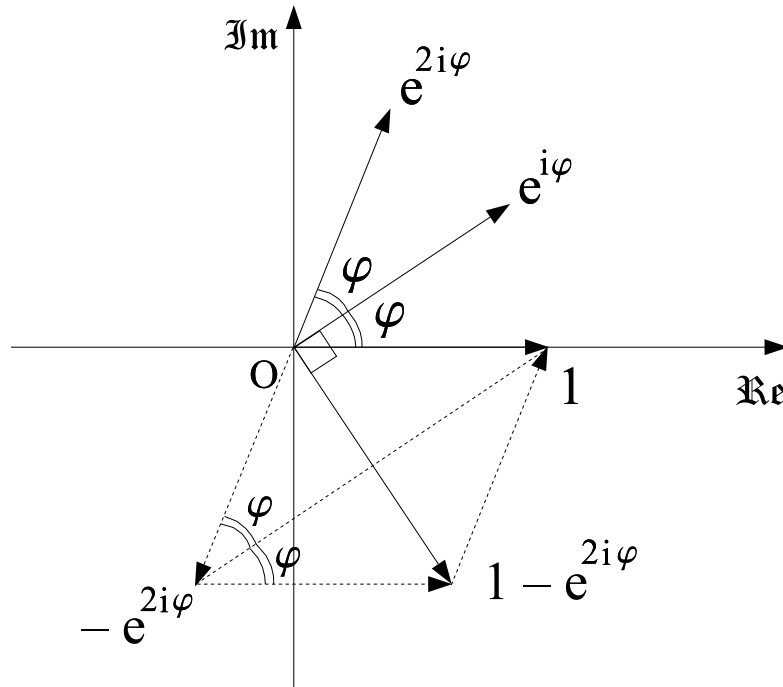


Figura 13: Costruzione geometrica del numero complesso $1 - e^{2i\varphi}$

Esempio 21. Esercizio da proporre agli studenti: data la traslazione $z \mapsto z - 2 + i$ determinare due simmetrie assiali tali che, se composte nell'ordine giusto, restituiscono proprio la traslazione scritta.

Composizione di una rotazione e di una simmetria

Consideriamo un caso particolare di composizione: la rotazione di centro O e angolo φ e la simmetria rispetto alla retta passante dall'origine e inclinata di θ rispetto all'asse delle x ; componiamole operando prima la rotazione:

$$\begin{cases} z' = e^{i\varphi} z \\ z'' = e^{2i\theta} \overline{z'} \end{cases}$$

la trasformazione risultante è

$$z'' = e^{2i\theta} \overline{e^{i\varphi} z} = e^{2i\theta} e^{-i\varphi} \overline{z} = e^{i(2\theta-\varphi)} \overline{z} = e^{2i(\theta-\varphi/2)} \overline{z} \quad (57)$$

la (57) rappresenta l'equazione di una simmetria assiale rispetto alla retta passante per l'origine e inclinata di $(\theta - \varphi/2)$ rispetto all'asse x .

Vediamo ora che trasformazione si ottiene scambiando l'ordine (facendo cioè prima la simmetria):

$$\begin{cases} z' = e^{2i\theta} \overline{z} \\ z'' = e^{i\varphi} z' \end{cases}$$

stavolta si ricava:

$$z'' = e^{i\varphi} e^{2i\theta} \overline{z} = e^{2i(\theta+\varphi/2)} \overline{z} \quad (58)$$

la (58) rappresenta l'equazione di una simmetria assiale rispetto alla retta passante per l'origine e inclinata di $(\theta + \varphi/2)$ rispetto all'asse delle x . In generale, quindi, le due trasformazioni non commutano.

Isometrie che fanno corrispondere coppie di punti

Date le due coppie di numeri complessi $\{z_1, z_2\}$ e $\{w_1, w_2\}$ si vogliono trovare le due isometrie (una sarà diretta, l'altra indiretta) tali che:

$$\begin{cases} z_1 \mapsto w_1 \\ z_2 \mapsto w_2 \end{cases} . \quad (59)$$

L'isometria diretta avrà la forma seguente:

$$z \mapsto e^{i\varphi} z + b \quad (60)$$

vanno quindi determinati $\varphi \in [0, 2\pi)$ e $b \in \mathbb{C}$ risolvendo il sistema

$$\begin{cases} e^{i\varphi} z_1 + b = w_1 \\ e^{i\varphi} z_2 + b = w_2 \end{cases} ;$$

svolgendo i calcoli si trova che

$$\begin{cases} b = w_1 - e^{i\varphi} z_1 \\ e^{i\varphi} z_2 + (w_1 - e^{i\varphi} z_1) = w_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = w_1 - e^{i\varphi} z_1 \\ e^{i\varphi} (z_2 - z_1) = w_2 - w_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = w_1 - e^{i\varphi} z_1 \\ e^{i\varphi} = \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = w_1 - \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1} z_1 \\ e^{i\varphi} = \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1} \end{cases} . \quad (61)$$

E' da notare che nella (61) $e^{i\varphi}$ ha modulo uguale a 1, per cui:

$$|e^{i\varphi}| = 1 \Rightarrow \left| \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1} \right| = 1 \Rightarrow |w_2 - w_1| = |z_2 - z_1|$$

questa condizione è soddisfatta in quanto un'isometria conserva le distanza tra i punti.

L'isometria diretta ha quindi equazione:

$$z \mapsto \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1} z + w_1 - \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1} z_1 = \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1} (z - z_1) + w_1 . \quad (62)$$

Osservazione 22. Lo stesso risultato può essere ottenuto ragionando in questo modo (si veda la figura 14): si opera la traslazione $z \mapsto z + w_1 - z_1$ (cioè in modo tale che z_1 abbia come immagine w_1) e successivamente si considera la rotazione attorno a w_1 di un angolo φ pari alla differenza di fase dei numeri complessi $(w_2 - w_1)$ e $(z_2 - z_1)$ (φ è infatti dato dalla relazione (61)).

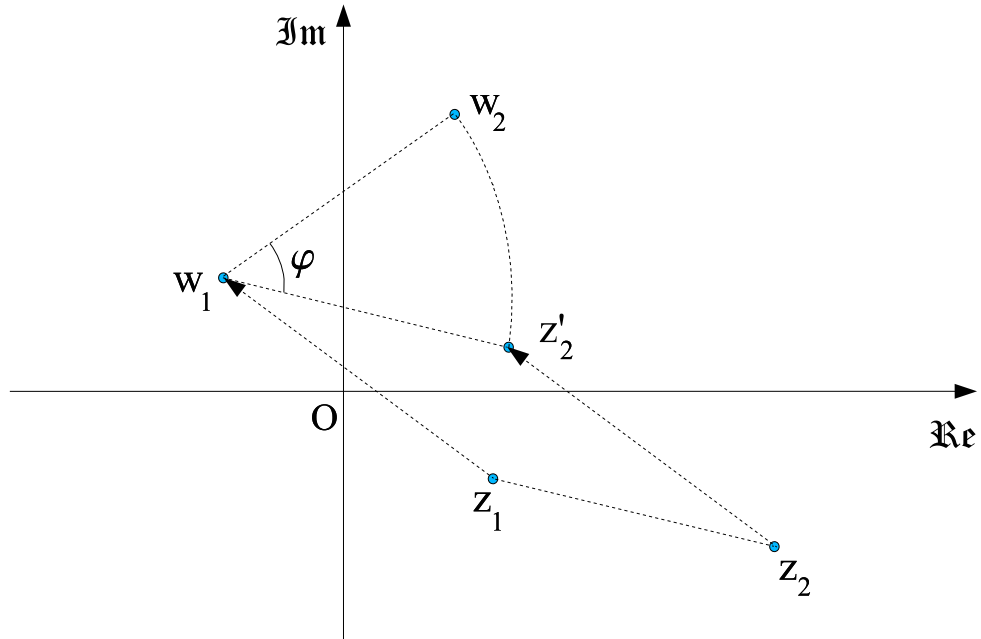


Figura 14: Isometria che manda z_1 in w_1 e z_2 in w_2 (prima costruzione)

In modo analogo si può operare prima la rotazione attorno a z_1 di angolo pari a φ e dopo la traslazione $z \mapsto z + w_1 - z_1$ (si veda la figura 15).

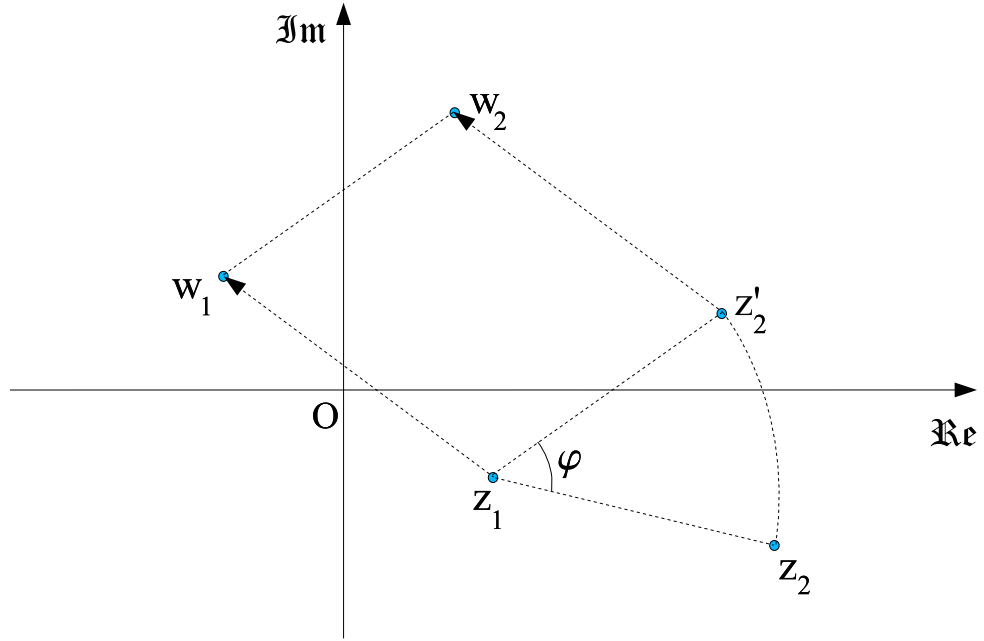


Figura 15: Isometria che manda z_1 in w_1 e z_2 in w_2 (seconda costruzione)

Se voglio l'isometria indiretta che abbia la proprietà (59) basta comporre l'isometria diretta trovata (data dalla (62)) con la simmetria assiale rispetto alla retta passante per i punti w_1 e w_2 , la cui equazione è fornita dalla (48).

$$\begin{aligned}
 z \mapsto \frac{(w_2 - w_1)^2}{|w_2 - w_1|^2} \left(\frac{\overline{w_2 - w_1}}{z_2 - z_1} (z - z_1) + w_1 - \overline{w_1} \right) + w_1 = \\
 = \frac{(w_2 - w_1)^2 (\overline{w_2} - \overline{w_1})}{|w_2 - w_1|^2 (\overline{z_2} - \overline{z_1})} (\overline{z} - \overline{z_1}) + w_1; \quad (63)
 \end{aligned}$$

visto che

$$(w_2 - w_1)(\overline{w_2} - \overline{w_1}) = |w_2 - w_1|^2$$

la (63) diventa:

$$z \mapsto \frac{w_2 - w_1}{\overline{z_2} - \overline{z_1}} (\overline{z} - \overline{z_1}) + w_1. \quad (64)$$

Osservazione 23. Può essere interessante verificare che i punti appartenenti al segmento di estremi z_1 e z_2 hanno come immagine i punti del segmento di estremi w_1 e w_2 . Lo si può dimostrare in più modi: per via algebrica, un punto del segmento di estremi z_1 e z_2 ammette un'espressione del tipo (combinazione convessa di due punti):

$$z = \lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2 \quad \text{con } \lambda \in [0, 1]$$

se applichiamo a tale punto l'isometria si ottiene:

$$\begin{aligned} z \mapsto e^{i\varphi} z + b &= e^{i\varphi}(\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) + b = \\ &= \lambda e^{i\varphi} z_1 + (1 - \lambda)e^{i\varphi} z_2 + b = \lambda e^{i\varphi} z_1 + \lambda b + (1 - \lambda)e^{i\varphi} z_2 + (1 - \lambda)b = \\ &= \lambda(e^{i\varphi} z_1 + b) + (1 - \lambda)(e^{i\varphi} z_2 + b) = \lambda w_1 + (1 - \lambda)w_2 ; \end{aligned}$$

abbiamo quindi verificato che l'immagine di z appartiene⁵ al segmento di estremi w_1 e w_2 .

Omotetie

Una omotetia di centro O e rapporto k ammette un'espressione analitica della forma

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix} ;$$

con i numeri complessi ciò si traduce così (si veda la figura 16):

$$z \mapsto \lambda z \tag{65}$$

infatti, sostituendo $z = x + iy$ nella (65) si ha

$$x + iy \mapsto \lambda(x + iy) = \lambda x + i(\lambda y).$$

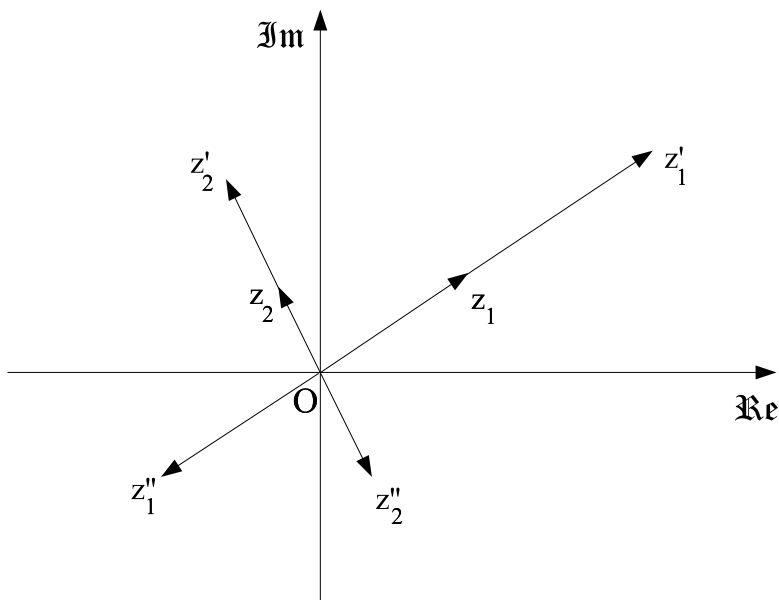


Figura 16: Moltiplicazione per un numero reale

⁵si osservi che i coefficienti della combinazione convessa sono gli stessi sia per z che per la sua immagine

Se il centro dell'omotetia è il punto $P_0 = (x_0; y_0)$ si osserva che l'omotetia risulta "scomponibile" nella composizione di queste tre trasformazioni:

- Traslazione τ di vettore $-(x_0; y_0)$
- Omotetia di centro O e rapporto λ
- Traslazione $-\tau$ di vettore $(x_0; y_0)$

con i numeri complessi si ha:

$$z \mapsto \lambda(z - z_0) + z_0. \quad (66)$$

Riscriviamo ora la (66):

$$z \mapsto \lambda z + z_0 - \lambda z_0. \quad (67)$$

Vogliamo dimostrare, a questo punto, che una trasformazione⁶ del tipo

$$z \mapsto \lambda z + b \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R} - \{1\} \quad (68)$$

è un'omotetia; dalla formula (67) si capisce che dobbiamo far vedere che, per ogni scelta di b , siamo in grado di trovare uno z_0 tale che

$$z_0 - \lambda z_0 = b;$$

ma non è difficile capire che basta scegliere (ricordiamo che siamo nell'ipotesi $\lambda \neq 1$):

$$z_0 = \frac{b}{1 - \lambda}. \quad (69)$$

Osservazione 24. Cerchiamo una costruzione geometrica del punto fisso (69) dell'omotetia (68) consideriamo i punti 0 e 1 e le loro immagini tramite l'omotetia di equazione (68), cioè b ($= b_x + ib_y$) e $\lambda + b$. Il punto fisso z_0 è l'intersezione della retta passante per l'origine e b e della retta passante per 1 e $b + \lambda$ (si veda la figura 17); le soluzioni del sistema (70)

$$\begin{cases} y = \frac{y_0}{x_0} x \\ y = \frac{y_0}{\lambda + x_0 - 1} (x - 1) \end{cases} \quad (70)$$

sono

$$x_0 = \frac{b_x}{1 - \lambda} \quad ; \quad y_0 = \frac{b_y}{1 - \lambda}.$$

Le soluzioni trovate sono la parte reale e la parte immaginaria di z_0 : ciò è in perfetto accordo con la (69).

Esempio 25. Esercizio per la classe: data l'omotetia di equazione $z \mapsto 3z - i + 2$, determinarne le rette unite.

⁶la trasformazione (68) si ottiene dalla composizione, nell'ordine, dell'omotetia di centro O e rapporto λ con la traslazione di vettore b .

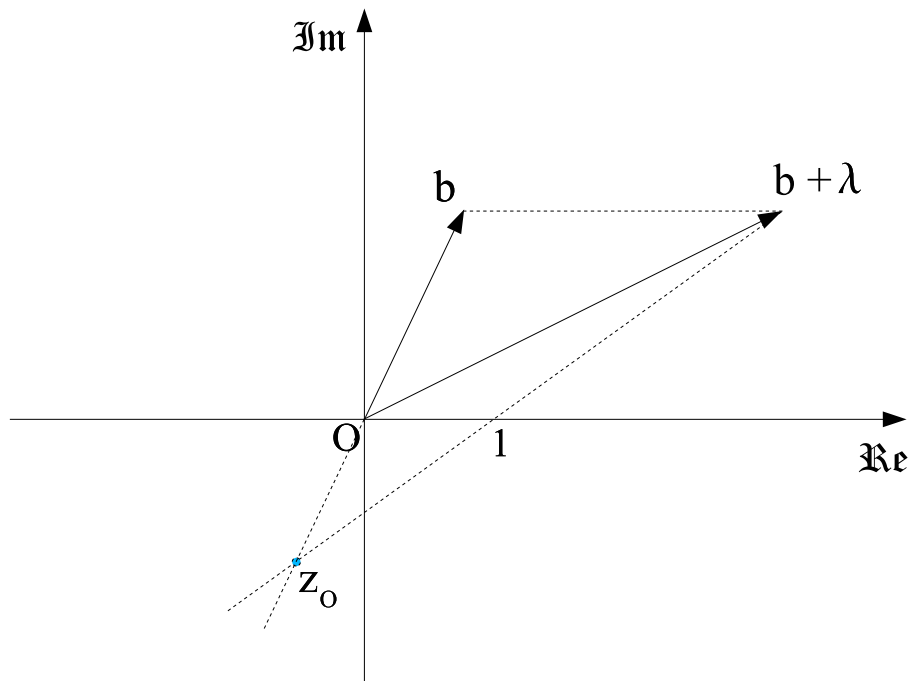


Figura 17: Costruzione geometrica del punto fisso di un'omotetia

Composizione di due omotetie

Se vogliamo comporre due omotetie (con centri $z_1 \neq z_2$)

$$\begin{cases} z' = \lambda_1(z - z_1) + z_1 \\ z'' = \lambda_2(z' - z_2) + z_2 \end{cases}$$

si trova:

$$z'' = \lambda_2(\lambda_1(z - z_1) + z_1 - z_2) + z_2 = \lambda_2\lambda_1 z + (z_2 + \lambda_2(z_1 - z_2) - \lambda_2\lambda_1 z_1). \quad (71)$$

La trasformazione che si ottiene è dunque un'omotetia perché la (71) ha la stessa struttura della (68), dove

$$\lambda = \lambda_2\lambda_1 ; \quad b = (z_2 + \lambda_2(z_1 - z_2) - \lambda_2\lambda_1 z_1).$$

Nell'ipotesi $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$, se vogliamo calcolare il punto fisso dell'omotetia (71), dalla (69) si trova che

$$z_0 = \frac{(z_2 + \lambda_2(z_1 - z_2) - \lambda_2\lambda_1 z_1)}{1 - \lambda_1\lambda_2}.$$

Scambiamo ora l'ordine di composizione delle due omotetie:

$$\begin{cases} z' = \lambda_2(z - z_2) + z_2 \\ z'' = \lambda_1(z' - z_1) + z_1 \end{cases}$$

e ricavando z'' in funzione di z si ricava l'espressione:

$$z'' = \lambda_1(\lambda_2(z - z_2) + z_2 - z_1) + z_1 = \lambda_1\lambda_2z + (z_1 + \lambda_1(z_2 - z_1) - \lambda_1\lambda_2z_2) \quad (72)$$

dal confronto delle formule (71) e (72) si osserva che le due trasformazioni ottenute, pur essendo entrambe due omotetie di uguale rapporto $\lambda = \lambda_1 \cdot \lambda_2$, non sono uguali perché, in generale, risulta:

$$z_2 + \lambda_2(z_1 - z_2) - \lambda_2\lambda_1z_1 \neq z_1 + \lambda_1(z_2 - z_1) - \lambda_1\lambda_2z_2;$$

se uguagliamo infatti le due espressioni di b si ottiene:

$$(z_2 - z_1)(1 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2) = 0$$

ed essendo $z_1 \neq z_2$, deve risultare necessariamente

$$1 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 = 0 \quad \text{che equivale a} \quad (1 - \lambda_1) \cdot (1 - \lambda_2) = 0$$

da cui deduciamo che almeno una delle due omotetie deve avere rapporto uguale a 1 e quindi deve essere l'identità.

Rotomotetie di centro O

Fissiamo un numero complesso $z_0 = x_0 + iy_0$; se moltiplichiamo z_0 per un numero generico $z = x + iy$, si ha:

$$(x_0 + iy_0)(x + iy) = x_0x - y_0y + i(y_0x + x_0y);$$

la stessa cosa si può ottenere con la moltiplicazione matrice-vettore:

$$\begin{bmatrix} x_0 & -y_0 \\ y_0 & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0x - y_0y \\ y_0x + x_0y \end{bmatrix}. \quad (73)$$

Se scriviamo $z_0 = \rho_0 e^{i\varphi_0}$ e $z = \rho e^{i\varphi}$ si ha

$$z_0 \cdot z = \rho_0 e^{i\varphi_0} \cdot \rho e^{i\varphi} = \rho_0 \rho e^{i(\varphi_0 + \varphi)}$$

si ha dunque una rotoomotetia di rapporto ρ_0 e angolo φ_0 , in quanto il modulo di $z' = z_0 z$ si ottiene dal modulo di z mediante la moltiplicazione per ρ_0 e la fase è uguale a quella di z aumentata di φ_0 .

Una rotoomotetia è una trasformazione che risulta composizione di una omotetia e di una rotazione; con il linguaggio dei numeri complessi possiamo scrivere:

$$\begin{cases} z' = \lambda z \\ z'' = e^{i\varphi_0} z' \end{cases} \Rightarrow z'' = e^{i\varphi_0} \lambda z;$$

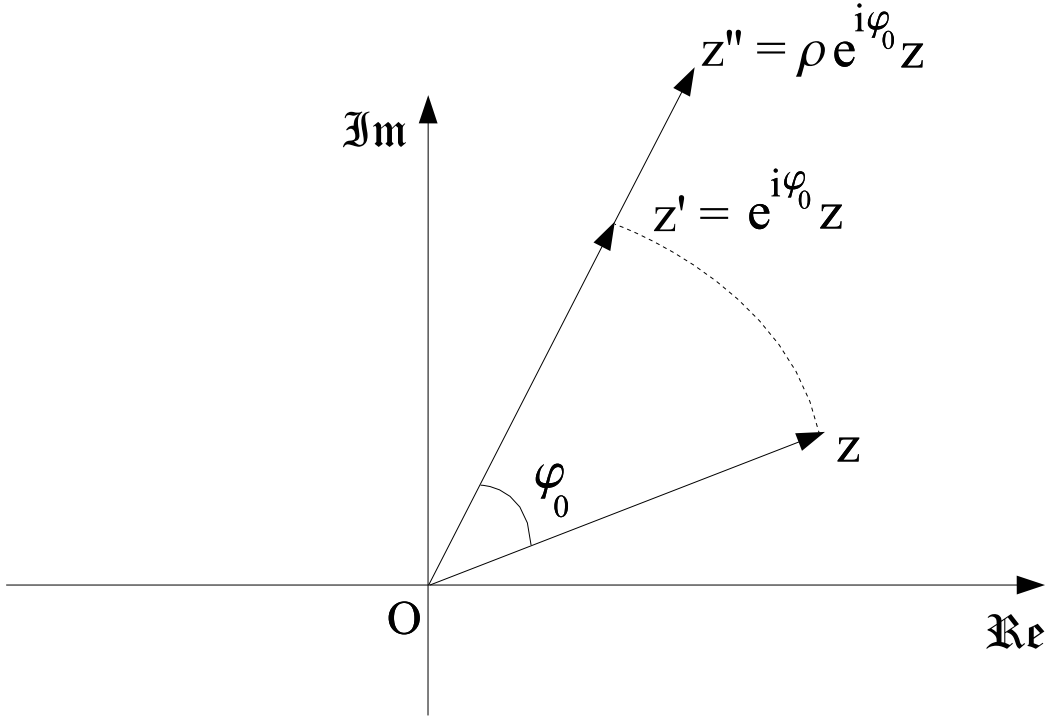


Figura 18: Rotoomotetia nel piano complesso

se scambiamo l'ordine di composizione, si trova che:

$$\begin{cases} z' = e^{i\varphi_0} z \\ z'' = \lambda z' \end{cases} \Rightarrow z'' = \lambda e^{i\varphi_0} z ;$$

poiché l'operazione di moltiplicazione tra numeri complessi gode della proprietà commutativa, le due trasformazioni ottenute commutano (in poche parole, stiamo moltiplicando il numero z per i numeri λ e $e^{i\varphi_0}$, e quindi si ha $(z \cdot \lambda) \cdot e^{i\varphi_0} = (z \cdot e^{i\varphi_0}) \cdot \lambda$).

Osservazione 26. Considerando la (73), si nota che si può scrivere:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_0 & -y_0 \\ y_0 & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \rho \cos \varphi_0 & -\rho \sin \varphi_0 \\ \rho \sin \varphi_0 & \rho \cos \varphi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\ &= \rho \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 & -\sin \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 & -\sin \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (74)$$

Scambiando l'ordine di moltiplicazione delle due matrici notiamo che il risultato non varia (le due matrici commutano):

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi_0 & -\sin \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 & -\sin \varphi_0 \\ \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Rotoomotetie

In generale, possiamo comporre una rotazione di un angolo φ attorno ad un punto z_0 con un'omotetia di centro z_0 e rapporto λ :

$$\begin{cases} z' = e^{i\varphi}(z - z_0) + z_0 \\ z'' = \lambda(z' - z_0) + z_0 \end{cases} \Rightarrow z'' = \lambda e^{i\varphi}(z - z_0) + z_0 \quad (75)$$

la trasformazione che ne deriva è dunque composizione di quattro trasformazioni (si veda la figura 19):

- Traslazione τ di vettore $-z_0$
- Rotazione R_φ di angolo φ attorno ad O
- Omotetia di rapporto λ con centro O
- Traslazione τ di vettore z_0

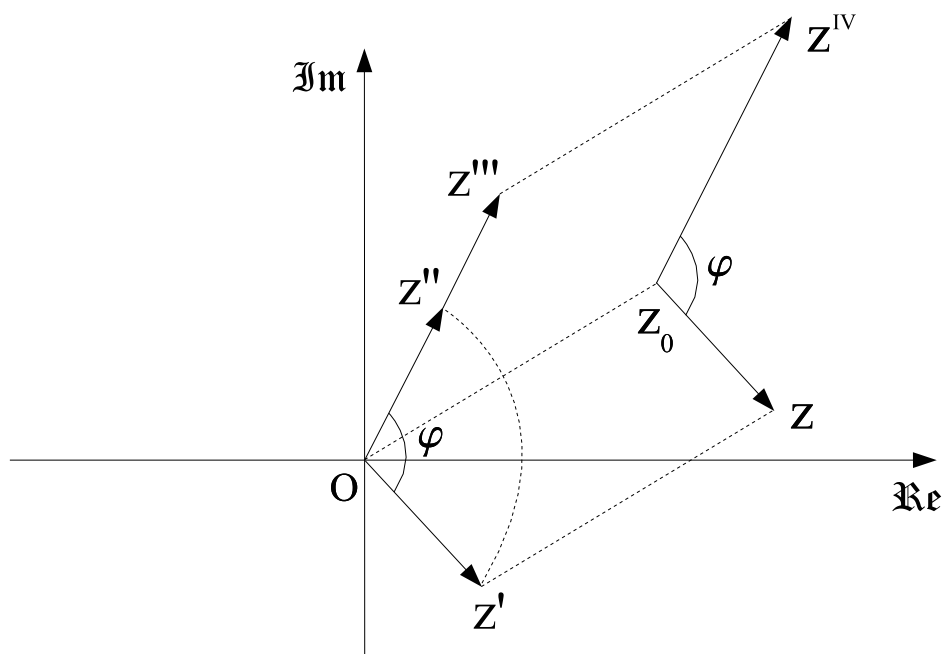


Figura 19: Rotoomotetia con centro diverso da O

Si noti che anche in questo caso l'ordine di composizione non conta (discende infatti dalla proprietà commutativa della moltiplicazione) e che l'unico punto fisso della trasformazione è z_0 (supponiamo che $\lambda e^{i\varphi} \neq 1$); infatti abbiamo:

$$\lambda e^{i\varphi}(z - z_0) + z_0 = z \Rightarrow z = \frac{(1 - \lambda e^{i\varphi})z_0}{1 - \lambda e^{i\varphi}} \Rightarrow z = z_0 .$$

Se ora componiamo un'omotetia di centro z_0 e rapporto λ con una rotazione di angolo φ attorno a z_1 (con $z_0 \neq z_1$) si ha:

$$\begin{cases} z' = \lambda(z - z_0) + z_0 \\ z'' = e^{i\varphi}(z' - z_1) + z_1 \end{cases} \Rightarrow z'' = e^{i\varphi}(\lambda(z - z_0) + z_0 - z_1) + z_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z'' = \lambda e^{i\varphi} z + e^{i\varphi} z_0(1 - \lambda) + z_1(1 - e^{i\varphi}) \quad (76)$$

cerchiamo i punti fissi della trasformazione ottenuta (nell'ipotesi $\lambda e^{i\varphi} \neq 1$):

$$z = z'' \Rightarrow z = \lambda e^{i\varphi} z + e^{i\varphi} z_0(1 - \lambda) + z_1(1 - e^{i\varphi}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^* = \frac{e^{i\varphi} z_0(1 - \lambda) + z_1(1 - e^{i\varphi})}{1 - \lambda e^{i\varphi}};$$

si verifica facilmente che risulta

$$z'' = \lambda e^{i\varphi}(z - z^*) + z^* \quad (77)$$

cioè la trasformazione (76) risulta essere una rotoomotetia di centro z^* , con angolo φ e rapporto λ .

Se scambiamo l'ordine di composizione otteniamo ancora una rotoomotetia sempre di angolo φ e rapporto λ ma con un punto fisso diverso (in generale) da z^* .

Osservazione 27. Dalla (75) deriva che una rotoomotetia generica può essere riscritta nel seguente modo:

$$z \mapsto \lambda e^{i\varphi} z + b. \quad (78)$$

Ma è possibile ribaltare il discorso, affermando che una trasformazione del tipo (78) è una rotoomotetia di rapporto λ , angolo φ e centro z_0 fornito dalla relazione

$$z_0 = \frac{b}{1 - \lambda e^{i\varphi}} \quad \text{se } \lambda e^{i\varphi} \neq 1.$$

Esempio 28. Esercizio da proporre: scrivere la rotoomotetia di centro $(2, -3)$ e rapporto 4 utilizzando i numeri complessi e comporla con la traslazione di vettore $(-6, -1)$.

Similitudini e coppie di punti

Analogamente al caso delle isometrie, dati quattro punti z_1, z_2, w_1 e w_2 , se vogliamo trovare una rotoomotetia tale che

$$\begin{cases} z_1 \mapsto w_1 \\ z_2 \mapsto w_2 \end{cases}$$

dobbiamo imporre che

$$\begin{cases} \lambda e^{i\varphi} z_1 + b = w_1 \\ \lambda e^{i\varphi} z_2 + b = w_2 \end{cases}$$

sottraendo le due equazioni si trova che

$$\lambda e^{i\varphi} = \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1} \Rightarrow \lambda = \left| \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1} \right| = \frac{|w_2 - w_1|}{|z_2 - z_1|} \quad (79)$$

mentre φ è la fase del numero complesso $(w_2 - w_1)/(z_2 - z_1)$.

Il numero b si ricava per differenza dalla prima (o dalla seconda):

$$b = w_1 - \lambda e^{i\varphi} z_1 = w_1 - \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1} z_1 ;$$

in definitiva l'equazione della rotomotetia è

$$z \mapsto \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1} (z - z_1) + w_1 . \quad (80)$$

Osservazione 29. La (80) è identica alla (62); questa volta però in generale risulta $|z_2 - z_1| \neq |w_2 - w_1|$ ed il loro rapporto è uguale a λ (si veda infatti la (79)).

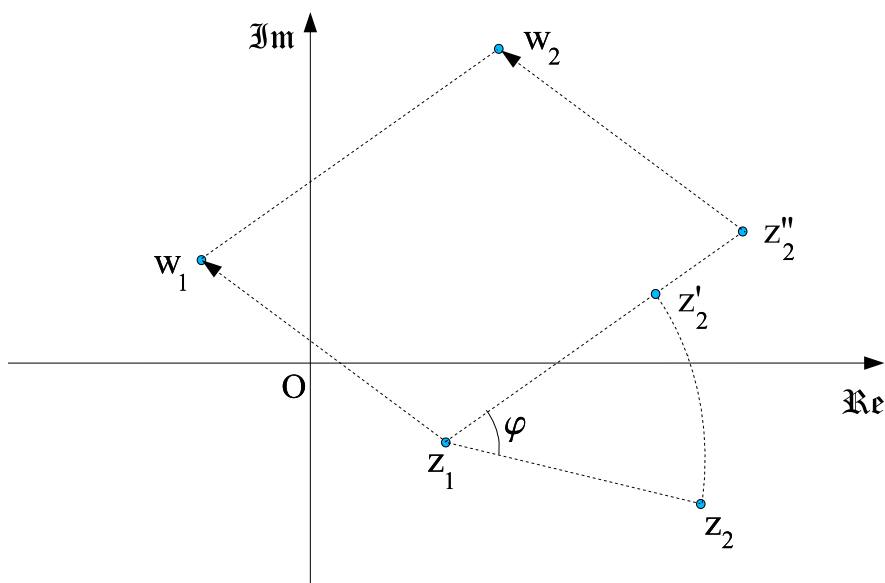


Figura 20: Costruzione geometrica della rotomotetia che manda z_1 in z_2 e w_1 in w_2

Esempio 30. Esercizio da proporre alla classe: scrivere la similitudine diretta che associa al segmento di estremi $(2, 3)$ e $(-1, -1)$ quello avente come estremi $(3, 4)$ e $(5, 8)$: si può dire che è un'isometria?

Affinità e numeri complessi

E' molto interessante osservare cosa succede quando vogliamo interpretare la trasformazione

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases} \quad (81)$$

con i numeri complessi; infatti la moltiplicazione per un numero complesso

$$(x_0 + iy_0)(x + iy) = (x_0x - y_0y) + i(y_0x + x_0y)$$

corrisponde alla trasformazione

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & -y_0 \\ y_0 & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (82)$$

La trasformazione (81) non può essere messa nella forma data dalla (82) in quanto

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -1 \\ y_0 = 0 \\ x_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{ sistema impossibile.}$$

Osservazione 31. La (81) non conserva il rapporto delle lunghezze di segmenti:

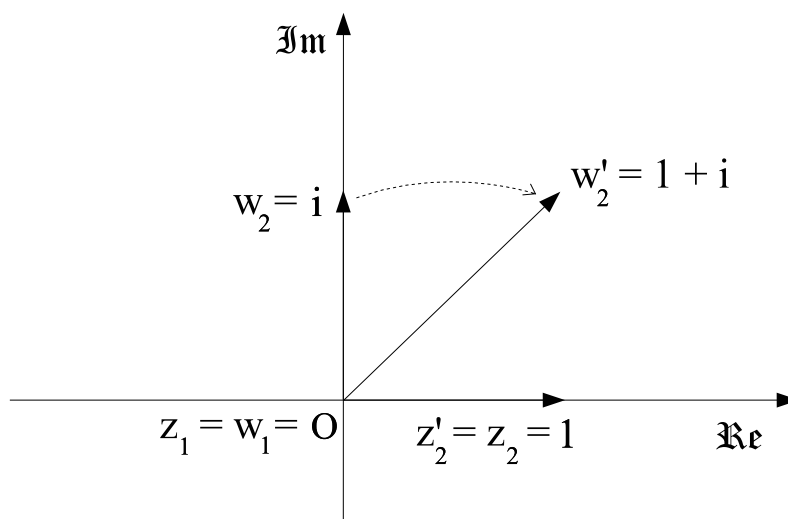


Figura 21: Affinità che manda z_1 in z_2 e w_1 in w_2

se infatti consideriamo i due segmenti di estremi

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z'_1 = 0 \\ z'_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1 = 0 \\ w_2 = i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w'_1 = 0 \\ w'_2 = 1 + i \end{cases}$$

per le lunghezze dei segmenti risulta:

$$|z_2 - z_1| = 1 \ ; \ |z'_2 - z'_1| = 1 \ ; \ |w_2 - w_1| = 1 \ ; \ |w'_2 - w'_1| = \sqrt{2}.$$

Verifica scritta proposta

1) Scrivere l'equazione della rotazione di centro $(1, 2)$ e angolo pari a 45° (in senso antiorario) utilizzando i numeri complessi. Successivamente scrivere le equazioni delle due trasformazioni ottenute mediante la composizione di questa rotazione con la traslazione di vettore $(3, 1)$, verificando che sono distinte.

2) Scrivere l'equazione della simmetria assiale rispetto alla retta passante per il punto $(2, 0)$ e inclinata di un angolo pari a 30° rispetto all'asse delle ascisse. E' possibile scrivere l'equazione della simmetria in un altro modo? Se la risposta è affermativa, fai un esempio.

3) Comporre la simmetria trovata al punto 2) con la traslazione di vettore $(1, 1)$ e verificare che si tratta di una glissoriflessione.

Facoltativo: individuare il vettore di traslazione della glissoriflessione parallelo alla retta di simmetria.

4) Comporre nell'ordine scritto le due trasformazioni:

$$z \mapsto \bar{z} - 3i = z' \quad ; \quad z' \mapsto iz' - 3 = z''$$

e interpretare geometricamente la situazione.

5) Scrivere l'equazione dell'omotetia di centro O e rapporto 2; successivamente comporre (in entrambi i modi) tale trasformazione con la traslazione di vettore $(-2, 4)$. Dopo aver verificato che si tratta di due omotetie, trovarne centro e rapporto.

6) Scrivere con i numeri complessi la trasformazione:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x - 3y \\ 3x + 2y \end{bmatrix}$$

e darne un'interpretazione geometrica.