

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN.
DIPARTIMENTO DI FISICA "GALILEO GALILEI"



LAUREA TRIENNALE IN FISICA

Integrale di Feynman sui Cammini e Processi Stocastici

Relatore: Prof. Pieralberto Marchetti
Laureando: Cristiano De Nobili

ANNO ACCADEMICO 2008/2009

Indice

0.1	Introduzione	1
0.2	Derivazione dell'Integrale sui Cammini di Feynman attraverso la Formula di Trotter.	1
0.3	Formulazione di Feynman della Meccanica Quantistica: Postulati.	4
0.4	Natura e Caratteristiche dei Cammini di Feynman.	5
0.5	Ambiguità di Quantizzazione dell'Integrale di Feynman	7
0.6	Equivalenza tra la Formulazione di Feynman e la Formulazione Standard della MQ	8
0.7	Problematiche di Convergenza dell'Integrale di Feynman	9
0.8	La Formula di Feynman-Kac e la Misura di Wiener.	10
0.9	Equazione del Calore e Moto Browniano	12
0.10	Integrale di Feynman e Integrale di Wiener	14
0.11	Equazione di Fokker-Planck e Fluttuazioni Quantistiche	15
.1	Appendice A: Derivazione dell'Integrale di Feynman attraverso l'Operatore Normalmente Ordinato	17
.2	Appendice B: un paio di Definizioni e un Teorema	19
	Bibliografia	20
.3	Ringraziamenti	20

0.1 Introduzione

In questo lavoro si presenta ed elabora concettualmente la *Formulazione di Feynman della Meccanica Quantistica* (MQ), i *problemi di convergenza dell'integrale sui cammini* e la relazione di questa formulazione con i *processi stocastici*. Dapprima, nella sezione {0.2}, viene derivato l'integrale sui cammini di Feynman attraverso l'utilizzo della formula di Trotter e successivamente, nella sezione {0.3}, sono presentati i postulati della formulazione di Feynman della MQ. Sono poi studiati i *cammini di Feynman* e le loro caratteristiche peculiari, che offrono uno stretto paragone con i processi stocastici. Nelle sezioni {0.7}, {0.8} vengono prima mostrate le problematiche di convergenza dell'integrale di Feynman e poi, seguendo la dimostrazione di *Nelson del teorema di Kolmogorov*, l'approccio di *Kac* che permette di definire rigorosamente una misura per l'integrale: *la misura di Wiener*. Nella sezione {0.9} è mostrata l'*equazione del calore* e la sua stretta relazione con il *moto browniano*, esempio più semplice di processo stocastico. Ciò ci permette, nelle due sezioni successive, di paragonare direttamente prima l'integrale di Feynman con quello di Wiener e poi l'equazione di Schrödinger con quella di Fokker-Plank. Da questo confronto si conclude che l'evoluzione temporale di una particella quantistica può essere descritta come un'evoluzione deterministica perturbata da fluttuazioni quantistiche.

0.2 Derivazione dell'Integrale sui Cammini di Feynman attraverso la Formula di Trotter.

Consideriamo inizialmente l'*equazione di Schrödinger* di una particella non relativistica in moto unidimensionale in presenza di un potenziale scalare $V(x)$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + V(x)\psi(x, t) \quad (1)$$

Un'arbitraria soluzione di tale equazione, individuata dalla condizione iniziale $\psi(x_0, t_0)$, può essere scritta attraverso la *Funzione di Green* o anche detta in meccanica quantistica *propagatore* $\langle x, t | x_0, t_0 \rangle$ ¹:

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \langle x, t | x_0, t_0 \rangle \psi(x_0, t_0) \quad (2)$$

Il termine *propagatore* indica il significato fisico di tale funzione; infatti essa rappresenta l'ampiezza di probabilità di passare da x_0 all'istante t_0 a x all'istante t , cioè da (x_0, t_0) a (x, t) . L'importanza del propagatore e dell'approccio di Feynman è che tale oggetto matematico permette di calcolare un'arbitraria soluzione dell'equazione di Schrödinger, senza dover risolvere esplicitamente la (1).

Ciò che faremo ora è indagare la natura di tale propagatore; otterremo così l'integrale di Feynman. Sia \hat{H} l'operatore hamiltoniana e assumiamo $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$, dove \hat{T} rappresenta l'operatore energia cinetica e \hat{V} quello energia potenziale. Fissiamo l'attenzione sul propagatore $\langle x'', t'' | x', t' \rangle$ dallo stato (x', t') a (x'', t'') .

¹In questo elaborato successivamente il propagatore verrà indicato anche con $G(x, x_0; t, t_0)$. Si ha che $G(x, x_0; t_0, t_0) = \delta(x - x_0)$, come è facile da verificare.

Esso può anche essere scritto:

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = \langle x'' | e^{-\frac{i}{\hbar}(t''-t')(\widehat{T}+\widehat{V})} | x' \rangle \quad (3)$$

Poichè \widehat{T} e \widehat{V} non commutano si ha che $e^{\widehat{T}+\widehat{V}} \neq e^{\widehat{T}} \cdot e^{\widehat{V}}$, ma vale la seguente *Formula di Trotter*:

$$e^{\widehat{T}+\widehat{V}} = \lim_{N \rightarrow +\infty} (e^{\widehat{T}/N} e^{\widehat{V}/N})^N \quad (4)$$

Nel nostro caso dunque, ponendo $\lambda = \frac{i}{\hbar}(t'' - t')$:

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \langle x'' | (e^{-\lambda \widehat{T}/N} e^{-\lambda \widehat{V}/N})^N | x' \rangle \quad (5)$$

Utilizzando ora la relazione di completezza per gli autostati generalizzati dell'operatore posizione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x\rangle \langle x| dx = 1$$

e inserendo tale espressione nell'equazione (5), fra gli N fattori $e^{-\lambda \widehat{T}/N} e^{-\lambda \widehat{V}/N}$ si ottiene per il propagatore tale espressione:

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^{N-1} dx_i \right) \prod_{j=0}^{N-1} \langle x_{j+1} | e^{-\lambda \widehat{T}/N} e^{-\lambda \widehat{V}/N} | x_j \rangle \quad (6)$$

Tale espressione esprime il propagatore $\langle x'', t'' | x', t' \rangle$ in funzione del *propagatore infinitesimo* $\langle x_{j+1} | e^{-\lambda \widehat{T}/N} e^{-\lambda \widehat{V}/N} | x_j \rangle$.

Vogliamo ora calcolare tale *propagatore infinitesimo*. Siccome $\widehat{V} = V(x)$, allora si ha:

$$\langle x_{j+1} | e^{-\lambda \widehat{T}/N} e^{-\lambda \widehat{V}/N} | x_j \rangle = e^{-\lambda V(x_j)/N} \langle x_{j+1} | e^{-\lambda \widehat{T}/N} | x_j \rangle \quad (7)$$

Analogamente alla relazione di completezza per gli autostati generalizzati dell'operatore posizione, abbiamo per quelli dell'operatore impulso:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |p\rangle \langle p| dp = 1$$

Ciò ci permette di scrivere:

$$\langle x_{j+1} | e^{-\lambda \widehat{T}/N} | x_j \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp_j \langle x_{j+1} | e^{-\lambda \widehat{T}/N} | p_j \rangle \langle p_j | x_j \rangle$$

Sapendo che nel caso considerato $\widehat{T} = \widehat{p}^2/2m$ e che tale operatore è diagonale nella rappresentazione dell'impulso:

$$\langle x_{j+1} | e^{-\lambda \widehat{T}/N} | p_j \rangle = e^{-\lambda p_j^2/2mN} \langle x_{j+1} | p_j \rangle$$

Quindi:

$$\langle x_{j+1} | e^{-\lambda \widehat{T}/N} | x_j \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp_j e^{-\lambda p_j^2/2mN} \langle x_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | x_j \rangle$$

Ma un'espressione del tipo $\langle x|p\rangle$ rappresenta l'autofunzione impulso nella rappresentazione delle coordinate, quindi (per una particella libera):

$$\langle x_{j+1}|p_j\rangle\langle p_j|x_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{(i/\hbar)p_jx_{j+1}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-(i/\hbar)p_jx_j}$$

Si ottiene dunque l'integrale gaussiano

$$\langle x_{j+1}|e^{-\lambda\hat{T}/N}|x_j\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_j e^{-\lambda p_j^2/2mN} e^{ip_j(x_{j+1}-x_j)/\hbar}$$

e integrando si ottiene:

$$\langle x_{j+1}|e^{-\lambda\hat{T}/N}|x_j\rangle = \left[\frac{mN}{2\pi\hbar^2\lambda}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\{-(m/2)(x_{j+1}-x_j)^2N/\lambda\hbar\} \quad (8)$$

Inserendo l'eq.(8) nell'eq.(7), otteniamo per il *propagatore infinitesimo* l'espressione

$$\langle x_{j+1}|e^{-\lambda\hat{T}/N}e^{-\lambda\hat{V}/N}|x_j\rangle = \left[\frac{mN}{2\pi\hbar^2\lambda}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left\{(i/\hbar)\epsilon\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_{j+1}-x_j}{\epsilon}\right)^2 - V(x_j)\right]\right\} \quad (9)$$

Con $\epsilon = \frac{(t''-t')}{N}$. Questa forma del propagatore infinitesimo fu suggerita già da *Dirac*[6], tuttavia egli non fu in grado di collegarla con il propagatore $\langle x'', t''|x', t'\rangle$ relativo ad un tempo finito. E' merito di *Feynman* il fatto di aver espresso il propagatore come *infinite convoluzioni* del propagatore infinitesimo secondo l'eq.(6) [2]. Utilizzando dunque l'eq.(9)

$$\langle x'', t''|x', t'\rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[\frac{mN}{2\pi\hbar^2\lambda}\right]^{\frac{N}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^{N-1} dx_i\right) \prod_{j=0}^{N-1} \exp\left\{(i/\hbar)\epsilon\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_{j+1}-x_j}{\epsilon}\right)^2 - V(x_j)\right]\right\} \quad (10)$$

Utilizzando le proprietà della funzione esponenziale si ha che il prodotto si trasforma in somma e dunque

$$\langle x'', t''|x', t'\rangle = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[\frac{mN}{2\pi\hbar^2\lambda}\right]^{\frac{N}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^{N-1} dx_i\right) \exp\left\{(i/\hbar)\epsilon \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_{j+1}-x_j}{\epsilon}\right)^2 - V(x_j)\right]\right\} \quad (11)$$

Questa è la forma finale del *Propagatore Quantistico*, espresso come *Integrale di Feynman* [1]. Il limite $N \rightarrow \infty$ equivale a $\epsilon \rightarrow 0$.

A questo punto un *Cammino di Feynman* (discretizzato) è rappresentato da una spezzata $\Gamma_N(\dots, x(t_k), \dots)$ di vertici $\{x', x_1, \dots, x_k, \dots, x_{N-1}, x''\}$, con $x(t') = x', x(t_k) = x_k, x(t'') = x''$. Tale spezzata si ottiene discretizzando l'intervallo di tempo considerato $(t'' - t')$ in N-1 punti intermedi equidistanti e spaziat di ϵ . Se indichiamo con $C_N(x', t'; x'', t'')$ l'insieme di tutte le Γ_N con estremi fissi $x(t') = x', x(t'') = x''$, allora l'eq.(11) indica, per N fissato, la somma di $\exp\{\dots\}$ su C_N^2 .

²Notiamo infatti che tale integrazione non coinvolge i punti estremi, ma solo quelli intermedi.

Sapendo che $(\frac{x_{j+1}-x_j}{\epsilon})^2 = (\frac{x(t_{j+1})-x(t_j)}{\epsilon})^2$ e che l'azione classica è

$$S[x(\cdot)]_{t'}^{t''} = \int_{t'}^{t''} dt \left[\frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 - V(x(t)) \right] \quad (12)$$

allora è facile vedere che il termine $\epsilon \sum[\dots]$ dell'eq.(11), ad N fissato, è proprio tale azione classica calcolata lungo la spezzata Γ_N .

Nel limite $\lim_{N \rightarrow +\infty}$, la spezzata Γ_N diventa una curva continua $x(t)$ con stessi estremi fissi. L'insieme $C_N(x', t'; x'', t'')$ diventa lo spazio dei cammini $\mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$, cioè l'insieme delle funzioni reali continue $x(t)$ con estremi $x(t') = x', x(t'') = x''$. L'eq.(11) può dunque essere riscritta in maniera poco rigorosa:

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = \int_{\mathcal{C}} \mathcal{D}x(t) \cdot \exp\{(i/\hbar)S[x(\cdot)]_{t'}^{t''}\} \quad (13)$$

$$\mathcal{D}x(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left[\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right]^{N/2} \prod_{i=1}^{N-1} dx(t_i)$$

Nell'eq.(13) si vede che per $N \rightarrow \infty$ il termine $\mathcal{D}x(t)$ è divergente, mentre il termine $\exp\{(i/\hbar)S[x(\cdot)]_{t'}^{t''}\}$, oscillando rapidamente, tende ad eliminare questa divergenza facendo sì che nell'espressione (11) il limite esiste. Tuttavia, come sarà mostrato nella sezione 0.7, il prodotto di questi due fattori non è in grado di definire una misura per l'integrale funzionale. Quindi si ha che l'espressione (13) non è matematicamente corretta. Per il momento però trascuriamo questo aspetto e ci concentriamo sul significato fisico di questo risultato, che verrà espresso nella prossima sezione.

0.3 Formulazione di Feynman della Meccanica Quantistica: Postulati.

Consideriamo una particella \mathcal{S} descritta dall'azione classica (12) e fissiamo l'attenzione sull'evento A : \mathcal{S} va da (x', t') a (x'', t'') . L'ampiezza $\langle x'', t'' | x', t' \rangle$ associata a questo evento è il propagatore dell'equazione di Schrödinger nelle variabili (x'', t'') .

Postulato 1 Tutte le alternative disgiunte (cioè indipendenti mutuamente esclusive) secondo le quali l'evento A può realizzarsi sono descritte da cammini $x(t) \in \mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$.

L'idea fondamentale di Feynman è di associare un'ampiezza di probabilità ad ogni alternativa disgiunta relativa all'evento A in questione. Nella formulazione standard si associa invece un'ampiezza di probabilità, $\psi(x, t)$, alla posizione di una particella ad un particolare istante.

Esprimiamo l'ampiezza che \mathcal{S} si muova lungo $x(t)$ con $\langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)]$.

Postulato 2 I cammini $x(t) \in \mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$ contribuiscono ugualmente in modulo, ma la fase dei loro contributi è data dall'azione classica (in unità di \hbar), cioè dall'integrale temporale della lagrangiana calcolato lungo il cammino.

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)] = \exp\{(i/\hbar)S[x(\cdot)]_{t'}^{t''}\}$$

Il terzo postulato è motivato dal fatto che le ampiezze quantistiche soddisfano il *Principio di Sovrapposizione*. Tale principio implica che l'*ampiezza totale* $\langle x'', t'' | x', t' \rangle$ per l'evento A debba essere la somma delle ampiezze $\langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)]$ relative ad ogni singola alternativa disgiunta. Quindi:

Postulato 3 *Il Propagatore Quantistico è dato da*

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = \int_{\mathcal{C}} \mathcal{D}x(t) \langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)].$$

Questa ultima espressione è l'eq.(13).

0.4 Natura e Caratteristiche dei Cammini di Feynman.

I Cammini di Feynman hanno significato fisico?

Consideriamo una regione \mathcal{R} dello spazio dei cammini $\mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$, $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}$. Partendo dai postulati, vogliamo mostrare che non esiste alcuna distribuzione classica di probabilità definita sullo spazio dei cammini \mathcal{C} . Consideriamo un generico cammino $\tilde{x}(t) \in \mathcal{C}$. La probabilità che la particella \mathcal{S} si muova lungo tale cammino $\tilde{x}(t)$ è

$$P(x', t'; x'', t'')[\tilde{x}(t)] = |\langle x'', t'' | x', t' \rangle[\tilde{x}(t)]|^2 \quad (14)$$

Ora secondo il calcolo classico delle probabilità si dovrebbe avere che la probabilità che il generico cammino sia contenuto in \mathcal{R} è:

$$Prob\{\tilde{x}(t) \in \mathcal{R}\} = \int_{\mathcal{R}} \mathcal{D}x(t) P(x'', t''; x', t')[x(\cdot)] \quad (15)$$

Seguendo invece i postulati di Feynman il risultato è diverso; vediamo in che senso. Per il Postulato 3 l'ampiezza di probabilità di trovare il generico cammino $\tilde{x}(t)$ nella regione $\mathcal{R} \in \mathcal{C}$ è:

$$Amp\{\tilde{x}(t) \in \mathcal{R}\} = \int_{\mathcal{R}} \mathcal{D}x(t) \langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)].$$

Dunque dall'eq.(14) segue che:

$$Prob\{\tilde{x}(t) \in \mathcal{R}\} = \left| \int_{\mathcal{R}} \mathcal{D}x(t) \langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)] \right|^2. \quad (16)$$

Abbiamo dunque che l'eq.(15) è differente dall'eq.(16)

$$\int_{\mathcal{R}} \mathcal{D}x(t) |\langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)]|^2 \neq \left| \int_{\mathcal{R}} \mathcal{D}x(t) \langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)] \right|^2. \quad (17)$$

Questo risultato sottolinea la non validità del calcolo delle probabilità classico in MQ. Ciò suggerisce che i cammini di Feynman non possono essere visti come possibili traiettorie descritte da una particella in accordo con il senso comune. Per sottolineare la non realtà di tali cammini lo stesso Feynman suggerisce di pensare che la particella percorra simultaneamente tutti i cammini³. E' noto infatti che in MQ non è possibile attribuire proprietà fisiche ben definite ad oggetti non osservati!

³Questa idea è analoga all'esperimento delle due fenditure: l'elettrone passa per entrambe.

Caratteristiche dei *Cammini di Feynman*

Iniziamo a considerare l'eq.(11) e notiamo che ai fini dell'integrazione è importante il valore della fase della funzione $\exp\{i\dots\}$. Se la fase varia molto rapidamente si ha che i vari contributi si cancellano a vicenda e che quindi i cammini che determinano tale fase non contribuiscono in modo essenziale alla somma. In modo semplice può essere visto che il contributo fondamentale è dato da quei fattori per cui il termine

$$\epsilon \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\epsilon} \right)^2 \text{ si mantiene finito per } \epsilon \rightarrow 0$$

Da questa considerazione deriva un importante risultato: *I cammini che danno un contributo non nullo all'integrale di Feynman sono solo quelli che godono della proprietà:*

$$\Delta x(t) \sim (\Delta t)^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

Tali cammini (appunto i *Cammini di Feynman*) risultano essere *continui*, ma *non differenziabili*, infatti:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} = \infty$$

Per tale motivo si dice che essi siano *frattali* con dimensione di Hausdorff⁴ uguale a 2. Questo aspetto sarà rilevante successivamente quando analizzeremo il moto Browniano.

E' forse utile a questo punto fare un confronto con una traiettoria liscia $\bar{x}(t)$ (differenziabile) così da rendere evidente il carattere dei cammini di Feynman.

$$\Delta \bar{x}(t) = O(\Delta t) \text{ traiettoria liscia}$$

$$\Delta x(t) = O(\Delta t^{\frac{1}{2}}) \text{ cammino di Feynman}$$

si ha dunque che per $\Delta t \rightarrow 0$ vale $O(\Delta t^{\frac{1}{2}}) \gg O(\Delta t)$, e quindi si comprende che la funzione $x(t)$ che descrive un cammino di Feynman varia molto più rapidamente di una funzione differenziabile. Per questo motivo si dice che:

I cammini di Feynman presentano un carattere fluttuante.

Essi appaiono come se il punto rappresentativo fluttuasse casualmente attorno ad una traiettoria liscia. Siccome questo andamento può rappresentare fisicamente gli effetti quantistici nell'evoluzione temporale descritta dall'integrale, si usa spesso paragonare l'eq.(18) al Principio di Indeterminazione.

Di fatti, precisando ulteriormente l'analisi sopra fatta, se desideriamo una fase dell'esponenziale che sia dell'ordine dell'unità deve essere:

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \approx \frac{\hbar}{m}$$

dunque essendo che

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \Delta x \approx \frac{\hbar}{m} \implies \Delta v \cdot \Delta x \approx \frac{\hbar}{m}$$

otteniamo appunto il *Principio di Indeterminazione*:

$$\Delta p \cdot \Delta x \approx \hbar.$$

⁴vedi definizione in *Appendice C*.

0.5 Ambiguità di Quantizzazione dell'Integrale di Feynman

Fino ad ora abbiamo ragionato utilizzando l'azione classica data dall'eq.(12). Le altre equazioni ottenute valgono anche nel caso tridimensionale per un'azione classica del tipo:

$$S[x(\cdot)]_{t'}^{t''} = \int_{t'}^{t''} dt \left[\frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 + A_i(x(t), t) \dot{x}_i(t) - \Phi(x(t), t) \right] \quad (19)$$

con $A(x(t), t)$ un generico potenziale vettore e $\Phi(x(t), t)$ generico potenziale scalare. Tuttavia c'è un'importante differenza che determina appunto l'*ambiguità di quantizzazione*. Ponendo l'azione (19) nell'eq.(11), otteniamo in aggiunta un termine del tipo $\frac{(x_{j+1}-x_j)}{\epsilon} A(x_j^*)$, dove x_j^* sta ad indicare che non è chiaro in quale particolare punto dell'intervallo $[x_j, x_{j+1}]$ vada calcolato x_j^* . Nel caso dell'azione classica (12) la sommatoria presente nell'eq.(11) definisce formalmente l'integrale $S[x(\cdot)]$ come *Integrale di Riemann*, che come tale non dipende dalla particolare scelta di x_j^* nell'intervallo. Mostriamo ora invece che non vale un analogo discorso per quanto riguarda l'azione (19). Consideriamo le due somme relative alle due situazioni estreme $x_j^* = x_j$ e $x_j^* = x_{j+1}$:

$$\begin{aligned} & \epsilon \sum_{j=1}^{N-1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\epsilon} \right)^2 + \frac{(x_{j+1} - x_j)}{\epsilon} A(x_j) - \Phi(x_j) \right] \\ & \epsilon \sum_{j=1}^{N-1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{j+1} - x_j}{\epsilon} \right)^2 + \frac{(x_{j+1} - x_j)}{\epsilon} A(x_{j+1}) - \Phi(x_j) \right] \end{aligned}$$

Si vede facilmente che nel limite $\epsilon \rightarrow 0$ la loro differenza è:

$$(x_{j+1} - x_j)[A(x_{j+1}) - A(x_j)]$$

Dunque se, come supponiamo, $[A(x_{j+1}) - A(x_j)] \sim (x_{j+1} - x_j)$, allora si ha che la differenza delle due sommatorie è $O((x_{j+1} - x_j)^2)$. Se i cammini di Feynman fossero anche differenziabili allora si avrebbe che $(x_{j+1} - x_j) \sim \epsilon$ e quindi tale differenza sarebbe $O(\epsilon^2)$, perciò le due sommatorie differirebbero per termini infinitesimi di ordine superiore. Tuttavia sappiamo che i cammini di Feynman non sono differenziabili e siccome vale la relazione (18) si ha che la differenza tra le somme è $O(\epsilon)$, cioè dello stesso ordine di ϵ .

Conseguenza di questo fatto è che:

si ha una differenza non trascurabile se si considera $A(x_{j+1})$ o $A(x_j)$.

Dipendendo dunque l'integrazione dalla particolare scelta di x_j^* si ha che l'integrale del propagatore con l'azione (19) non è neppure formalmente un integrale di Riemann, ma un oggetto simile agli integrali stocastici.

0.6 Equivalenza tra la Formulazione di Feynman e la Formulazione Standard della MQ

Utilizzando l'eq.(2) e il propagatore quantistico dell'eq.(13) calcolato da (x_k, t) a $(x_{k+1}, t + \epsilon)$, con ϵ infinitesimo (cioè $\langle x_{k+1}, t + \epsilon | x_k, t \rangle$), otteniamo l'equazione [2]:

$$\psi(x_{k+1}, t + \epsilon) = \int \exp[(i/\hbar)S(x_{k+1}, x_k)]\psi(x_k, t)dx_k/A \quad (20)$$

dove A è il fattore di normalizzazione. Tale equazione è corretta solo nel limite $\epsilon \rightarrow 0$ e noi la considereremo esatta solo al primo ordine in ϵ . Una giustificazione è data dal fatto che se consideriamo i fattori dell'eq.(11) che ci portano ad un intervallo finito di tempo T , essi sono T/ϵ . Se in ognuno di essi, per esempio quello rappresentato nell'equazione (20), c'è un errore di ordine ϵ^2 , allora l'errore totale risultante è $(\epsilon^2 T/\epsilon) = \epsilon T$ e tende ad annullarsi per $\epsilon \rightarrow 0$.

Ciò che si vuole mostrare è che tale eq.(20) equivale, nei limiti indicati, all'Equazione di Schrödinger di una particella unidimensionale in un potenziale $V(x)$.

Esplicitando l'azione classica unidimensionale otteniamo:

$$\psi(x_{k+1}, t + \epsilon) = \int \exp \left\{ \frac{i\epsilon}{\hbar} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\epsilon} \right)^2 - V(x_{k+1}) \right] \right\} \psi(x_k, t) dx_k / A.$$

Ci è comodo ora porre: $x_{k+1} = x$, $x_{k+1} - x_k = \xi$ quindi $x_k = x - \xi$. Dunque:

$$\psi(x, t + \epsilon) = \int \exp \left[\frac{im\xi^2}{2\epsilon\hbar} - \frac{i\epsilon V(x)}{\hbar} \right] \psi(x - \xi, t) d\xi / A$$

Ora essendo ϵ molto piccolo allora l'esponenziale di $(im\xi^2/2\hbar\epsilon)$ oscilla molto rapidamente nell'integrazione di ξ , eccetto che nella regione in cui $\xi \approx 0$. Più precisamente ξ dell'ordine di $(\hbar\epsilon/m)^{\frac{1}{2}}$. Siccome $\psi(x - \xi, t)$ ha una dipendenza da ξ meno marcata, allora la regione in cui l'esponenziale oscilla molto contribuirà poco all'integrazione. Solo piccoli valori di ξ sono rilevanti e quindi si può sviluppare il serie di Tylor la funzione $\psi(x - \xi, t)$:

$$\psi(x, t + \epsilon) = \exp \left(-\frac{i\epsilon V(x)}{\hbar} \right) \int \exp \left(\frac{im\xi^2}{2\hbar\epsilon} \right) \cdot \left[\psi(x, t) - \xi \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} + \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \dots \right] d\xi / A. \quad (21)$$

Sapendo il valore degli integrali: $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(im\xi^2/2\hbar\epsilon) d\xi = (2\pi i \hbar \epsilon / m)^{\frac{1}{2}}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(im\xi^2/2\hbar\epsilon) \xi d\xi = 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(im\xi^2/2\hbar\epsilon) \xi^2 d\xi = (\hbar \epsilon i / m) (2\pi i \hbar \epsilon / m)^{\frac{1}{2}}$. E' inutile sviluppare oltre l'equazione (21) essendo che l'integrale con ξ^3 è nullo e quello con ξ^2 è dell'ordine di ϵ^2 .

Sviluppando ora anche il primo membro dell'equazione (21) fino al primo ordine e sostituiamo il valore degli integrali. Risulta dunque:

$$\psi(x, t) + \epsilon \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \exp \left(-\frac{i\epsilon V(x)}{\hbar} \right) \frac{(2\pi \hbar i \epsilon / m)^2}{A} \cdot \left[\psi(x, t) + \frac{\hbar \epsilon i}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + \dots \right]$$

Affinchè ambo i membri possano coincidere all'ordine zero deve essere che $A = (2\pi \hbar \epsilon i / m)^{\frac{1}{2}}$. Ci resta ora da sviluppare anche il termine esponenziale e

otteniamo:

$$\psi(x, t) + \epsilon \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left(1 - \frac{i\epsilon V(x)}{\hbar}\right) \cdot \left[\psi(x, t) + \frac{\hbar\epsilon i}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2}\right]$$

Moltiplicando ambo i membri per $i\hbar$ e considerando solo il primo ordine in ϵ , troviamo proprio la ben nota *equazione di Schrödinger*, come (1). Lungo il procedimento abbiamo potuto notare come siano importanti, al fine dell'integrazione, i valori di $\xi \approx 0$. Per questo la maggior parte del contributo a $\psi(x_{k+1}, t + \epsilon)$ viene dai valori di x_k in $\psi(x_k, t)$ che sono molto vicini a x_{k+1} . In particolare si può vedere che, siccome $(im\xi^2/2\epsilon) \approx \hbar$, allora $\xi \approx (\hbar/2im)\sqrt{\epsilon}$. Si riottiene così un'espressione simile alla (18).

0.7 Problematiche di Convergenza dell'Integrale di Feynman

Come detto al termine della sezione 0.2, l'*integrale di Feynman*, non definisce matematicamente un integrale funzionale. In particolare sarà fatto vedere che il termine⁵:

$$\mathcal{D}x(\cdot) \cdot \exp\left(i \int_0^t \dot{x}(s)^2 ds\right)$$

con $\mathcal{D}x(\cdot)$ definito come in (13), non può definire una misura nello spazio dei cammini. Infatti consideriamo ora l'eq.(2), esplicitando l'espressione del propagatore e tenendo conto che $E_n = (n/2\pi it)$:

$$\psi(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (E_n)^n \int dx_{n-1} \dots dx_1 \exp \left\{ \left(i/\hbar \right) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{t}{n} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{t/n} \right)^2 - V(x_i) \right] \right\} \cdot \psi(x_0, t_0) dx_0. \quad (22)$$

Si usa spesso dire che il propagatore $\langle x', t' | x, t \rangle = G(x', x; t', t)$ è il *Kernel* dell'operatore $e^{-iHt/\hbar}$. Riscriviamo più semplicemente, supponendo $V(x) = 0$ che (per semplicità $\hbar = m = 1$):

$$G^\alpha(x', x; t', t) = \left[\frac{1}{2\pi(t' - t)\alpha} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{(x' - x)^2}{2\alpha(t' - t)}} \quad (23)$$

con $\alpha \in \mathbf{C}$.

Mostriamo ora che l'approssimazione poligonale di propagatori tipo eq.(23) (con $\alpha \in \mathbf{C}$ e $Im(\alpha) \neq 0$) non può definire nel limite $n \rightarrow \infty$ una misura complessa

$$d\mu_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = G^\alpha(x_n, x_{n-1}; t/n) \dots G^\alpha(x_2, x_1; t/n) dx_1 \dots dx_n \quad (24)$$

che sia σ -*additiva*⁶ nel caso in cui $Im\alpha \neq 0$. Si ha infatti che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int dx_1 \dots dx_n G^\alpha(x_n, x_{n-1}; t/n) \dots G^\alpha(x_2, x_1; t/n) = 1$$

⁵E' da ricordare inoltre che tale espressione non è rigorosa. Oltre alle motivazioni già dette al termine della sezione 0.2, si ha che per i cammini di Feynman il termine $\dot{x}(t)$ è divergente, non essendo questi differenziabili.

⁶la definizione di σ -additività si trova in *Appendice B*.

e invece, detto $\alpha = a + ib$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int dx_1 \dots dx_n |G^\alpha(x_n, x_{n-1}; t/n)| \dots |G^\alpha(x_2, x_1; t/n)| &= \left| \frac{n}{2\pi t \alpha} \right|^{\frac{n}{2}} \left(\int \left| e^{-\frac{nx^2}{2t} \cdot \left(\frac{a-ib}{|\alpha|^2} \right)} \right| dx \right)^n \\
&= \left| \frac{n}{2\pi t \alpha} \right|^{\frac{n}{2}} \left(\int \left| e^{-\frac{nx^2}{2t} \cdot \frac{a}{|\alpha|^2}} \cdot e^{i \frac{nx^2}{2t} \cdot \frac{b}{|\alpha|^2}} \right| dx \right)^n \\
&= \left| \frac{n}{2\pi t \alpha} \right|^{\frac{n}{2}} \left(\int \left| e^{-\frac{nx^2}{2t} \cdot \frac{a}{|\alpha|^2}} \right| dx \right)^n \\
&= \left| \frac{n}{2\pi t \alpha} \right|^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{2\pi t |\alpha|^2}{na} \right)^{\frac{n}{2}} \\
&= \frac{|\alpha|}{(a \cdot |\alpha|)^{\frac{n}{2}}}
\end{aligned}$$

e quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int dx_1 \dots dx_n |G^\alpha(x_n, x_{n-1}; t/n)| \dots |G^\alpha(x_2, x_1; t/n)| = \left(\frac{|\alpha|}{Re(\alpha)} \right)^{\frac{n}{2}} \rightarrow \infty \quad (25)$$

Si ha dunque che se α è un numero complesso con $Im(\alpha) \neq 0$ allora $(|\alpha|/Re(\alpha)) > 1$ e, come mostrato sopra, $\int d|\mu| = \infty$, dove $d|\mu| = dx_1 \dots dx_n \cdot |G|$. Pertanto, in tal caso, l'eq.(24) non è in grado di rispettare la σ -additività e quindi non può definire una misura⁷. Se invece α è reale abbiamo che $(|\alpha|/Re(\alpha)) = 1$ e non si ha alcuna divergenza [3]. Sarà appunto mostrato nella sezione (0.8) che ruotando il tempo nel piano complesso, da reale a immaginario, si otterrà un termine α reale e di conseguenza una convergenza dell'integrale.

0.8 La Formula di Feynman-Kac e la Misura di Wiener.

Per ottenere α reale consideriamo, anzichè il kernel dell'operatore unitario e^{-iHt} , il kernel del semigruppoo $e^{-\tau H}$, $\tau \geq 0$, cioè il termine ($m = \hbar = 1$):

$$(E_n)^n dx_{n-1} \dots dx_1 \exp \left\{ - \sum_{i=0}^{n-1} (\tau/n) \left[(1/2) \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\tau/n} \right)^2 \right] \right\} \quad (26)$$

Notiamo appunto che tale espressione non è altro che il propagatore dell'eq.(22) con la sostituzione $\tau = it$, che rappresenta una rotazione nel piano complesso da un tempo reale ad uno immaginario. Venne dimostrato da *Kac* che questo termine converge nel limite $n \rightarrow 0$ ad una ben definita misura: La *misura di Wiener*. Vediamo di seguito la dimostrazione. Iniziamo con introdurre la nozione di processo stocastico.

Processo Stocastico: Definizione di Kolmogorov

Un *Processo Stocastico* è una *famiglia di variabili aleatorie*, $\{x_t, t \in T\}$, definite sullo stesso spazio di probabilità (Ω, Σ, μ) . Ciò implica che per ogni insieme finito $t_1, \dots, t_n \in T$, si ha che la distribuzione di probabilità:

⁷Vedere sempre *Appendice B*, in cui è esposto un teorema che giustifica questa affermazione.

$$d\mu_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n$$

deve soddisfare gli *Assiomi di Kolmogorov*:

- i) $d\mu_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$ è una misura positiva
- ii) $\int d\mu = 1$
- iii) $\int P(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_1 = P(t_2, x_2; \dots; x_n, t_n)$

Un Processo stocastico è detto *Gaussiano* se possiede una distribuzione di probabilità gaussiana. Un processo stocastico è detto *Markoviano* se una generica probabilità condizionata⁸ $P(x_n, t_n; \dots; x_{m+1}, t_{m+1} | x_m, t_m; \dots; x_1, t_1)$, dove i valori con t_1, \dots, t_m sono già noti con certezza, è *indipendente* dalle variabili $(x_1, t_1); \dots; (x_{m-1}, t_{m-1})$, ma *dipende* solo da (x_m, t_m) . In altre parole si dice che in un processo stocastico markoviano *il presente determina il futuro indipendentemente da quanto è avvenuto nel passato*.

Di grande interesse per questo lavoro è il *Teorema di Kolmogorov*, il quale afferma che la conoscenza della distribuzione di probabilità $d\mu_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$ per ogni insieme finito (t_1, \dots, t_n) che soddisfi gli assiomi, determina unicamente il processo stocastico e definisce una misura nello spazio infinito-dimensionale Ω dei cammini.

Procediamo ora con la dimostrazione sopra citata. Consideriamo in linea del tutto generale anche la presenza di un potenziale $V(x)$, supponendo che esso sia continuo e limitato. Scriviamo ora l'analogia dell'eq.(22) con la sostituzione $\tau = it$:

$$\psi(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (E_n)^n \int dx_{n-1} \dots dx_1 \exp \left\{ - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\tau}{n} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\tau/n} \right)^2 + V(x_i) \right] \right\} \cdot \psi(x_0, t_0) dx_0. \quad (27)$$

con $x_n = x$ e $E_n = (n/2\pi\tau)^{\frac{1}{2}}$.

Diciamo per il momento $A_j = \exp\{-(\tau_j - \tau_{j-1})V(x_j)\}$, con $\tau_j = j\tau/n$, $x_j = x(\tau_j)$ e $j = 1, \dots, n$. Gli A_j sono dunque operatori limitati (essendo tale V) che agiscono in $L^2(\mathbf{R}, dx)$. Abbiamo dunque che:

$$\begin{aligned} & (e^{-(\tau/n)H_0} A_1 \dots e^{-(\tau/n)H_0} A_n \psi)(x_0) = \\ & = \int dx_1 \dots dx_n K(x_0, x_1; \tau_1) A_1(x_1) \dots K(x_{n-1}, x_n; \tau_n - \tau_{n-1}) A_n(x_n) \psi(x_n) \\ & = \int dx_1 \dots dx_n P(x_0, 0; x_1, \tau_1; \dots; x_n, \tau_n) \prod_{j=1}^n A_j(x_j) \psi(x_n) \quad (28) \end{aligned}$$

dove con K in tale caso si intende il kernel di $e^{-\tau H_0}$, cioè

$$K(x_i, x_{i+1}; \tau_i, \tau_{i+1}) = \left(\frac{n}{2\pi\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left[- \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2(\tau/n)} \right]. \quad (29)$$

Ora, siccome le funzioni K sono positive, allora le funzioni $P(\dots)$ nell'eq.(28) hanno le caratteristiche di distribuzioni di probabilità, come nella definizione

⁸In teoria delle probabilità, la probabilità di un evento A condizionata ad un evento B è la probabilità che si verifichi A dato il verificarsi di B.

di Kolmogorov. Come tali quindi soddisfano gli assiomi di Kolmogorov. Ciò è conseguenza delle proprietà del semigruppato $\exp(-\tau H_0)$. Per il Teorema di Kolmogorov dunque queste definiscono una misura funzionale, *Misura di Wiener* $dW_{x_0}[x(\cdot)]$, sullo spazio \mathcal{X} dei cammini continui che partono da x_0 . L'integrale associato si dice *Integrale di Wiener*. Si ha dunque:

$$\int_{\mathcal{X}} dW_{x_0}[x(\cdot)] \prod_{j=1}^n A_j(x(\tau_j)) \psi(x(\tau)). \quad (30)$$

E' stato dunque mostrato che in questo caso (α reale) l'espressione (26), il cui limite esiste grazie alla presenza del prodotto dei kernel (29), è inoltre in grado di definire correttamente, nel limite $n \rightarrow \infty$, la *Misura di Wiener*⁹.

Discutiamo ora il limite $n \rightarrow \infty$ del prodotto dei termini A_j , per poi mostrare che l'integrale dato dalla (30) è ben definito. Naturalmente per cammini $x(\tau)$ continui il potenziale $V(x(\tau))$ è continuo e quindi Riemann integrabile. Nel limite appunto la somma di Riemann converge puntualmente in \mathcal{X} all'integrale:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left[-\sum_{j=1}^n (\tau_j - \tau_{j-1}) V(x(\tau_j))\right] = \exp\left[-\int_0^\tau V(x(s)) ds\right] \equiv e^{-\mathcal{V}}$$

Se inoltre V è, come supposto, limitato nell'intervallo considerato, allora:

$$\int_{\mathcal{X}} |\psi(x(\tau)) \cdot e^{-\mathcal{V}}| dW_{x_0} \leq e^{-\tau V_{min}} \int_{\mathcal{X}} |\psi(x(\tau))| dW_{x_0} = e^{-\tau V_{min}} \cdot (e^{-\tau H_0} |\psi|)(x_0)$$

Siccome l'ultimo termine è finito si ha che $e^{-\mathcal{V}}$, per il teorema della convergenza dominata, è dW_{x_0} integrabile in \mathcal{X} e l'eq.(28) converge alla *Formula di Feynman-Kac*[3]:

$$(e^{-\tau H} \psi)(x) = \int_{\mathcal{X}} dW_x(x(\cdot)) e^{-\mathcal{V}} \psi(x(\tau))$$

Tale espressione ci mostra che l'evoluto al tempo τ della funzione ψ nella posizione iniziale x , corrisponde alla somma continua di contributi di ψ al tempo τ lungo tutti i possibili cammini $x(\tau)$ che partono da x .

0.9 Equazione del Calore e Moto Browniano

Abbiamo già visto che il propagatore quantistico (in rappresentazione x) di una particella libera, nonché il kernel dell'operatore unitario $\exp(-iH_0(t-t_0))$ è:

$$G(x, x_0; t, t_0) = \left[\frac{1}{2\pi i(t-t_0)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2i(t-t_0)} \right] \quad (31)$$

Sottoponendo l'eq.(31) alla trasformazione $it \rightarrow \tau$ si ottiene il kernel del semigruppato $\exp(-H_0\tau)$, $\tau \geq 0$:

$$K(x, x_0; \tau, \tau_0) = \left[\frac{1}{2\pi D(\tau-\tau_0)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2D(\tau-\tau_0)} \right] \quad (32)$$

⁹ricordiamo che ciò non era possibile per l'espressione (11), nonostante esistesse il suo limite.

E' facile mostrare che l'eq.(32) non è altro che la *funzione di Green* dell'equazione del calore con $D=1$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} P(x, \tau) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, \tau) \quad (33)$$

Infatti una soluzione di tale equazione può essere scritta come ($\tau_0 = 0$):

$$P(x, \tau) = \left[\frac{1}{2\pi D\tau} \right]^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{(x-x_0)^2}{2D\tau} \right] P(x_0, 0) dx_0 \quad (34)$$

L'eq.(34) ci dice che la funzione $P(x, \tau)$ ¹⁰ si ottiene come sovrapposizione lineare degli effetti in x generati da tutte le sorgenti che stanno in x_0 al tempo $\tau = 0$.

Notiamo ora infatti che questa somiglianza tra la (31) e la (32) è dovuta al fatto che l'*equazione di Schrödinger libera* si può interpretare come un'equazione di diffusione con coefficiente D immaginario:

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = -\frac{\hbar}{2mi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) \quad (35)$$

ciò che diffonde è la *funzione d'onda*.

Sappiamo ora, grazie ad *Einstein*, che l'eq.(33) è strettamente legata al cosiddetto *Moto Browniano*, esempio più semplice di *Processo stocastico Markoviano*. Mostriamo ora tale legame.

Nello studio del *Moto Browniano*, per semplicità, è utile considerare dapprima un *Random Walk unidimensionale* e successivamente passare al limite in modo da rendere il processo continuo. Per definire il random walk unidimensionale ipotizziamo che una particella compia con ugual probabilità un tratto Δx avanti o indietro ad ogni intervallo temporale $\Delta \tau$. Ogni salto successivo è indipendente dal precedente e sia X_j il salto al tempo $j\Delta \tau$. Le variabili X_j sono variabili aleatorie indipendenti con *media nulla* e *varianza* $\langle X_j^2 \rangle = 0.5(-\Delta x)^2 + 0.5(+\Delta x)^2 = (\Delta x)^2$. Sia $D_n(\tau)$ la posizione della particella al tempo $\tau = n\Delta \tau$. Quindi $D_n(\tau) = \sum_{j=1}^n X_j$. Si vede senza difficoltà che:

$$\langle D_n(\tau)^2 \rangle = n(\Delta x)^2 = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta \tau} \tau$$

Facendo ora il limite per $\Delta x \rightarrow 0, \Delta \tau \rightarrow 0$ ci accorgiamo che se vogliamo descrivere il moto di una particella con varianza non nulla deve necessariamente essere che $\Delta x = \alpha(\Delta \tau)^{\frac{1}{2}}$. Ritroviamo dunque la condizione (18) che caratterizzava i cammini di Feynman. Moltiplicando e dividendo ora ogni addendo della somma che definisce $D_n(\tau)$ otteniamo:

$$D_n(\tau) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n (\sqrt{n} X_j) \quad (36)$$

Siccome le $(\sqrt{n} X_j)$ sono variabili casuali indipendenti, equamente distribuite con media zero e varianza finita uguale a $\alpha^2 \tau$, per il *Teorema del limite centrale* la distribuzione di probabilità di $D_n(\tau)$ converge, nel limite per $n \rightarrow \infty$, alla distribuzione gaussiana:

$$\rho(x, \tau) dx = \left[\frac{1}{2\pi\alpha^2\tau} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot e \left(-\frac{x^2}{2\alpha^2\tau} \right) dx \quad (37)$$

¹⁰come esempio fisico si può pensare alla temperatura

Notiamo che a meno di traslazioni degli assi la funzione $\rho(x, \tau)$ ha la stessa forma della funzione di Green (32) dell'equazione del calore (33). La funzione $\rho(x, \tau)$ esprime dunque la probabilità che la particella, inizialmente in $x = 0$ (o equivalentemente con distribuzione iniziale $\delta(x)$), soggetta a moto browniano si trovi nel punto x all'istante τ . La soluzione $P(x, \tau)$, espressa dalla (34), dell'equazione del calore descrive la propagazione della camminata aleatoria della distribuzione di probabilità iniziale $P(x_0, 0)$.

0.10 Integrale di Feynman e Integrale di Wiener

I *processi* che sono descritti dalla probabilità di transizione (32) sono detti di *Wiener* e sono associati all'integrale di Wiener introdotto nella sezione 0.8. Il moto browniano, analizzato nella sezione 0.9, è un tipico *processo stocastico Markoviano di Wiener*.

Siamo ora interessati ad analizzare le differenze tra l'*Integrale di Feynman* e quello di *Wiener*[1]. Sottolineiamo dapprima, per evitare confusione, che l'Integrale di Feynman descrive il moto di una particella quantistica (si può fare riferimento ad un elettrone), mentre l'Integrale di Wiener descrive il moto stocastico di una particella classica (si può fare riferimento al moto browniano). Nella sezione 0.4 avevamo visto che i *cammini di Feynman* non possiedono realtà fisica, in quanto nella meccanica quantistica non è valida la teoria classica della probabilità¹¹. In particolare questo aspetto è dovuto al fatto che nell'Integrale di Feynman il kernel (31) (o, se si preferisce la versione discretizzata, l'eq.(11)) rappresenta *una densità di ampiezza di probabilità* e non *una densità di probabilità*. I *cammini di Wiener* invece hanno realtà fisica poichè in tal caso l'eq.(32) è a tutti gli effetti *una probabilità*. Mostriamo in modo semplice tale differenza. Per quanto riguarda l'evoluzione temporale di una particella quattistica descritta con l'integrale di Feynman si ha:

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \langle x, t | x_0, t_0 \rangle \psi(x_0, t_0). \quad (38)$$

Invece l'evoluzione temporale di una particella classica il cui moto stocastico è descritto da un integrale di Wiener ha la forma:

$$P(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 P(x_0, t_0; x, t) P(x_0, t_0). \quad (39)$$

Sapendo che $|\psi(x, t)|^2 = P_q(x, t)$ e $|\langle x, t | x_0, t_0 \rangle|^2 = P_q(x_0, t_0; x, t)$, dove il pedice q indica la natura quantistica del processo, si può riscrivere l'eq.(38) in maniera più simile all'eq.(39) (pur sapendo le differenze sottolineate precedentemente):

$$|\psi(x, t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \langle x, t | x_0, t_0 \rangle \psi(x_0, t_0) \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 |\langle x, t | x_0, t_0 \rangle| |\psi(x_0, t_0)|$$

da cui:

$$P_q(x, t)^{\frac{1}{2}} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 P_q(x_0, t_0; x, t)^{\frac{1}{2}} P_q(x_0, t_0)^{\frac{1}{2}} \quad (40)$$

¹¹Ciò che si somma sono le ampiezze e non le probabilità.

L'eq.(38) e quindi l'eq.(40) valgono solo sotto l'implicita assunzione che non venga effettuata alcuna misurazione sul sistema (come del resto tutta la formulazione di Feynman esposta.) Dal confronto delle eq.(40) e (39) si nota che il comportamento delle probabilità quantistiche P_q differisce da quello delle probabilità classiche P . Il manifestarsi di tale comportamento non classico, evidente nell'eq.(40), sta alla base dell'*aspetto ondulatorio della materia* e quindi anche della *non realtà fisica dei cammini di Feynman* descrittivi un processo quantistico al confronto con quelli di *Wiener*, che contrariamente rappresentano le vere traiettorie del moto stocastico di una particella classica. In comune con i cammini di Feynman, anche i *cammini di Wiener*, cioè quelli che danno il contributo fondamentale all'integrazione, sono *continui ma non differenziabili*. Ciò è stato mostrato nell'analisi del moto browniano, ma si può vedere con il medesimo procedimento utilizzato per i cammini di Feynman applicato all'integrale di Wiener. Dunque anche i *cammini di Wiener* sono *frattali* con dimensione di Hausdorff 2.

0.11 Equazione di Fokker-Planck e Fluttuazioni Quantistiche

Abbiamo precedentemente visto la somiglianza formale tra l'*equazione di Schrödinger* di una particella libera e l'*equazione del calore*. Abbiamo appunto osservato che le rispettive *funzioni di Green* (31),(32) sono molto simili a parte il termine immaginario. In particolare l'equazione del calore definisce un *processo di Wiener* caratterizzato dunque da una distribuzione gaussiana. Più in generale può essere mostrato che l'equazione di Schrödinger di una particella soggetta ad un potenziale vettore e uno scalare è similmente correlata all'*equazione di Fokker-Planck*:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x, t) - \frac{\partial}{\partial x_i}[V_i(x, t)P(x, t)] - \Delta(x, t)P(x, t) \quad (41)$$

Tale equazione descrive l'evoluzione temporale di un *processo stocastico markoviano* e generalizza l'equazione del calore. Il primo termine nel membro di destra descrive, come già visto, le fluttuazioni gaussiane. Il secondo termine invece tiene conto degli effetti deterministici, per esempio eventuali campi di forza a cui la particella stocastica è sottoposta. L'ultimo termine invece considera la probabilità di assorbimento o emissione di particelle per unità di tempo dall'ambiente. Essendo l'equazione lineare si ha che i vari termini non interferiscono tra loro ma possiamo tenerne conto in modo additivo. Per tale motivo possiamo schematizzare i processi stocastici, associati all'integrale di Wiener tramite la formula di Feynman-Kac, dicendo che:

descrivono un'evoluzione temporale deterministica perturbata da fluttuazione gaussiane di fondo.

L'ultimo termine della (41) definisce soltanto una distribuzione di probabilità (del numero delle particelle) lungo la traiettoria, cioè se queste vengono assorbite od emesse. L'*equazione di Schrödinger* di una particella descritta dall'azione

classica (19) è:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \frac{1}{2m} \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} - A_i(x, t) \right] \cdot \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} - A_i(x, t) \right] \psi(x, t) + \Phi(x, t) \psi(x, t). \quad (42)$$

Questa può facilmente essere ricondotta alla forma della (41) con $P(x, t) = \psi(x, t)$, $D = (i\hbar/2m)$, $V_i = -(1/m)A_i$ e $\Delta = (1/2m) \frac{\partial}{\partial x_i} A_i + (i/\hbar)[(1/m)A_i \cdot A_i + \Phi]$.

A questo punto si può affermare che la formulazione della meccanica quantistica basata sull'equazione di Schrödinger è concettualmente sullo stesso piano della descrizione di un processo stocastico markoviano basata sull'equazione di Fokker-Planck. Per tale motivo possiamo dire che

l'evoluzione temporale di una particella quantistica può essere descritta come un'evoluzione deterministica perturbata da *fluttuazioni quantistiche*[1].

Queste fluttuazioni quantistiche si rendono evidenti su piccola scala, cioè su scala di \hbar , come mostrato nella sezione 0.4. Esse non sono da confondere con le fluttuazioni gaussiane, ricordando la differenza tra la (31) e la (32).

.1 Appendice A: Derivazione dell'Integrale di Feynman attraverso l'Operatore Normalmente Ordinato

Abbiamo precedentemente visto, nella sezione 0.2 la derivazione dell'*Integrale di Feynman* attraverso la *formula di Trotter*. Vediamo ora una seconda derivazione che nel limite $N \rightarrow \infty$ ($\epsilon \rightarrow 0$) risulta essere equivalente alla prima. Diciamo che un operatore, per esempio $H(\hat{p}, \hat{x})$ è *Normalmente Ordinato*, e lo indichiamo con $: H(\hat{p}, \hat{x}) :$, se tutti i \hat{p} sono disposti prima di tutti gli \hat{x} .

A noi interessa l'operatore $e^{-i\frac{\epsilon}{\hbar}H(\hat{p}, \hat{x})}$, con $H(\hat{p}, \hat{x}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$, e si dimostra ([4]) che questo operatore è esprimibile in forma normalmente ordinata come:

$$: e^{-i\frac{\epsilon}{\hbar}H(\hat{p}, \hat{x})} := \sum_{n=0}^{\infty} \left(-i\frac{\epsilon}{\hbar}\right)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} \left(\frac{\hat{p}^2}{2}\right)^k (V(\hat{x}))^{n-k}$$

In generale, data un'hamiltoniana $H(\hat{p}, \hat{x})$ si ha che:

$$e^{-i\frac{\epsilon}{\hbar}H(\hat{p}, \hat{x})} =: e^{-i\frac{\epsilon}{\hbar}H(\hat{p}, \hat{x})} : - \left(\frac{\epsilon}{\hbar}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-i\frac{\epsilon}{\hbar}\right)^n}{(n+2)!} (H(\hat{p}, \hat{x})^{n+2} - : H(\hat{p}, \hat{x})^{n+2} :) \quad (43)$$

sviluppando il termine $n = 0$ della somma:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{\hbar}\right)^2 \left\{ H(\hat{p}, \hat{x}) - : \left[\left(\frac{\hat{p}^2}{2m}\right)^2 + V(\hat{x})^2 + \frac{\hat{p}^2}{2m} \cdot V(\hat{x}) + V(\hat{x}) \cdot \frac{\hat{p}^2}{2m} \right] : \right\} = \\ & = -\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{\hbar}\right)^2 \left\{ H(\hat{p}, \hat{x}) - \left[\left(\frac{\hat{p}^2}{2m}\right)^2 + V(\hat{x})^2 + \frac{\hat{p}^2}{2m} \cdot V(\hat{x}) + \frac{\hat{p}^2}{2m} \cdot V(\hat{x}) \right] \right\} \\ & = -\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{\hbar}\right)^2 \left\{ V(\hat{x}) \cdot \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{\hat{p}^2}{2m} \cdot V(\hat{x}) \right\} \end{aligned}$$

è dunque utile cercare la relazione di commutazione tra i due operatori $V(\hat{x})$ e \hat{p}^2 :

$$\begin{aligned} [V(\hat{x}), \hat{p}^2] &= V(\hat{x}) \cdot (-(1/\hbar^2)\nabla^2) - (-(1/\hbar^2)\nabla^2) \cdot V(\hat{x}) \\ &= -(1/\hbar)V(\hat{x}) \cdot \nabla^2 + (1/\hbar^2)[V''(\hat{x}) + 2V'(\hat{x}) \cdot \nabla + V(\hat{x}) \cdot \nabla^2] \\ &= (1/\hbar^2)[V''(\hat{x}) + 2V'(\hat{x}) \cdot \nabla] = [V''(\hat{x}) + 2iV'(\hat{x}) \cdot \hat{p}] \end{aligned}$$

Quindi si ha che:

$$V(\hat{x}) \cdot \frac{\hat{p}^2}{2m} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \cdot V(\hat{x}) + \frac{1}{2m} \cdot [V''(\hat{x}) + 2iV'(\hat{x}) \cdot \hat{p}]$$

Sostituendo nella (43) ciò che abbiamo ottenuto si ha:

$$e^{-i\frac{\epsilon}{\hbar}H(\hat{p}, \hat{x})} =: e^{-i\frac{\epsilon}{\hbar}H(\hat{p}, \hat{x})} : - \frac{\epsilon^2}{4m\hbar^2} \cdot [V''(\hat{x}) + 2iV'(\hat{x}) \cdot \hat{p}]$$

Si vede ora che la differenza tra l'operatore normale e quello normalmente ordinato è $O(\epsilon^2)$, e dunque nel limite $\epsilon \rightarrow 0$ è un infinitesimo di ordine superiore. E' inutile ora sviluppare gli altri termini della sommatoria essendo tutti questi $O(\epsilon^3)$. Dunque si è dimostrato che nel limite che ci interessa non c'è alcuna differenza tra l'operatore normale e quello normalmente ordinato, seppur questi differiscano per termini di commutazione.

Ora il propagatore dell'integrale di Feynman si ottiene nel modo seguente:

$$\langle x_n | e^{-\frac{\epsilon}{\hbar} \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \right)} | x_{n-1} \rangle = \langle x_n | : e^{-\frac{\epsilon}{\hbar} \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \right)} : | x_{n-1} \rangle + O(\epsilon^2)$$

essendo l'operatore a secondo membro in forma normale:

$$\begin{aligned} \langle x_n | e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \right)} | x_{n-1} \rangle &= \\ &= \langle x_n | e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} \frac{\hat{p}^2}{2m}} \cdot e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} V(\hat{x})} | x_{n-1} \rangle + O(\epsilon^2) \\ &= \int d^3 p_n e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} V(x_{n-1})} \langle x_n | e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} \frac{\hat{p}^2}{2m}} | p_n \rangle \langle p_n | x_{n-1} \rangle + O(\epsilon^2) \\ &= \int d^3 p_n e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} V(x_{n-1})} \cdot e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} \frac{p_n^2}{2m}} \langle x_n | p_n \rangle \langle p_n | x_{n-1} \rangle + O(\epsilon^2) \\ &= \int \frac{d^3 p_n}{(2\pi\hbar)^3} e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} V(x_{n-1})} \cdot e^{-\frac{i\epsilon}{\hbar} \frac{p_n^2}{2m}} \cdot e^{i \frac{p_n}{\hbar} (x_n - x_{n-1})} + O(\epsilon^2) \\ &= \left(\frac{m}{2\pi i \epsilon \hbar} \right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m}{2\epsilon} (x_n - x_{n-1})^2 - \epsilon V(x_{n-1}) \right)} + O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Tale ultima espressione è l'analogo tridimensionale dell'equazione (8) ottenuta nella sezione 0.3, ed esprime dunque il propagatore quantistico come precedentemente annunciato.

.2 Appendice B: un paio di Definizioni e un Teorema

Definiamo cosa s'intende per *Dimesione di Hausdorff* e per σ -*additività*. Presentiamo infine anche un teorema di teoria della misura che permette di ottenere le conclusioni esposte al termine della sezione 0.7 :

Definizione 1 Sia A un sottoinsieme di uno spazio metrico. Si consideri un ricoprimento di A con insiemi \mathcal{A}_i , $i \in \mathcal{I}$, tali che $\text{diam}(\mathcal{A}_i) \leq s$ e si consideri anche l'insieme:

$$m_D(A, s) = \inf \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} (\text{diam}(\mathcal{A}_i))^D \right)$$

Diciamo ora misura D -dimensionale (di Hausdorff) del sottoinsieme A il valore: $\lim_{s \rightarrow 0} m_D(A, s)$. Qualunque sia l'insieme A , esiste un unico valore di D , che indichiamo con $\dim_H(A)$ tale che per $D < \dim_H(A)$ la misura D -dimensionale è infinita, mentre per $D > \dim_H(A)$ è nulla. Si dice dunque dimensione di Hausdorff il valore $\dim_H(A)$.

Definizione 2 Una misura μ complessa sulla σ -algebra S_μ dei sottoinsiemi dell'insieme E è una funzione complessa σ -additiva, cioè

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \in \mathbf{C}$$

per ogni insieme $E_1, \dots, E_n, \dots \in S_\mu$ che soddisfi la condizione $E_i \cap E_j = \emptyset$ ($i \neq j$)

Per il nostro interesse è anche utile il seguente teorema [5]:

Teorema 1 Sia μ una misura complessa, allora:

i) $d\mu = d|\mu| \cdot f$ con $|f| = 1$.

ii) $\int_E d|\mu| < \infty$.

Bibliografia

- [1] M.Roncadelli, A.Defendi, *I Cammini di Feynman*, Quaderni di Fisica Teorica, Università degli Studi di Pavia (1992)
- [2] R.Feynman, *Space-time Approach to non-relativistic Quantum Mechanics*, Reviews of Modern Physics 20 (Cornell University, Ithaca, New York 1948)
- [3] F.Strocchi, *An introduction to the Mathematical Structure of Quantum Mechanics*, Advanced Series in Mathematical Physics Vol.27 (World Scientific 2005)
- [4] J.W.Negele, H.Orland, *Quantum Many-Particle Systems*, Frontiers in Physics (Addison-Wesley 1988)
- [5] W.Rudin, *Analisi Reale e Complessa*, (Boringhieri 1996)
- [6] P.Dirac, *I Principi della Meccanica Quantistica* (IV ed.) (Boringhieri 1959)

.3 Ringraziamenti

Ringrazio innanzitutto il Prof.Marchetti e inoltre i miei compagni di laboratorio Stefano e Andrea, che hanno pazientato alle mie assenze durante la compilazione delle relazioni.

