

## ***Ringraziamenti***

*Non è stato per nulla semplice scrivere questi ringraziamenti in quanto questa università mi ha conosciuto già grande e per i soli due anni della laurea specialistica, quindi non mi ha permesso di conoscere molte persone da poter citare in questi ringraziamenti.*

*Il dovere, la stima e molto di più mi portano ad assegnare il primo ringraziamento al Professor Mario Barra, relatore di questa tesi. In primis (parola che lui odia!) per le splendide lezioni, oserei dire le migliori e le più appassionanti della mia carriera universitaria. In secondo luogo per aver creduto in me fino alla fine e nonostante tutto, e per avermi insegnato a controllare e a domare il mio “delirio di onnipotenza”, come spesso lui stesso l’ha definito.*

*Ma il ringraziamento ancora più doveroso è ai miei genitori, veri e propri finanziatori, soprattutto morali, di questo progetto. A mamma Erminia, che inconsciamente ha messo in me il seme della curiosità matematica. Per tutte quelle volte che mi sono sentita dire “Fai da sola!” e che solo oggi riesco a comprendere e apprezzare. E a papà Franco che, con poche parole e molti gesti, mi ha continuamente dimostrato fiducia sempre accompagnata da un pizzico di apprensione.*

*Ultimi, ma ovviamente non meno importanti, i ringraziamenti alle persone che mi sono state vicino e che mi hanno sempre sostenuto:*

*al resto della mia famiglia, nonni, zii e cugini, per i loro mille interessanti e consigli. A Peppe, per aver saputo sopportare con pazienza e affetto i miei mille sbalzi d’umore e il mio nervosismo. Per avermi saputo ascoltare, rincuorare e incoraggiare in ogni momento. A Salvo, correttore ufficiale di tutti i miei lavori, ma soprattutto della mia vita. A Monica, unica persona che ha saputo accogliermi e starmi vicino nei momenti tristi lontana da casa. A Carmela e Enza, amiche insostituibili che hanno saputo cancellare la distanza che ci ha separate, per il loro amore infinito e la loro allegria fuori dal comune. E a Gioacchino, maestro nella fede e nella vita, per le sue preghiere e raccomandazioni a Lui, unico autore del libro della mia vita.*

*Francesca Ingrande  
Roma, 30 Gennaio 2009*

# Indice

<b>INTRODUZIONE</b> .....	p. 6
---------------------------	------

## ***Capitolo 1* ALCUNI ASPETTI DIDATTICI DEL CALCOLO INFINITESIMALE**

1.1 Calcolo infinitesimale a scuola .....	11
1.2 Calcolo infinitesimale e il computer .....	13
1.3 Dimostrazioni matematiche e immagini mentali .....	17

## ***Capitolo 2* STRUMENTI DIDATTICI**

2.1 Gli strumenti a disposizione: ieri e oggi .....	20
2.1.1 Le calcolatrici grafiche .....	23
2.1.2 Un nuovo software: il CABRI GÉOMÈTRE .....	29
2.1.3 Un aiuto dalla rete: il CABRI JAVA .....	33
2.2 Le motivazioni per l'utilizzo di software di geometria dinamica (DGS).....	36

## **Capitolo 3 LE RADICI DEL CALCOLO INFINITESIMALE**

3.1 Il pensiero matematico greco .....	41
3.2 Archimede di Siracusa .....	44
3.3 Il metodo di esaustione .....	52
3.4 Un esempio del metodo di esaustione tratto dalla <i>Misura del cerchio</i> .....	55
3.5 Il <i>Metodo meccanico</i> di Archimede .....	60

## **Capitolo 4 TEOREMI ANTICHI CON NUOVE SOLUZIONI**

4.1 Due teoremi dal <i>Metodo</i> di Archimede .....	67
4.1.1 L'unghia cilindrica .....	69
- I risultati di Archimede .....	69
- Nuove soluzioni e applicazioni .....	97
<i>Area e volume della sfera</i> .....	97
<i>Area della superficie curva e volume dell'unghia cilindrica</i> .....	101
<i>Area della sinusoidale</i> .....	108
4.1.2 L'intersezione dei cilindri .....	111
- Il risultato di Archimede .....	111
- Nuova soluzione e alcune considerazioni .....	121
4.2 Da <i>Sulle Spirali</i> .....	126
4.2.1 La spirale di Archimede .....	129
- L'area della spirale determinata da Archimede .....	132
- Le "radialità" .....	134
- Area della spirale di Archimede (Nuova soluzione) .....	144

- Calcolo di altre aree .....	147
<i>Area dell'artiglio</i> .....	147
<i>Area della cardioide</i> .....	149
<i>Area del solido iperbolico acutissimo</i> .....	160
<b>APPENDICE 1:</b> Somma dei quadrati degli interi.....	163
<b>APPENDICE 2:</b> Elenco dei siti che utilizzano CABRI Géomètre e CABRI JAVA .....	167
<b>BIBLIOGRAFIA</b> .....	174
<b>SITOGRAFIA</b> .....	180

# INTRODUZIONE

Il calcolo infinitesimale è stato uno degli strumenti più importanti per lo sviluppo di molte teorie nel campo delle scienze e in particolare della matematica.

**Margaret Baron** nel suo *The origins of the infinitesimal calculus* paragona il concetto di calcolo *ad un grande albero con le radici nell'aritmetica, nell'algebra e nella geometria, e un potente tronco a sostegno di una vasta rete di rami: l'albero cresce in altezza quanto più forti sono le radici e i rami, poi una volta separate dalle principali le discipline si diramano ulteriormente, fino a divergere così tanto da mai più riunirsi*<sup>1</sup>.

Il calcolo infinitesimale è stato il principale strumento per l'esplorazione delle risorse della terra, per i grafici dei cieli, per la costruzione della moderna tecnologia e in quelle applicazioni che si verificano ovunque esistano fenomeni misurabili: gravitazione, calore, luce, suono, elettricità, magnetismo e onde radio.

Praticamente ogni importante sviluppo scientifico e matematico dal 1600 al 1900 è stato collegato in un modo o in un altro al metodo differenziale o integrale.

*“Ritengo di poter affermare che nessuna disciplina scientifica ha avuto sulle altre Scienze un impatto così vasto e profondo come il Calcolo infinitesimale. Esso ha costituito un'autentica svolta nell'umano pensiero e, con le scoperte scientifiche che ha originato e le realizzazioni tecniche che ha permesso, ha contribuito, in modo determinante, al progresso ed al benessere del genere umano [...].”*<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Baron M. E., *The origins of the infinitesimal calculus*, Pergamon, 1969, p. 2.

<sup>2</sup> Fichera G., *Il calcolo infinitesimale alla soglia del duemila*, Dalla Conferenza tenuta nella seduta a Classi riunite del 13 marzo 1993 all'Accademia dei Lincei.

Il calcolo, tuttavia, è molto di più di uno strumento tecnico: si tratta di una raccolta di idee matematiche astratte accumulate per lunghi periodi di tempo. Il fondamento e il concetto centrale di oggi, però, non sono ciò che sono stati negli ultimi secoli. La forza unificante e la ricchezza del suo campo di applicazione dipendono non solo da ciò che il calcolo è ora, ma da tutti i concetti che hanno contribuito in un modo o nell'altro alla sua evoluzione.

È sbagliato però pensare che il problema dell'infinitamente piccolo sia sorto solo in tempi così moderni, poiché ne troviamo tracce anche nell'antichità, soprattutto nella matematica greca.

Allora la mentalità e i problemi analizzati presupponevano un metodo diverso di procedere, cercando di ridurre il conflitto tra le richieste di rigore matematico e la natura dell'infinitamente grande e dell'infinitamente piccolo che conduceva continuamente a paradossi e anomalie.

Tra i tanti matematici greci che si occuparono di questi problemi spicca la figura di Archimede di Siracusa.

Archimede può in qualche modo essere concepito come il precursore di quella fisica-matematica che oggi si basa quasi esclusivamente su procedimenti infinitesimali. Egli fornisce un vero e proprio metodo di analisi volto a divulgare questi procedimenti giudicati importanti dallo stesso matematico siracusano.

I problemi affrontati da Archimede e qui riproposti sono poco o quasi per nulla conosciuti e affrontati nella scuola forse perché ritenuti troppo prolissi e complicati.

È noto il fatto che le questioni di cui si occupava Archimede erano tra le più insolite, ma proprio questo le rendeva sicuramente interessanti e stimolanti.

In questo lavoro abbiamo provato ad affrontare questi problemi cercando di utilizzare metodi nuovi e strumenti tecnici che potrebbero essere efficaci. Facendo uso del Cabri Géomètre abbiamo realizzato disegni dinamici e non, che ci hanno permesso sia di semplificare le stesse dimostrazioni di Archimede, sia di proporre altre che, grazie alla dinamicità della figura, si riducono a pochi passaggi.

Prendendo spunto dal pensiero di **Jacques Hadamard** che nel 1945 così scrive sulla psicologia dell'invenzione in campo matematico:

*“l'invenzione è scelta” e “questa scelta è governata dal senso della bellezza”*<sup>3</sup>, abbiamo cercato prevalentemente di realizzare disegni esteticamente piacevoli, puntando sull'accostamento dei colori, su chiaroscuri e trasparenze in modo da evidenziare i particolari.

Abbiamo ancora cercato di essere più chiari e brevi possibile, provando ad utilizzare i colori in luogo delle lettere in maniera tale da evidenziare le figure e associando i file di Cabri, che permettono il “movimento” delle figure stesse, per cercare di ridurre al massimo i passaggi matematici.

Tutto questo con lo scopo di alleggerire e rendere “appetibili” le dimostrazioni archimedee e provare così ad utilizzarle anche a scuola, cercando di stimolare l'intuizione e le capacità intellettive dello studente.

La tesi si divide in 4 capitoli. Il primo vuole mettere in evidenza alcuni aspetti didattici del calcolo infinitesimale, come viene proposto a scuola e alcune difficoltà che potrebbe suscitare negli studenti.

Nel secondo capitolo vengono presentati gli strumenti didattici che potrebbero essere d'aiuto al processo di apprendimento degli studenti. Questi strumenti sono di facile utilizzo, ma purtroppo ancora poco introdotti nelle scuole italiane.

---

<sup>3</sup> Hadamard J., *La psicologia dell'invenzione in campo matematico*, a cura di B.Sassoli, Cortina, 1993.

Nel terzo capitolo abbiamo esposto le descrizioni dei periodi storici, presentando il pensiero matematico dei greci ed in particolar modo lo sviluppo del concetto di “indivisibile”, passando da Democrito ad Aristotele, Eudosso ed Euclide, fino ad arrivare ad Archimede. Del famoso matematico siracusano abbiamo dato una breve biografia, con noti aneddoti (legendari e non) sulla sua vita ed accennato ad alcuni suoi importanti lavori, al fine di fornire un quadro più completo possibile della situazione in cui le scoperte matematiche sono state fatte.

Pensiamo, infatti che, la storia fornisca un ottimo supporto per capire il significato di molti avvenimenti. Non di meno gli aneddoti storici e i percorsi che portano i matematici alle loro scoperte, potrebbero stimolare la curiosità e offrire motivazioni in più per lo studio.

Infine, negli ultimi due paragrafi di questo capitolo abbiamo esposto, nelle linee generali e con un esempio, il *Metodo di Esaustione* di Eudosso e il *Metodo meccanico* di Archimede, quest’ultimo basato sull’equilibrio della leva.

L’ultimo capitolo contiene le dimostrazioni archimedee e alcune proposte di dimostrazioni differenti degli stessi risultati.

In particolare abbiamo trattato: 1) lo studio dell’"unghia cilindrica", 2) l’intersezione di due cilindri retti (problemi presenti nel *Metodo*, ritrovato solo nel 1906), 3) l’area della spirale di Archimede. In queste dimostrazioni abbiamo cercato di affiancare ai passaggi matematici di Archimede, alcune figure (non presenti nel testo archimedeo) che li potessero chiarire meglio. Abbiamo realizzato alcune "bilance", per provare a rendere visibile l’applicazione del principio della leva di cui Archimede si serve in queste dimostrazioni. E nella seconda dimostrazione riguardante l’"unghia cilindrica", abbiamo provato a utilizzare le "funzioni" (strumento sconosciuto ad Archimede) per rendere scorrevoli alcuni passaggi. Infatti, in questa dimostrazione si

possono trovare molti richiami a proposizioni presenti in altre opere, come le Coniche di Apollonio, gli scritti di Aristotele e Euclide o ancora opere archimedee precedenti al *Metodo*.

Successivamente abbiamo provato a semplificare le stesse dimostrazioni archimedee e a servirci di questi risultati per ottenere da esse altri risultati e considerazioni. Sfruttando il movimento prodotto da Cabri abbiamo ricavato l'area della superficie e il volume della sfera, l'area della superficie e il volume dell'unghia cilindrica e l'area della sinusoide con dimostrazioni geometriche e "dinamiche". Attraverso una nuova trasformazione, la "radialità", che permette di avvolgere una figura attorno ad un cerchio in modo tale da avere una certa proporzionalità tra l'area della superficie della figura di partenza e quella ottenuta dopo la trasformazione, abbiamo ricavato, oltre all'area della spirale di Archimede, anche quella della cardioide, e abbiamo dato vita ad alcuni "fiori" grazie alla trasformazione radiale di un cerchio.

# Capitolo 1

## ALCUNI ASPETTI DIDATTICI DEL CALCOLO INFINITESIMALE

### § 1.1 CALCOLO INFINITESIMALE A SCUOLA

I concetti di *limite* e di *infinitesimo* hanno avuto ruoli fondamentali nello sviluppo dell'analisi e dell'intera matematica, e tutt'oggi assumono un ruolo di primaria importanza nella didattica della matematica soprattutto per quanto riguarda la scuola secondaria superiore.

L'introduzione dei procedimenti infinitesimali nella scuola secondaria superiore avviene prima intuitivamente (si pensi alla nozione di asintoto di una curva studiata attraverso la sua rappresentazione analitica), per poi lasciare spazio alla trattazione dei concetti propri dell'analisi. Per quanto riguarda quest'ultimi, i manuali di analisi matematica in uso nelle scuole secondarie propongono un'introduzione basata sulla moderna nozione di *limite* e tale impostazione viene

generalmente mantenuta nei manuali universitari. Alla presentazione del concetto di limite fa seguito, tradizionalmente, quella di derivata (intesa come limite della funzione rapporto incrementale) e quindi dell'integrale (anch'esso basato sul concetto di limite). Poiché il calcolo del limite è spesso complesso e si tende a ricordare solo il risultato, il calcolo infinitesimale diventa una vera e propria routine: la banale applicazione di regole che non permettono di apprendere il vero senso di ciò che si sta facendo. Ad esempio, determinare un integrale definito significa fondamentalmente determinare un'area data una funzione, ma in antichità le funzioni non esistevano e i problemi di integrazione erano *di natura squisitamente geometrica*.

Pensiamo infatti, che alcuni ostacoli che portano ad un accantonamento dell'analisi matematica possano essere legati alla simbologia e al linguaggio estremamente articolato che viene utilizzato.

Nel caso specifico del calcolo infinitesimale i maggiori intralci sono nel concetto di limite, di derivata e di integrale espressi con l'epsilon-delta. Ad esempio, il professor Bonavoglia del Liceo Ginnasio "Marco Foscarini" di Venezia a riguardo si esprime così:

*"La definizione epsilon-delta per limiti e continuità è quanto di meno intuitivo si possa immaginare e chiunque abbia insegnato Analisi in una scuola superiore sa bene che questo è uno dei più formidabili ostacoli alla comprensione dell'argomento e ha ben presenti gli sguardi stravolti degli studenti che vedono per la prima volta questa definizione."*<sup>4</sup>

Questi problemi potrebbero portare i ragazzi a distrazioni, scoraggiamenti e al conseguente abbandono della materia.

In questo senso invece di pensare di "abbandonare" del tutto certi argomenti perché troppo ostici, si potrebbero riprendere alcuni metodi che ci hanno preceduto e, con i dovuti "aggiustamenti" cercare di riproporli come "strade alternative".

---

<sup>4</sup> Bonavoglia P., Il ritorno all'infinitesimo, *PROGETTO ALICE*, Vol. 5 n° 14, 2004, p.350.

## § 1.2 CALCOLO INFINITESIMALE E IL COMPUTER

*«La reazione, da parte dei conservatori contro i mostruosi computer assunse a volte aspetti di vera violenza. [...] Io ritengo che nei riguardi dei computer bisogna assumere un atteggiamento di freddo distacco, per ben misurarne l'impatto sul progresso scientifico e l'influenza sul pensiero matematico. [...] Ora, se riflettiamo bene, ci accorgiamo che, allorché affrontiamo la risoluzione di un problema, la tattica è, quasi sempre, quella di trasformare il problema iniziale in uno più semplice e questo in uno ancora più semplice e così via, finché ad un certo punto ci si imbatte in un problema la cui soluzione è già nota, oppure è così semplice, che la soluzione ne è evidente. Credo che tutti potranno aderire su questo significato da dare alla frase risolvere un problema. Ma a questo punto sorge un'altra più sottile questione: quando può dirsi che un problema è più semplice di un altro? A tale quesito non può darsi una risposta assoluta. Il concetto di più semplice dipende dai mezzi che il ricercatore ha a sua disposizione. Ora è bene dire subito che l'intelligenza del calcolatore non sopravvanzerà mai quella dell'uomo. I calcolatori, progrediti che possano essere, sono diligenti, ma non intelligenti, semplicemente perché essi non hanno e non avranno mai il dono divino della fantasia. Essi, però, rispetto agli uomini, hanno questo vantaggio: sono velocissimi e sempre più lo diventeranno. Un computer può compiere in pochi secondi (ed i secondi diventeranno micro-secondi) operazioni aritmetiche che ad un uomo non basterebbe tutta una vita per condurre a termine. Questa capacità dei computer porta a modificare profondamente, se non addirittura a stravolgere il concetto di problema più semplice di un altro e, quindi, il significato da dare alla*

*frase: risolvere un problema. Chi ha a disposizione solo un foglio di carta ed una matita, non può ritenere più semplice un problema, rispetto a quello iniziale, se la soluzione del secondo richiede di dover eseguire un numero enorme di operazioni aritmetiche elementari. Eviterà, quindi, i metodi di soluzione che lo porterebbero a dover affrontare quelli che per lui sono insormontabili ostacoli, preferendo procedimenti più astratti ed analitici. Ma chi dispone di un elaboratore elettronico, non avrà tale impedimento e preferirà quei metodi numerici che, assai più rapidamente dei procedimenti analitici, potranno portarlo ad un risultato. [...]*

*Se si guarda al concetto di area da Euclide ad Archimede, da Newton e Leibniz a Cauchy ed a Lebesgue, ci si accorge che l'evoluzione di tale concetto è stata sempre condizionata dai metodi a disposizione del matematico per "calcolare" un'area: metodi via via più nuovi ed efficaci hanno modificato la definizione dell'area di una regione piana, in guisa tale che il calcolo di essa fosse perseguibile con i procedimenti sempre più potenti e generali escogitati dai matematici.[...]*

*Io ritengo che ci troviamo di fronte ad una svolta decisiva nel divenire del pensiero matematico, pari a quella cui portò, fra il XVII ed il XVIII secolo, la scoperta del Calcolo infinitesimale. Nei prossimi decenni molti schemi classici della Matematica, che pure hanno avuto ed hanno un'influenza enorme nel progresso di tutta la Scienza e la Tecnologia, soffriranno un inevitabile declino, e nuovi modi di pensare e di concepire la teoria e l'applicazione della Matematica prenderanno il loro posto.*

*Probabilmente, qualcuno fra gli eminenti Colleghi, presenti in quest'aula, penserà, con giusto orgoglio, che le teorie ed i metodi che egli coltiva non potranno mai declinare. Io comprendo e giustifico questo atteggiamento. Esso corrisponde ad un sentimento che, sul piano*

*emotivo, condivido io stesso. Nel XVII secolo i grandi cultori della Geometria euclidea classica si opposero alle idee ancora incerte ed assai empiriche del Calcolo infinitesimale, che, allora, cominciava a sorgere. La Geometria euclidea, monumento splendido in tutta la matematica, non è morta. Ha solo perduto il suo ruolo centrale. Lo stesso avverrà al Calcolo infinitesimale ed, in generale, all'Analisi matematica, quale noi oggi la concepiamo. Le sue affascinanti teorie, i suoi grandi teoremi rimarranno in eterno, così come il canto dantesco di Paolo e Francesca o le sinfonie di Beethoven. Rimarranno in eterno, perché quelle teorie e quei teoremi sono belli e profondi, non perché oggi sono utili. Di questo ho l'assoluta certezza.*

*Ma altri saranno gli strumenti con i quali le generazioni, di un futuro anche prossimo, studieranno e descriveranno l'Universo che ci circonda.››*

**Gaetano Fichera<sup>5</sup>**

Oggigiorno il computer va assumendo un ruolo sempre più diffuso, ed è quindi ovvio che esso influisca, positivamente, sulla formazione intellettuale dei giovani.

Questo strumento ha straordinarie potenzialità che ne rendono possibile l'uso nei settori più diversi, quindi anche nell'ambito scolastico e nell'apprendimento della matematica in particolare. Infatti, una delle peculiarità di questa materia è la risoluzione di problemi, il che richiede capacità di ragionamento, ma anche capacità intuitive e creative ovvero un'intensa attività di pensiero. Spesso in questo tipo di attività si può instaurare un proficuo colloquio con il calcolatore che riesce, a volte, ad alleviare la fatica dell'uomo, oltre che rendere possibile la soluzione del problema stesso.

---

<sup>5</sup> Fichera G., *Il calcolo infinitesimale alla soglie del duemila*, Dalla Conferenza tenuta nella seduta a Classi riunite del 13 marzo 1993 all'Accademia dei Lincei.

Pensiamo, dunque, che l'uso del calcolatore faciliti l'apprendimento o l'autoapprendimento incoraggiando una forma di collaborazione tra gli allievi e l'insegnante, rendendo l'acquisizione di determinate nozioni (nel nostro caso quelle del calcolo infinitesimale) più facile che in passato.

## § 1.3      **IMMAGINI MENTALI E DIMOSTRAZIONI MATEMATICHE**

Le rappresentazioni mentali o in generale le immagini hanno da sempre rivestito un importante ruolo nell'”economia del pensiero” e soprattutto nel pensiero creativo. È facile, infatti, notare come sulle lavagne, durante le lezioni di matematica, si continuano a tracciare ogni sorta di figure: triangoli, poligoni, circonferenze, ma anche grafici, assi cartesiani, curve, funzioni ecc.. Negli articoli di ricerca quanto nelle pagine dei manuali brulicano figure, diagrammi, schemi, disegni. I matematici, nei loro ragionamenti, non si limitano a raccogliere idee o ad eseguire calcoli su calcoli, ma si sforzano di visualizzare i problemi ricorrendo a immagini di ogni tipo. Immagini magari vaghe, confuse, indistinte, o addirittura non raffigurabili, ma che svolgono comunque, nel lavoro di ricerca e nel processo di apprendimento, una funzione essenziale e non meramente accessoria.

Narra Plutarco che proprio Archimede fu trucidato dalla soldataglia romana mentre era intento a tracciare figure geometriche nella sabbia. La realtà storica fu probabilmente diversa, ma l'aneddoto ha il pregio di mettere in evidenza il carattere *eminente geometrico* della matematica greca classica, dove quasi tutti i problemi erano basati su costruzioni puramente visive.

Da ciò si deduce che la matematica non è solo scienza dell'invisibile e dell'astratto, ma è anche e soprattutto scienza del visibile e di immagini. Infatti, le immagini in matematica, non si limitano soltanto a innescare il processo creativo, per cedere subito il campo al disciplinato concatenarsi di assiomi, definizioni e dimostrazioni, ma spesso possono essere utilizzate per fare qualcosa in più.

Per Poincaré, ad esempio, “le *immagini mentali*, hanno un ruolo privilegiato. Non a caso, una delle espressioni che più ricorrono nelle migliaia e migliaia di pagine scientifiche dell’ultimo *grand savant* dell’Ottocento è «*on voit que*» (si vede che). Infatti, nonostante la geometria che Poincaré visualizza è molto più astratta della geometria euclidea; si potrebbe quasi dire che le immagini, di rado disegnate, ma soltanto evocate a chiarimento di una formula o di un teorema, non sono figurative, bensì concettuali”<sup>6</sup>.

Un tentativo di definizione di “immagini mentali” è il seguente:

*“le immagini mentali sono immagini generate nella nostra mente, attraverso un processo di interazione fra immagini e caratteristiche che queste immagini presentano o vogliamo che abbiano. Le immagini e le loro caratteristiche, nascono dalla necessità di esprimere o soddisfare alcune proprietà, esigenze o desideri che traggono origine in gran parte dall’esperienza, o vengono create dall’inconscio o, attivamente, dalla fantasia. Si tratta di un processo dinamico, nel senso che le caratteristiche possono indirizzare la definizione delle immagini, e, reciprocamente, le immagini possono mettere in evidenza alcune caratteristiche visibili o nascoste nelle immagini stesse, che vengono eventualmente modificate in modo da soddisfare, ancora una volta, altre proprietà, esigenze o desideri”*.<sup>7</sup>

Alle immagini spetta dunque, un ruolo importantissimo, che è connesso con una concezione della “matematica che vive in questo tempo”. Proprio per questo abbiamo voluto presentare delle dimostrazioni basate principalmente su di esse, provando a proporre un’analisi infinitesimale basata più su un *ragionamento infinitesimale* che sul calcolo vero e proprio. Pensiamo che quello che si potrebbe

---

<sup>6</sup> Bartocci C., *Geometria e caso: scritti di matematica e fisica di Henri Poincaré*, Bollati Boringhieri, Torino, 1995.

<sup>7</sup> Barra M., Avviamento alla dimostrazione e all’uso di simboli attraverso termini concreti. Trasformazioni dei poliedri platonici in poliedri archimedeei, *Progetto Alice*, Vol. 7, n° 7, 2006, p. 239.

estrarre dai processi infinitesimali sia un vero e proprio metodo di studio scientifico, più intuitivo che rigorosamente matematico.

In quest'ottica proponiamo un tipo di dimostrazioni che limiti i formalismi dando maggior spazio all'intuizione e al ragionamento.

Alle “nuove dimostrazioni” abbiamo richiesto alcune caratteristiche specifiche, con la speranza di chiarire meglio le idee esposte in precedenza. Abbiamo cercato quindi di proporre dimostrazioni:

- facilmente esprimibili, cercando di utilizzare termini nuovi, moderni e usuali;
- semplici, con pochi passaggi chiari e concisi;
- facilmente memorizzabili, senza lunghi ragionamenti;
- visualizzabili, attraverso immagini mentali, disegni piacevoli, figure precise ben colorate e dinamiche;
- interattive, utilizzando il PC, i software didattici, ecc.;
- induttive e generalizzabili.

# Capitolo 2

## STRUMENTI DIDATTICI

### § 2.1 GLI STRUMENTI A DISPOSIZIONE: IERI E OGGI

Gli strumenti matematici sono stati fin dall'antichità aiuto e guida fondamentale per rispondere alle esigenze di chi si immergeva in questa materia.

Inizialmente avevano solamente uno scopo pratico: venivano utilizzati per le osservazioni astronomiche, per la navigazione e la cartografia. Alcuni degli strumenti più antichi, come la *sfera armillare* o la *riga parallattica*, furono descritti da Tolomeo, mentre agli astronomi arabi si deve la straordinaria invenzione dell'*astrolabio* e delle sue varianti: il *quadrante*, l'*equatorium*, il *torqueto* e il *quadrato geometrico*, strumenti utilizzati nel Medioevo, insieme al cosiddetto *bastone di Giacobbe*, utilizzato per misurare le distanze terrestri e calcolare la latitudine.

Dalle esigenze cartografiche e militari del Rinascimento derivò tutta una serie di strumenti: bussole topografiche, compassi di proporzione, compassi topografici, squadre zoppe, goniometri, compassi di calibro, archipenzoli e altri numerosi accessori. Nelle collezioni scientifiche delle principali corti europee del XVI e XVII secolo erano presenti anche altri tipi di strumenti matematici: strumenti topografici, orologi solari e macchine calcolatrici<sup>8</sup>.

Con l'andare del tempo questi strumenti diventarono utili anche per produrre disegni di carattere prettamente matematico-geometrico, adatti a condurre studi approfonditi sulla materia e costruire nuove teorie astratte e generali.

Ovviamente gli strumenti sono andati man mano evolvendosi: acquistando facilità nell'uso, divenendo più maneggevoli, aumentando la loro precisione. Questa evoluzione è tutt'oggi in corso.

Anche nel mondo della scuola questi strumenti assumono un ruolo molto importante. Si utilizzano squadre, riga, compasso, goniometro, oggetti curvilinei, e quant'altro, sperando di realizzare un disegno il più possibile preciso, ma anche bello da vedere.

Ma la matita e il foglio o il gesso e la lavagna hanno bisogno di buone capacità grafiche per essere sfruttate al meglio. Così i risultati sono frequentemente insoddisfacenti. Il disegno è sicuramente difficile in sé, ma spesso è anche la mano del "disegnatore" a non essere pratica.

Allora bisogna fare molta attenzione, perché la figura prodotta non sempre rispecchia l'effettività dei fatti. Può accadere di fare conclusioni affrettate su proprietà che sembrano ovvie "ad occhio", ma che in realtà risultano solo da quel disegno specifico; oppure avere una particolare attesa dal quel disegno che poi non si realizza per colpa di un errore di

---

<sup>8</sup> Per le descrizioni e le immagini di questi strumenti si rimanda al sito dell'*Istituto e Museo della Scienza* di Firenze (<http://brunelleschi.imss.fi.it/museum/isim.asp?c=500164>).

misura o di angolazione, per la poca evidenza dei particolari o di quant'altro.

Il motivo principale di questi errori potrebbe essere dovuto alla struttura prettamente statica che caratterizza un disegno fatto a mano o un'immagine riportata su un libro.

Con l'avvento delle nuove tecnologie e dei nuovi software, si potrebbe probabilmente ovviare a tutti questi problemi.

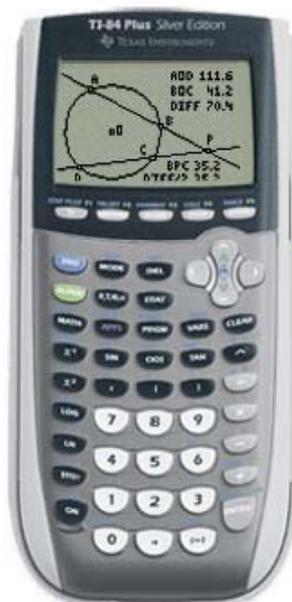
Infatti, l'evoluzione a cui si accennava prima, e che è in corso, ci ha regalato *strumenti specifici* che possono agevolare il lavoro, far sparire quegli errori, aiutare una mano inesperta a produrre disegni utili ai propri scopi.

Nei paragrafi seguenti viene esposta una descrizione dettagliata di alcuni di questi strumenti, utili in particolare per la didattica della matematica:

- le calcolatrici grafiche;
- il Cabri Géomètre;
- il Cabri Java.

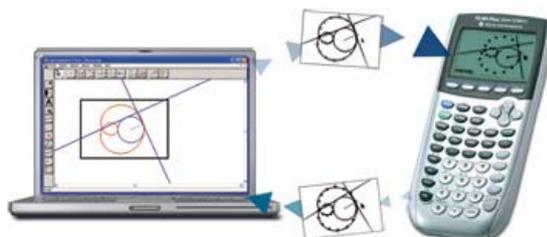
## 2.2.1

## LE CALCOLATRICI GRAFICHE



**TI – 84 Plus**

La TI-84 plus è una delle più recenti calcolatrici grafiche in commercio. È dotata di un'interfaccia grafica che consente di rappresentare sia funzioni che grafici statistici, ma contiene anche molte funzioni predefinite, con la possibilità di utilizzare una versione “light” di Cabri.



Inoltre, può essere collegata con sensori di molti tipi per realizzare esperienze nell'ambito dell'insegnamento della fisica e delle scienze.



**TI – 89**

La TI – 89 è una calcolatrice ideale per l'università e il liceo. Utilizza un programma di elaborazione simbolica del tutto simile a DERIVE che risolve analiticamente anche i problemi più difficili: con 640 KB di memoria, possibilità di aggiornamento elettronico e software per matematica avanzata. La Tecnologia Flash consente di aggiornare elettronicamente il software senza acquistare un nuovo hardware; il modo migliore per avere una calcolatrice sempre al passo con i tempi e con le esigenze scolastiche.



La TI – 89 Titanium è fatta per coloro che apprezzano la versatilità e la portatilità; è dotata di calcolo simbolico, Computer Algebra System, con una disponibilità di memoria di circa 2.7 MB ed un nuovo design. La nuova porta USB ed il cavetto USB in dotazione rendono ancora più semplice e veloce l'utilizzo sulla calcolatrice della grande varietà di applicazioni disponibili per tutti le discipline.<sup>9</sup>

### TI – 89 Titanium

Quelle appena descritte sono alcune calcolatrici grafiche che la **Texas Instruments** produce. Con queste strumentazioni è possibile creare delle valide proposte didattiche che integrano matematica e scienze in quella delicata fascia scolastica della preadolescenza, dove curiosità e voglia di scoperta verso il mondo che ci circonda è tanto presente e sentita.

In gran parte dell'Europa appare abbastanza comune l'ausilio di queste piccole tecnologie, che superano in un certo qual modo l'idea di laboratorio come *ambiente fisso* variamente attrezzato, purtroppo in Italia è ancora restrittivamente vietato l'uso all'esame e a volte anche in classe di queste calcolatrici. Da qui segue che la maggior parte degli insegnanti non le utilizza anche per timore di dare degli svantaggi ai suoi studenti. Diversi sono gli insegnanti che invece le usano e sono molto soddisfatti di quanto sia possibile realizzare didatticamente, ma purtroppo sono mosche bianche.

---

<sup>9</sup> Informazioni tratte dal sito della Texas Instruments, <http://education.ti.com/> (15.01.2009).

Nel Periodico di Matematiche della Mathesis, n.1/2004 si trova la situazione europea (che in questi anni si è ulteriormente evoluta) sull'uso delle calcolatrici grafiche e grafico-simboliche nelle scuole secondarie, che riportiamo nella seguente tabella<sup>10</sup>:

PAESE	
AUSTRIA	L'Austria non ha un esame centralizzato. Gli insegnanti e le scuole hanno completa autonomia nella definizione della didattica e degli strumenti tecnologici da utilizzare. Circa il 40% degli insegnanti di matematica utilizzano e consigliano l'uso delle calcolatrici grafiche.
BELGIO	In Belgio vengono raccomandate alcune linee guida da parte del Ministero della Pubblica Istruzione. Nella regione Fiamminga del Belgio il programma prevede l'uso delle calcolatrici grafiche nella Scuola secondaria (14-16 anni). Il Ministro della Pubblica Istruzione raccomanda di dedicare il 30% del tempo riservato all'insegnamento della matematica all'uso delle tecnologie e delle calcolatrici grafiche. La parte francese è completamente indipendente e esiste una generale tendenza a seguire il trend della zona fiamminga.
CROAZIA	Dal Settembre 2006 la calcolatrice scientifica sarà obbligatoria nel programma della scuola primaria e scuola secondaria di primo grado. È in cantiere l'uso della calcolatrice grafica e l'autorizzazione all'uso a partire da settembre 2007.
DANIMARCA	L'uso delle calcolatrici grafiche è parte integrante del programma ministeriale nazionale e di conseguenza esse sono utilizzate regolarmente dagli insegnanti in tutte le lezioni. La calcolatrice grafica è obbligatoria per matematica, fisica, chimica e economia e autorizzata in tutte queste materie per l'esame nazionale finale nella Scuola secondaria. Associazioni di matematica e insegnanti consigliano l'uso della calcolatrice grafica.

<sup>10</sup> Questa tabella si trova anche sul sito <http://www.matmedia.it> (15.01.09).

FRANCIA	<p>La calcolatrice grafica è stata introdotta nel programma scolastico nel 1987. L'attuale programma richiede l'uso della calcolatrice grafica al Liceo a partire dai 14 anni. L'esame è centralizzato e autorizza l'uso della calcolatrice grafica e grafico simbolica rendendola necessaria per la risoluzione di alcuni quesiti. Il 95% degli insegnanti possiede una calcolatrice grafica, l'80% di essi la usa quotidianamente in classe con gli studenti.</p> <p>La riforma della Scuola tecnica/professionale renderà obbligatoria la calcolatrice grafica nel programma e all'esame a partire dal 2006.</p>
GERMANIA	<p>La Germania ha 16 regioni indipendenti, ognuna con un proprio Ministero della Pubblica Istruzione e un proprio programma. Le calcolatrici grafiche sono obbligatorie in alcune regioni e fortemente raccomandate in altre. Il trend è quello di un'apertura generale all'uso delle calcolatrici grafico-simboliche a partire dal 2006.</p>
LUSSEMBURGO	<p>Il Lussemburgo ha sviluppato un nuovo programma nel 2002 che prevede l'uso delle calcolatrici grafiche in classe e all'esame della Scuola secondaria. Il progetto prevede una ulteriore implementazione nel 2006 con specifico riferimento all'uso delle calcolatrici grafico-simboliche.</p>
NORVEGIA	<p>Il programma sviluppato nel 2000 autorizza l'uso di calcolatrici grafico-simboliche per la maggior parte delle discipline della scuola secondaria e richiede il suo uso all'esame di matematica e scienze.</p> <p>A partire dall'anno scolastico 2005-2006 il programma prevede l'uso delle calcolatrici grafiche-simboliche obbligatorie all'esame in tutte le classi.</p>
OLANDA	<p>Le calcolatrici grafiche sono integrate nel programma nazionale di matematica già dal 1998 per circa il 50% delle scuole secondarie. L'esame, centralizzato, autorizza l'uso di calcolatrici grafiche ma non grafico-simboliche.</p>

PORTOGALLO	<p>Nel 1997 il Portogallo ha adottato un nuovo curriculum nazionale basato sugli standard NCTM americani e la calcolatrice grafica è diventata obbligatoria nella Scuola secondaria e all'esame di matematica.</p> <p>La calcolatrice grafica è stata resa obbligatoria anche per l'esame di fisica e scienze a partire dal 2005.</p>
SPAGNA	<p>La Spagna ha 19 regioni autonome, ognuna con un proprio programma e Ministero della Pubblica Istruzione.</p> <p>In generale sono stati adottati gli standard NCTM e la calcolatrice grafica è autorizzata dal Ministero della Pubblica Istruzione (raccomandata nella regione di Valencia). Il suo uso è però molto limitato.</p>
SVEZIA	<p>Le calcolatrici grafiche sono obbligatorie nella Scuola secondaria. Il ministero della Pubblica Istruzione ha finanziato le scuole per l'acquisto delle calcolatrici grafiche. L'uso delle calcolatrici grafiche durante l'esame finale non è obbligatorio, ma la calcolatrice grafica è autorizzata.</p>
SVIZZERA	<p>La Svizzera non ha un esame centralizzato. Gli insegnanti e le scuole hanno completa autonomia nella definizione della didattica e degli strumenti tecnologici da utilizzare. Circa il 70% degli insegnanti di matematica utilizzano e consigliano l'uso di calcolatrici grafiche.</p>
UK	<p>England: Nel settembre 2001 il nuovo curriculum per la Scuola secondaria raccomanda l'uso della calcolatrice grafica, includendo diversi esempi nei materiali ufficiali.</p> <p>Scozia: Il programma ha incorporato l'uso della calcolatrice grafica nel 1999, ma non è obbligatoria nello studio e l'uso della stessa agli esami.</p> <p>Irlanda: L'uso delle calcolatrici grafiche durante l'esame è autorizzato sin dall'anno scolastico 2001.</p>

Lo scopo di questi strumenti sta nell'utilizzo della tecnologia nel processo di insegnamento/apprendimento e attenzione alla motivazione degli studenti.

Infatti, grazie a tali attrezzature molto maneggevoli, che possono *entrare* nella classe e che possono anche *uscire* dalla scuola, negli zaini dei ragazzi, si possono effettuare *misurazioni* di vario tipo in qualunque ambiente, si può fare laboratorio di matematica e/o di scienze ogni qualvolta si presenti una curiosità a cui si vuole dare una risposta o una congettura di cui si vuole fare una verifica.

Grazie a questi strumenti e a questi metodi di utilizzo si possono creare:

- nuove ipotesi e congetture proposte dagli allievi;
- problemi e domande che richiedono chiarimenti e approfondimenti;
- abilità particolari o impreviste di alcuni allievi;
- interesse e attenzione maggiore alla disciplina;
- desiderio di provare e *gusto dell'esplorazione*.

Tutte condizioni che, ovviamente accompagnate da una seria ed efficace azione didattica mirata, costituiscono elementi al contorno che facilitano il lavoro dell'insegnante.

## 2.1.2

### UN NUOVO SOFTWARE: IL CABRI GÉOMÈTRE

*«La mia idea è stata - come è oggi - di vedere Cabri come uno strumento più generale, valido per la Matematica, naturalmente basata sui rapporti geometrici tra oggetti. È sostanzialmente un ausilio per fare Matematica, per creare modelli scientifici, non restringendo il campo alla sola Geometria.*



**Giuseppe Accascina (a destra), Luigi Tomasi (a sinistra) durante l'intervista con Jean-Marie La borde (al centro)**

***Quale pensa sia la ragione dell'enorme successo e della diffusione di Cabri ?***

*Prima di tutto penso che il successo di Cabri sia dovuto alle solide basi matematiche del software, che gli permettono di dare risultati affidabili dal punto di vista matematico. [...]*

*Il secondo motivo, oltre al solido fondamento matematico, è che Cabri è basato sulla manipolazione diretta ed è incentrato sull'utente. L'utente può essere essenzialmente un principiante; colui che impara può essere un ricercatore ad alto livello, ma può essere anche un bambino di scuola materna, un insegnante, uno studioso di didattica o qualunque tipo di persona. Cabri è uno strumento al cui centro vi è l'utente (user-centered). Considero l'utente come uno studente-principiante perché chiunque con Cabri può imparare qualcosa di nuovo e questo ha la sua*

*base nel processo di interazione che si realizza con questo tipo di strumento.*

*Naturalmente, anche in Cabri, come in molti altri programmi, è valido il seguente principio: “ciò che vedi è ciò che ottieni” (WYSIWYG = “What You See Is What You Get”). Questo è naturalmente molto importante anche in Cabri, ma per me il programma è basato su un altro principio analogo: “ciò che vedi è ciò che ti aspetti”. Hai cioè a disposizione un software nel quale puoi trasportare le tue abitudini, intese come abituali modalità operative, e su cui puoi fare delle cose, se hai un minimo di conoscenze sul quale puoi estendere le tue abilità operative, oppure le puoi facilmente acquisire. Inoltre - e questo è veramente innovativo - Cabri ti permette di sfruttare al massimo le tue abilità operative e le tue conoscenze matematiche e di scoprirne di nuove, cosa che non è sempre possibile con altri software.»<sup>11</sup>*

Quelle appena riportate sono le parole di JEAN-MARIE LABORDE, celebre inventore del CABRI Géomètre.

CABRI è stato sviluppato per permettere l'esplorazione dell'universo della geometria elementare. Esso mette a disposizione dell'utente un mondo che lo studioso greco di geometria aveva immaginato senza pensare che potesse essere un giorno suscettibile di manipolazioni effettive e dirette.

Fino ad oggi si dovevano tracciare le figure geometriche su un foglio di carta e si disponeva così di una rappresentazione più o meno esatta, ma sempre statica, oppure si faceva ricorso a uno strumento informatico, in questo caso però l'utente doveva impadronirsi di un linguaggio particolare per rappresentare le figure geometriche.

---

<sup>11</sup> INTERVISTA A JEAN-MARIE LABORDE, Chiacchierata quasi collettiva con il padre spirituale del software geometrico più diffuso nel mondo a cura di **Giuseppe Accascina** dell'Università “La Sapienza” di Roma e **Luigi Tomasi** del Liceo Scientifico “G. Galilei” Adria – Rovigo, pubblicata sul n° 37 del Bollettino CABRIRRSAE.

Con CABRI le figure geometriche possono essere descritte con azioni e con un linguaggio molto vicini a quello in uso nell'ambiente familiare di "foglio e matita" o di "lavagna e gesso".

In più, una volta create, queste figure geometriche possono essere modificate, "prendendo" direttamente sullo schermo i loro elementi di base e spostandoli, ma cosa importante, queste continuano a mantenere le proprietà che erano state loro attribuite al momento della costruzione.

Il programma permette anche di moltiplicare le esperienze con facilità, ma anche di riconsiderare una figura riproducendone le tappe della costruzione grazie alla funzione di "*Ricostruzione passo a passo*".

Inoltre, all'inizio l'universo di CABRI presenta solo un piccolo numero di oggetti primitivi e di costruzioni possibili, infatti esso permette di costruire tutte le figure della geometria che si possono tracciare su un foglio con l'aiuto di riga e compasso. Ma l'insieme di queste "figure primitive" può essere ampliato grazie alle "*macro-costruzioni*" che permettono di definire una nuova costruzione, semplicemente indicandone gli elementi iniziali e il risultato finale su un prototipo realizzato sullo schermo.

*L'universo dell'utilizzatore di CABRI non è così limitato alla manipolazione degli oggetti "concreti" previsti direttamente dal programma, ma si arricchisce di nuove "astrazioni" che segnano la scoperta della geometria e che gli permettono di andare verso situazioni di complessità crescente.*<sup>12</sup>

Per tutte queste ragioni, CABRI si presta bene ad essere usato sia nella scuola media che nella scuola superiore e dà la possibilità di creare in classe diversi metodi per sfruttarlo.

Si potrebbe, ad esempio, dare le nozioni, spiegare le varie costruzioni e poi far utilizzare il programma per confrontare i risultati.

---

<sup>12</sup> Dall'introduzione al manuale di CABRI géomètre.

Oppure esporre semplicemente il problema e far fare le costruzioni ai ragazzi stessi. In entrambi i casi i ragazzi, anche sbagliando, gli studenti entrano di più nella materia, e l'errore consente loro di capire la realtà dei fatti ed eventualmente di correggersi da soli. Inoltre, si innesca una specie di gara a "chi arriva per primo alla soluzione", cosa che sicuramente è abbastanza stimolante, aumenta la motivazione e abbassa il filtro affettivo.

In più il fatto di lavorare su un PC e di dover seguire delle istruzioni dettagliate li incita a stare più attenti per non perdersi nei passaggi e evitare di non arrivare ai risultati voluti. Non di meno, i colori, il movimento e il fatto stesso di essere delle loro "creazioni" li rende più attivi, e li invoglia a un continuo superare sé stessi.

### **2.1.3**

## **UN AIUTO DALLA RETE: IL CABRI JAVA**

Negli ultimi anni, si è notato come l'impetuoso diffondersi della rete, le applicazioni dovute al suo utilizzo e la necessità dell'uso dei computer, sono divenuti parte integrante della società ed in particolare della vita dei ragazzi.

Nel campo della scuola, la rete Internet si è rivelata nel corso dei decenni un ottimo strumento per permettere la diffusione di materiali messi online da pubblici e privati, istituzioni fino allo stesso Ministero della Pubblica Istruzione con l'intento di sviluppare una didattica della condivisione. Una condivisione che volendo potrebbe includere anche gli stessi studenti.

La visualizzazione di figure in rete, e soprattutto l'uso di animazioni nelle pagine Web, può chiarire in modo molto efficace alcuni argomenti, in questo caso di matematica, con la possibilità di esplorare rapidamente diverse configurazioni, scoprendo proprietà varianti e invarianti di una data figura.

Nato alla fine degli anni Ottanta (1988) nei laboratori di ricerca del CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique) e dell'Università "Joseph Fourier" di Grenoble (Francia), Cabri Géomètre conta, dopo vent'anni, una decina di milioni di utenti in tutto il mondo, che lo utilizzano su computer dotati di sistemi Windows e Mac, oltre che su alcune calcolatrici (TI-92 Plus, TI-89, Voyage 200, TI-83 Plus, TI-84) prodotte dalla Texas Instruments.

Si è posta, quindi, la necessità di pubblicare nel Web figure che riproducessero le stesse caratteristiche dinamiche delle figure create con Cabri, in modo da permettere un'esplorazione dinamica di esse anche in

una pagina Web. Così a partire dal 1998, si è presentata la disponibilità di un nuovo strumento: il **CABRI JAVA**.

Cabri Java è un'applicazione scritta in linguaggio Java, che permette di pubblicare facilmente in rete una figura costruita con Cabri, conservandone la dinamicità e la possibilità di manipolazione. Un "applet" in linguaggio Java è un'applicazione, un programma, che viene eseguito all'interno di una pagina Web, soprattutto per creare delle animazioni o degli effetti dinamici. Gli applet appaiono come figure inserite nella pagina con le quali si può interagire. Con Cabri Java una figura di Cabri Géomètre viene tradotta in un "applet".

A scuola uno strumento del genere potrebbe essere utile a molti scopi:

- far vedere qualche costruzione geometrica "difficile" (rispetto al livello scolastico) per sollecitare l'interesse;
- mostrare qualcosa di "errato" per risvegliare il senso critico negli studenti;
- insegnare che, in ogni caso, va controllata la fonte da cui è tratta l'immagine.

Inoltre, Cabri Java permette di:

- portare le figure prodotte con Cabri géomètre II, con la loro interattività, nelle pagine Web;
- costruire uno strumento facile da usare e ben integrato con i browser più diffusi (Internet Explorer, Mozilla Firefox,...) ;
- fornire uno strumento facile da mettere in opera senza costo supplementare;
- fornire uno strumento che permetta, in una pagina Web, una interazione ricca con le figure geometriche, assimilabile a quella che si ha con una figura di Cabri géomètre.

Questa applicazione potrebbe quindi essere utile agli insegnanti e agli studenti che vogliono pubblicare in rete le figure prodotte con Cabri, ad esempio nel sito della loro scuola, o anche per costruire degli ipertesti di geometria da pubblicare in Internet o da registrare in un cd-rom. Cabri Java è quindi uno strumento che completa Cabri ed è un eccellente supporto per il Web.

Essendo, poi, Cabri Géomètre oggi il programma di geometria dinamica più diffuso al mondo, esistono molti siti Internet dedicati a questo software e che sfruttano le potenzialità del Cabri Java, in diverse lingue. Una semplice ricerca in rete permette di ottenere un numero grandissimo di riferimenti a questo programma.

Il maggior numero di siti su Cabri, per ovvie ragioni, è in lingua francese; seguono quelli in lingua inglese, in lingua spagnola, in lingua italiana e in altre lingue.

Riportiamo in **APPENDICE 2** un elenco dettagliato di molti ed interessanti siti su Cabri géomètre e Cabri Java con particolare attenzione a quelli di interesse didattico.

L'argomento è prevalentemente la geometria, ma è possibile trovare molti siti dedicati a altri argomenti di matematica, alla fisica, all'astronomia, ai meccanismi articolati, ecc..

## **§ 2.2 LE MOTIVAZIONI PER L'UTILIZZO DI UN SOFTWARE DI GEOMETRIA DINAMICA (DGS)**

Le motivazioni e il perché è fruttuoso l'utilizzo di questi nuovi strumenti didattici sono molteplici, ma soprattutto sono notevoli ai fini pratici. Anche se già in parte accennati precedentemente, li sviluppiamo più in dettaglio.

### **1) Sono strumenti creati per essere utilizzati sia dai docenti che dagli studenti.**

È come una “mano esperta” al servizio degli insegnanti e degli studenti, che disegna a *colori* e “in movimento” in modo preciso, naturale e potenzialmente “artistico”. Ciò aumenta le possibilità di autogrificazione e quindi, anche per questo, facilita l'apprendimento. Aumenta le possibilità di scoperta e dimostrazione degli insegnanti e degli studenti stessi (*problem solving*).

Lo studente, infatti, nel leggere in un testo le dimostrazioni di teoremi e nel memorizzarle, non riesce a “interagire” con la materia più di tanto, ma se coinvolto in attività di *problem solving*, comincia a lavorare e a pensare quasi come un ricercatore di matematica. Inoltre un'attività di problem solving potrebbe aiutare gli studenti ad apprezzare la natura e gli obiettivi delle dimostrazioni matematiche.

### **2) Danno la possibilità di preparare materiale didattico interattivo.**

Integrare in modo dinamico le lezioni potrebbe essere piacevole per i ragazzi. Grazie alle immagini realizzate con Cabri, si possono preparare

- documenti in **WORD** da lasciare ai ragazzi come “schede di approfondimento”;

- presentazioni in **POWERPOINT** da proiettare in aula;
- esperienze con diversi strumenti quali PC, lavagne interattive, sensori di vario genere, calcolatrici grafiche, ecc..

### **3) Consentono disegni veloci e precisi.**

Grazie a questi strumenti sia i docenti che gli studenti acquistano sicurezza nelle loro capacità. Cabri permette di realizzare figure chiare e precise in cui è possibile indicare una parte del disegno con la “freccina” del mouse, o anche farlo muovere o fargli “lasciare una traccia”.

### **4) Permettono un utilizzo più serio del computer.**

Ai giorni nostri, il computer e Internet, in particolare, sono parte integrante della vita dei ragazzi. E potrebbe essere più stimolante e istruttivo utilizzarlo anche nello studio, e non solo per i giochi, per i blog o per i vari siti più o meno interessanti. Il computer potrebbe essere più convincente e più stimolante di un libro di testo, e grazie ad Internet ed in particolare ai siti dedicati al Cabri, si potrebbero vedere i risultati raggiungibili sfruttando al massimo le potenzialità di questo software.

Inoltre, grazie anche all'avvento del **Web 2.0**<sup>13</sup> si può, in senso letterale, interagire con la rete. Nel nostro caso modificando le figure in movimento, variando le posizioni degli “oggetti” che ci interessano, mettendo in evidenza i particolari più interessanti.

---

<sup>13</sup> Il **Web 2.0** è una locuzione utilizzata per indicare genericamente uno stato di evoluzione di Internet (e in particolare del World Wide Web), rispetto alla condizione precedente. Si tende ad indicare come Web 2.0 l'insieme di tutte quelle applicazioni online che permettono uno spiccato livello di interazione sito-utente (blog, forum, chat, sistemi quali Wikipedia, Youtube, Facebook, Myspace, Gmail, ecc.). La locuzione pone l'accento sulle differenze rispetto al cosiddetto Web 1.0, diffuso fino agli anni '90, e composto prevalentemente da siti Web statici, senza alcuna possibilità di interazione con l'utente eccetto la normale navigazione tra le pagine, l'uso delle e-mail e l'uso dei motori di ricerca.

La linea di fondo del Web 2,0 è descrivere un Internet dove le persone e gli utenti di diverse culture interagiscono, un vero terreno d'incontro di idee e di informazioni che permette la condivisione di materiale audio, video, animazione e altri formati.

**5) Consentono di insegnare una matematica “più utile” alla collettività.**

L'utilizzo di questi strumenti riesce a far intravedere le applicazioni concrete che i risultati del proprio lavoro possono avere in altri ambiti e magari nella vita quotidiana.

**6) Usano un linguaggio più affine al “nuovo” modo di esprimersi, unificando la comunicazione orale con quella scritta, visiva e “dinamica”.**

Il modo di pensare e di esprimersi tipico dei matematici potrebbe essere considerato diverso da quello attuale. Questi strumenti ci danno la possibilità di esprimerci come vogliamo, di utilizzare un linguaggio semplice e conciso. E la dinamicità, e di conseguenza al movimento delle parti delle figure potrebbero facilitare l'attenzione:

*“Le diverse parti del cervello umano funzionano a velocità differenti e gli oggetti vengono riconosciuti da una parte del cervello, mentre il moto viene rilevato da un'altra. Ciò significa che quando vediamo una persona in movimento, le due sezioni del cervello riconoscono separatamente moto e persona, mentre una terza parte unisce i due segnali... L'aspetto interessante è che le due zone del cervello funzionano a velocità sensibilmente diverse, e quella che riconosce il moto è molto più rapida. Immagino che l'origine di questa caratteristica sia sempre di carattere evolutivo: per un umano nella giungla è più importante riconoscere rapidamente se qualcuno si muove, piuttosto che riconoscere chi si muove - che sia una tigre, un leone o un serpente.”<sup>14</sup>*

**Michael F. Atiyah**

---

<sup>14</sup> Atiyah M. F., *Siamo tutti matematici*, Di Renzo Editore, Roma, 2007, p. 13.

**7) Danno la possibilità di migliorare i disegni già prodotti, agendo sullo stesso file, senza “rifare tutto”.**

Grazie a questi strumenti siamo in grado sia di modificare le figure senza “danneggiarle”, ma anche di “riutilizzarle” per altri argomenti, modificandole solo in parte, senza dover rifare il disegno tutto da capo.

**8) Sfruttano il metodo “induttivo”.**

Con il termine **induzione** si intende quella forma di ragionamento per cui, dall’esame di uno o più casi particolari, si giunge alla conclusione la cui formulazione generalizzata va al di là dei singoli casi analizzati. Cabri permette di analizzare questi casi specifici per arrivare alla soluzione generale.

**9) Danno la possibilità di trattare nuovi argomenti.**

Mettono in condizione di fare congetture, sulle proprietà algebriche e geometriche di figure, sulle relazioni che possono intercorrere tra i diversi elementi di una figura, e molto altro. Potrebbero nascere così nuove domande, nuove curiosità, nuove questioni, che non fanno parte del programma scolastico, ma che potrebbero affascinano gli studenti, essendo curiosità nate da loro.

**10) Propongono un modo semplice per imparare e sperimentare la matematica.**

È possibile costruire, modificare e animare costruzioni, cambiare forma agli oggetti utilizzando solo il mouse. I concetti considerati astratti diventano chiari e gli studenti potrebbero venire realmente coinvolti nel pensiero matematico: esplorare e fare congetture, ragionare e provare, *problem-solving*, autovalutazione e molto altro.

**11) “Suggeriscono con discrezione” agli studenti i possibili risultati raggiungibili.**

Mettendo più o meno in evidenza alcuni particolari facilmente modificabili, i ragazzi si trovano a contatto con le proprietà tipiche di quel particolare disegno che stanno effettuando.

**12) Permettono agli studenti lo svolgimento di compiti molto più piacevoli di quelli tradizionali.**

Nella realizzazione di un “disegno matematico” al computer ci potrebbe essere la possibilità da parte degli studenti di trovare soluzioni tecniche personali. Essi potrebbero soddisfare le loro esigenze creative, scientifiche ed anche estetiche ed artistiche.

**13) Possono conferire anche alla matematica quell’*alone di magia* che ha spesso la scienza, scatenando lo stupore e la curiosità:**

I disegni dinamici offrono la possibilità di vedere come la figura in questione possa cambiare, quali proprietà possa mantenere e quali no, stupirsi quando si nota un qualcosa di inaspettato, avere la curiosità di capire i perché di quel processo, i perché di quel movimento, *i perché della matematica.*

# Capitolo 3

## LE RADICI DEL CALCOLO INFINITESIMALE

### § 3.1 IL PENSIERO MATEMATICO GRECO

*Chi volesse risalire alle origini dei metodi infinitesimali dovrebbe  
arrivare a quel periodo della filosofia greca,  
ove si sono buttate le basi logiche della geometria.*

Guido Castenuovo<sup>15</sup>

Attorno al V-IV secolo a.C., la Grecia era la culla dello scibile umano. Tra guerre e dittature, nacque una prima forma di “democrazia” che concedeva ad alcuni libertà di operato mai viste prima, e forse

---

<sup>15</sup> Castenuovo G., *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, Zanichelli, Bologna 1962, p. 3.

neanche dopo. Atene, Stagira, Mileto, Elea, sono solo alcune delle numerose Polis greche che davano ospitalità ai grandi filosofi del passato quali Anassimandro, Eraclito, Parmenide, Democrito, e poi Socrate, Platone e Aristotele, per non parlare di comunità come quelle dei Pitagorici.<sup>16</sup>

I greci ereditano dall'Oriente una matematica che aveva già avuto sviluppi notevoli in aritmetica e algebra, ma che era ferma ad una geometria di carattere strettamente pratico. Per i greci fare matematica significava dimostrare. Anche le verità aritmetiche o geometriche apparentemente più ovvie dovevano essere ricondotte a principi semplicissimi e dedotte attraverso una catena di ragionamenti opportunamente disposti. Ma la vera novità sta nel fatto che nel mondo greco la geometria passa dallo stadio pratico, che può dirsi di *approssimazione*, a quello teorico, che fu detto di *precisione*: gli enti geometrici vengono idealizzati, considerati come enti a sé stanti, distaccati da ogni traccia di materia.<sup>17</sup> E questa idealizzazione subisce una svolta decisiva con la scoperta delle linee incommensurabili avvenuta, a quanto pare, nella scuola pitagorica sorta intorno al maestro, verso il 500 a. C. A quell'epoca prese piede la teoria atomista, divulgata da **Democrito di Abdera** (460-370 a.C. circa). Egli presentava una concezione del mondo materialistica: tutti i fenomeni andavano spiegati in termini di atomi impenetrabilmente duri e infinitamente piccoli. Con il termine Atomi (dal greco *a-tomos* = indivisibile), intendeva piccolissime particelle che componevano la materia e che costituivano la base della stessa. **Aristotele** (384-322 a.C.), successivamente, trasformò quest'intuizione falsandone i contenuti, ma mantenendone i concetti. Egli insegnava che la materia è composta da quattro elementi: terra, aria,

---

<sup>16</sup> Per uno sguardo complessivo sulla matematica greca si legga *A History of Greek Mathematics*, di Thomas Heath, o *Le scienze esatte nell'antica Grecia* di Gino Loria.

<sup>17</sup> Frajese A., *Opere di Archimede*, Editrice torinese, Torino, 1974, p. 11.

acqua e fuoco; ognuno dei quali era distribuito in maniera e quantità diversa a seconda della natura del corpo.

Aristotele nega l'esistenza dell'infinito. L'infinito per Aristotele esiste solo potenzialmente, ma non è mai effettivamente attuabile. Non esiste come realtà fisica e neanche come realtà matematica: esiste solo potenzialmente.

Nel periodo pre-euclideo il progresso matematico si svolge anche in un'altra direzione: si procede cioè alla formazione del cosiddetto *sistema degli Elementi* (l'espressione è del grande matematico e storico danese H. G. Zeuthen<sup>18</sup>).

Il rigore matematico individuabile dagli *Elementi* di Euclide (ca. 300 a. C.) in poi, consiste nell'enunciare tutte le proposizioni primitive delle quali si fa uso nel procedimento dimostrativo. In tal modo, una volta enunciate le proposizioni primitive, non si fa più uso dell'intuizione, ma le successive proposizioni vengono dedotte dalle precedenti, e in definitiva dalle proposizioni primitive stesse.

Euclide rappresenta il punto di arrivo di tutta una ricerca matematica che era fiorita almeno nei tre secoli precedenti. Egli unificò nel suo libro l'opera di molte scuole, ma anche quella di individui isolati.

Fra coloro che successivamente si occuparono di questi aspetti della matematica troviamo, attorno al 250 a.C., un giovinetto appassionato di meccanica, statica, astronomia, matematica e geometria, in grado di concentrarsi su di un problema per giorni e giorni, dimenticando anche di mangiare e di lavarsi, finché non fosse riuscito a risolverlo. Il suo nome era **Archimede di Siracusa**.

---

<sup>18</sup> Frajese A., *Opere di Archimede*, Editrice torinese, Torino, 1974, p. 12.

## § 3.2 ARCHIMEDE DI SIRACUSA



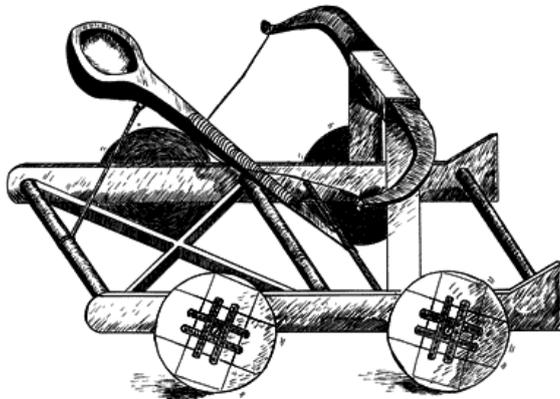
Per tutta l'Età ellenistica Alessandria rimase il centro degli studi matematici, ma uno dei più grandi matematici di quell'età non era nato ad Alessandria. Forse Archimede studiò ad Alessandria per un certo periodo di tempo, sotto la guida dei discepoli di Euclide, continuando poi a tenersi in contatto con i matematici Alessandrini, tuttavia visse e morì a

Siracusa (287-212 a.C.). Figlio di un astronomo di nome Fidia, aveva ereditato dal padre l'amore per le scienze esatte.

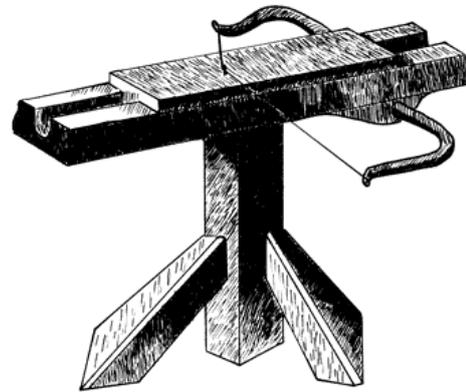
Poche sono le notizie certe sulla sua vita ma si sa che sicuramente fu in rapporti di grande amicizia con il matematico e astronomo Conone di Samo e intrattenne una ricca corrispondenza con vari scienziati di Alessandria, tra i quali Dositteo ed Eratostene. Archimede si occupò di tutti i campi delle scienze matematiche (geometria piana e solida, meccanica, ottica, idrostatica, astronomia, ecc.) e di varie applicazioni tecnologiche. Iniziò i suoi studi con l'astronomia e con la meccanica. Ma il suo grande desiderio non era capire il moto dei pianeti ma determinare aree, volumi baricentri di coniche, di quadriche rotonde e di figure con esse formate.

Si dice che durante l'assedio romano della seconda guerra punica Archimede abbia dato vita a ingegnose macchine da guerra per tenere lontano il nemico: catapulte per lanciare pietre, corde, carrucole e ganci

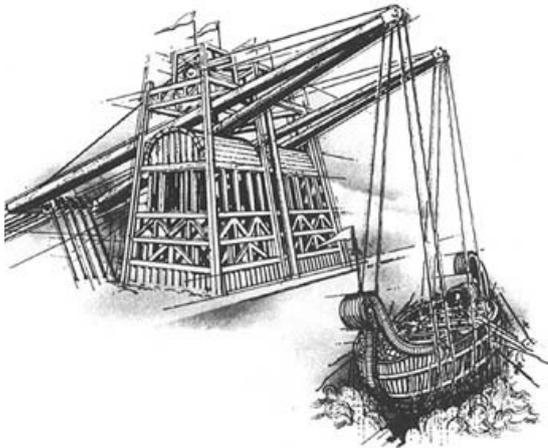
per sollevare e schiantare le navi romane e specchi ustori per sviluppare incendi su di esse.



La catapulta (disegno di V.Pinna)



La balista (disegno di V.Pinna)



Archimede con uno specchio ustorio  
(Archivio Drexel University, USA)

Archimede si può, in un certo senso considerare un *ingegnere* nel senso più ampio, cioè non soltanto nel senso di colui che applica la teoria alla pratica, ma anche di colui che quella teoria la costruisce.

La morte di Archimede viene raccontata attraverso versioni che differiscono leggermente l'una dall'altra. Plutarco, ad esempio, racconta che il soldato che aveva avuto l'ordine di risparmiargli la vita, si sarebbe avvicinato ordinandogli di seguirlo da Marcello e il matematico gli disse di aspettare che risolvesse il problema, il che fece infuriare il legionario che lo uccise.

Marcello, profondamente rattristato dall'accaduto, fece ricercare i parenti di Archimede per proteggerli e fece provvedere alla sua sepoltura. Archimede volle che fosse incisa come epitaffio sulla sua

tomba la figura che rappresentava una sfera inscritta in un cilindro retto la cui altezza è uguale al diametro della sfera.

*“Molte e mirabili furono le scoperte che egli fece; ma sulla tomba pregò, si dice, gli amici e i parenti di mettergli, dopo morto, un cilindro con dentro una sfera, e quale iscrizione la proporzione dell'eccedenza del solido contenente rispetto al contenuto.”* (Plutarco, *Vite Parallele* – Marcello Cap. XVII, Par. 12)



**Presunta tomba di Archimede (la vera tomba di Archimede era probabilmente situata, come sappiamo da Cicerone, nella necropoli dell'Acradina, probabilmente da identificare con quella del Fusco, a ovest della città di Siracusa)**

Cicerone racconta di avere scoperto egli stesso la tomba di Archimede grazie ad una sfera inscritta in un cilindro.



**Cicerone scopre la tomba di Archimede**

*“Quando ero questore in Sicilia mi misi a cercare la sua tomba invasa dalle erbe e dagli sterpi, che i Siracusani non conoscevano e anzi negavano che esistesse. Avevo infatti sentito parlare di alcuni versi incisi sulla*

*tomba che spiegavano perché essa fosse sormontata da una sfera e da un cilindro. Fuori da Porta Agrigentina c'è un gran numero di sepolture, e a forza di cercare e di guardare notai finalmente una piccola colonna che a pena superava la boscaglia di sterpi, e su di essa erano raffigurati una sfera e un cilindro. Dissi subito ai nobili siracusani che erano con me che probabilmente avevo trovato quello che stavo cercando: ci facemmo fare strada da un buon numero di gente munita di falci. Sgombrato così il campo, arrivammo alla base del monumento: si vedeva ancora l'epigramma, anche se la seconda metà dei versi era corrosa.” (Marco Tullio Cicerone, *Tusculanae Disputationes*, Cap.V, Par. 23).*



**Sfera inscritta in un cilindro e figure frattali**

L'importanza di questa proporzione è stata anche sottolineata con un francobollo fatto stampare il 14 ottobre del 2000 come logo dell'anno mondiale della matematica.

Per ulteriori notizie sulle fonti riguardanti la vita di Archimede si può trovare un'esposizione dettagliata nella traduzione in italiano di G. Baroncelli, M. Bucciattini e M. Porta: *E. J. Dijkstrahuis, Archimede. Con un saggio bibliografico di Wilbur R. Knorr* (Ponte delle Grazie, Firenze, 1989). Anche su internet si trovano varie fonti relative ad Archimede, come il sito della Drexel University di Philadelphia, curato da Chris Rorres:

<http://www.mcs.drexel.edu/~crorres/Archimedes/contents.html> e il sito della School of Mathematics and Statics della University of St. Andrews in Scozia: <http://www.history.mcs.st-and.ac.uk/>.

Al contrario di Euclide Archimede in quasi tutte le sue opere geometriche sembra mirare a parlare con i dotti, che saranno in grado di integrare le parti che lui dà per ovvie e scontate. Archimede però si attiene alla impostazione euclidea di una trattazione con andamento di “sintesi”. Egli parte da proposizioni primitive e a mano a mano ne deduce proposizioni sempre più complesse, fino a quelle che costituiscono lo scopo di ciascuna opera.

La grande novità delle opere di Archimede è che in esse compaiono regole di misura e calcoli aritmetici, con un certo grado di “esibizione compiaciuta”. Dedicò un’opera alla *Misura del cerchio*, una alla *Quadratura della parabola* e un’altra l’*Arenario* ad estendere il concetto greco di numero, altre sono dedicate a questioni che si potrebbero definire di Matematica applicata, come ad esempio l’opera *Sull’equilibrio dei piani* e i due libri sui *Galleggianti*.

Scrive un’opera sul rapporto tra la *Sfera e il cilindro*, proporzione a lui molto cara. Questo scritto, che nella traduzione italiana occupa più di 140 pagine, consta di due Libri, entrambi introdotti da lettere inviate a Dositeo. Le parti geometricamente più interessanti sono contenute nel primo Libro; il secondo, tratta di problemi di suddivisione della superficie sferica con piani, in modo opportuno.

Seguono altre due opere, *Spirali e Conoidi e sferoidi*. Tali opere, saranno inviate sempre a Dositeo, per completare le dimostrazioni dei problemi posti a Conone. La lettera ribadisce alcuni risultati trovati in precedenza e mostra come sia possibile risolvere uno dei problemi della lista, quello di determinare un cerchio avente per area quella della superficie di una sfera assegnata.

Di fondamentale importanza è il *Metodo sui teoremi meccanici*, una lettera scritta ad Eratostene, che presenta una sorta di riflessione per spiegare al matematico alessandrino come Archimede era giunto ai

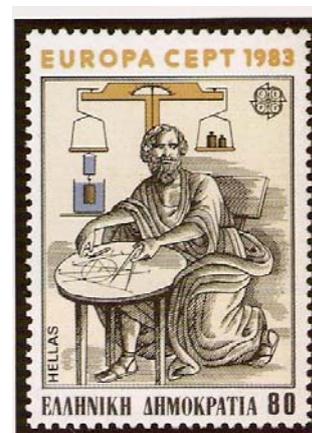
risultati presenti nell'opera stessa. Vedremo nello specifico quest'opera in un paragrafo successivo (Par. 3.5).

Per le opere, il riferimento fondamentale sono i tre volumi dell'edizione critica di Heiberg, con testo greco e traduzione latina a fronte: *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii, iterum edidit*.

Dei 'ritrovati' meccanici che resero famoso Archimede nel suo tempo, invece non si ritrova notizia nelle opere pervenute. Ma i vari resoconti rimasti sulla sua vita, sono comunque d'accordo nel dipingerlo come una persona che attribuiva scarso valore ai suoi "congegni meccanici", rispetto ai "prodotti" della sua attività intellettuale: era molto più interessato ai principi generali che governavano le sue invenzioni che alle loro applicazioni pratiche. Sembra vedesse questa attività solo come un diversivo giocoso agli studi di Geometria.

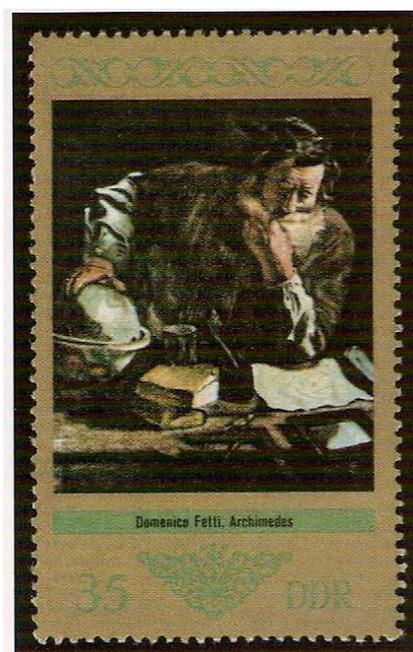
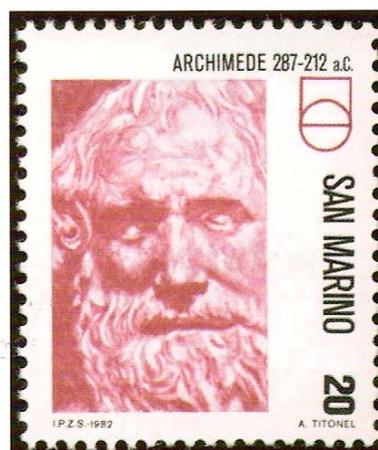
In questo campo, la feconda ricerca di Archimede è considerata *il punto culminante* della storia dei procedimenti infinitesimali nell'Antichità.

La fama del matematico siracusano è stata celebrata, nel corso degli anni, da diversi paesi con l'emissione di francobolli commemorativi. In Italia (2 Maggio 1983) e in Grecia, come d'obbligo,



Ritratto di Archimede e vite senza fine

ma anche in Spagna e a San Marino (21 Aprile 1982) e, prima della caduta del Muro, dalla Repubblica Democratica Tedesca (13 novembre 1973).



E ancora in onore di Archimede:

- il 14 marzo si festeggia in tutto il mondo il *pi greco day*, in quanto nei paesi anglosassoni corrisponde al  $3/14$ . In quel giorno vengono organizzati concorsi di matematica e ricordati anche i contributi di Archimede, che di pi greco dette la prima stima accurata.
- sono stati nominati sia il cratere lunare Archimede che l'asteroide 3600 Archimede.

- è in fase di realizzazione il *Progetto Archimede*, una centrale solare presso Priolo Gargallo che utilizza una serie di specchi per produrre energia elettrica.
- Archimede Pitagorico è il nome italiano del geniale inventore personaggio della casa Walt Disney (in originale Gyro Gearloose).
- “Archimedes” fu uno dei primi personal computer con processore RISC immessi sul mercato dalla Acorn alla fine degli anni ottanta.
- nella Medaglia Fields, massima onorificenza per matematici, vi è il ritratto di Archimede.



**Fronte della Medaglia Fields:**  
**volto di Archimede e una sua frase**  
*Transire suum pectus mundoque potiri*  
 (Trascendere le limitazioni umane e padroneggiare l'universo).

## § 3.3 IL METODO DI ESAUSTIONE

Una significativa parte dei procedimenti infinitesimali viene quindi intuita dai Greci: tra questi, il **metodo di esaustione** è senza dubbio uno dei più importanti ed eleganti. La sua applicazione, abbinata alla “*reductio ad absurdum*”, consente la dimostrazione rigorosa di molti risultati; esso costituisce un fecondo punto di riferimento, anche dal punto di vista critico, per la precisazione seicentesca dei concetti fondamentali dell’analisi matematica. Il metodo di esaustione si proponeva di riempire, letteralmente, un’area con delle figure note tali che la loro somma approssimasse l’area cercata.

Fu **Eudosso di Cnido** (408-355 a.C. circa), grande matematico e astronomo, che dedicandosi allo studio di superfici e solidi nei casi più complessi introdusse questo metodo.

Tutte le opere di Eudosso sono perdute: dunque l’attribuzione di questi risultati al matematico di Cnido è sempre indiretta. La testimonianza decisiva è quella di Euclide, che attribuisce la dimostrazione della X proposizione nel XII libro degli *Elementi* (*il volume di un cono rotondo è un terzo del volume del cilindro con la stessa base e la stessa altezza*) ad Eudosso.

L’enunciato della proprietà di esaustione presente negli *Elementi* è: **Proposizione I del X libro degli *Elementi***. [*Assumendosi come*] *date due grandezze diseguali, se si sottrae dalla maggiore una grandezza maggiore della metà, dalla parte restante un’altra grandezza maggiore della metà, e così si procede successivamente, rimarrà una grandezza che sarà minore della grandezza minore [inizialmente] assunta.*<sup>19</sup>

---

<sup>19</sup> Frajese A., Maccioni L., *Gli elementi di Euclide*, Utet, Torino, 1970, p. 596.

La dimostrazione euclidea di tale proposizione fa uso essenziale del postulato di Eudosso, che appare negli *Elementi* nella forma seguente:

**Definizione IV del V libro degli *Elementi*.** *Si dice che hanno fra loro rapporto (o ragione) le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente.*<sup>20</sup>

In più, la prima e la più celebre dimostrazione per esaustione negli *Elementi* riguarda la proposizione seguente: **Proposizione II del XII libro degli *Elementi*.** *I cerchi stanno fra loro come i quadrati dei diametri.*<sup>21</sup>

Il metodo di esaustione viene usato assai ampiamente anche negli scritti matematici di Archimede. Ma diversamente da Eudosso e Euclide, il ruolo essenziale del metodo di esaustione nel contesto della ricerca geometrica archimedeica è quello di **conferire il definitivo rigore alle dimostrazioni**, inizialmente intuitive.

Il metodo di esaustione si dimostrò fondamentale per risolvere molte “questioni” proposte da Archimede, come il problema del confronto delle superfici di figure a contorni curvilinei e rettilinei e il problema della quadratura del cerchio, cioè la ricerca di un quadrato di area uguale a quella del cerchio.

Il carattere comune di tutte le dimostrazioni per esaustione di Archimede è il seguente:

volendo dimostrare che due grandezze A, B sono uguali tra loro si procede col metodo di riduzione all'assurdo. In un primo momento si suppone che sia A maggiore di B. Si immagina una successione  $T_1, T_2, T_3, \dots$  di grandezze omogenee con A e con B la quale:

1. sia sempre prolungabile;
2. abbia tutti i termini minori sia di A che di B;
3. i termini approssimino la grandezza posta maggiore.

---

<sup>20</sup> Frajese A., Maccioni L., *Gli elementi di Euclide*, Utet, Torino, 1970, p. 298.

<sup>21</sup> Frajese A., Maccioni L., *Gli elementi di Euclide*, Utet, Torino, 1970, p. 931.

Fissata, ora la differenza tra le due grandezze  $D = A - B$ , la condizione 3. della successione permette di trovare un elemento  $T_h$  che differisca da  $A$  per meno di  $D$ , cioè  $T_h$  è compreso tra  $A$  e  $B$ , in particolare sarebbe maggiore di  $B$ , contro la condizione 2..

Non è possibile, dunque che tra  $A$  e  $B$  sussista una qualsiasi differenza  $D$ . Il metodo procede in modo analogo se le grandezze  $T_1, T_2, T_3, \dots$  della successione considerata costituiscono valori approssimati per eccesso, anziché per difetto, di  $A$  e  $B$ .

Guido Castelnuovo osserva: *“Quel metodo, a differenza del processo di limite, non è un metodo analitico di ricerca che conduca alla scoperta, ma fornisce solo il mezzo per dimostrare -per assurdo- un risultato che si suppone già noto”*<sup>22</sup>.

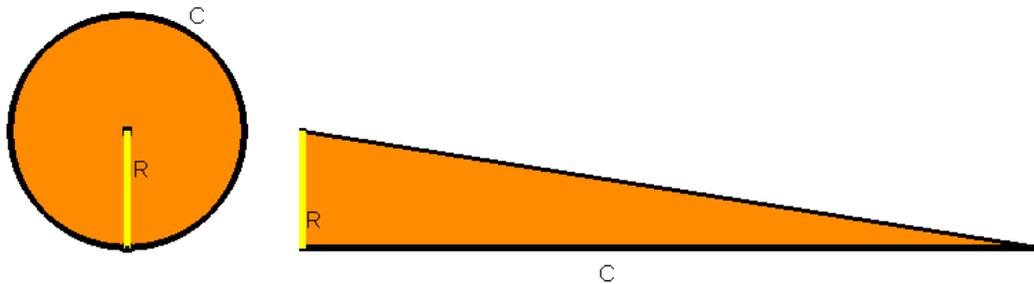
Questo aspetto è centrale dal punto di vista metodologico: il metodo di esaustione non ha mai valore euristico. Mediante esso Archimede non giunge ad un risultato, ma dimostra una tesi che deve essere già supposta, intuita mediante procedimenti diversi (e meno rigorosi).

---

<sup>22</sup> Castelnuovo G., *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, Zanichelli, Bologna, 1962, p. 34.



*un cateto è uguale al raggio del cerchio e l'altro è uguale alla sua circonferenza.*



La dimostrazione di questo primo teorema offre un esempio tipico di applicazione del classico metodo di esaustione.

In un primo momento si suppone, per assurdo, che l'area del cerchio sia più grande di quella del triangolo:  $C > T$ , cioè  $C - T = D$ .

A questo punto, si inscrive nel cerchio un quadrato, si dividono gli archi AB, BC, CD e DA in due parti uguali e si congiungono i punti risultanti dalla divisione precedente. Si viene così a formare un nuovo poligono (l'**ottagono regolare arancione** in Fig. 3.1) anch'esso inscritto nel cerchio.

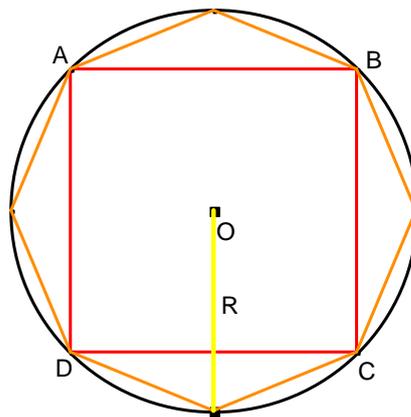


Fig. 3.1

Continuando la divisione degli archi in questo modo, si ottengono dei poligoni regolari con un sempre maggiore numero di lati, ancora inscritti nel cerchio di partenza (Fig. 3.2).

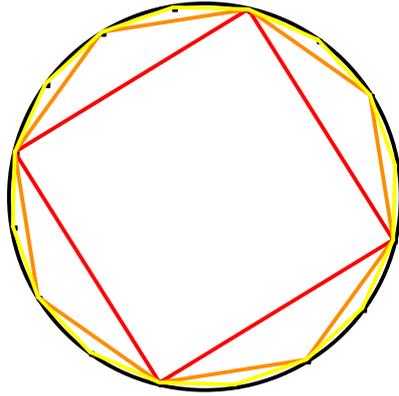


Fig. 3.2

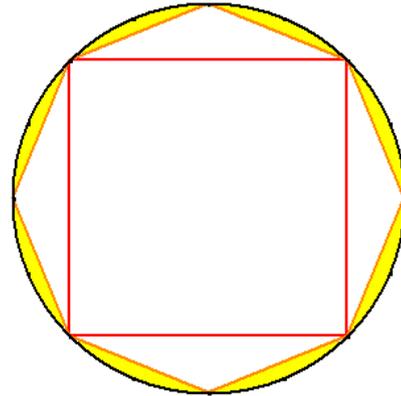


Fig. 3.3

Siano  $P, P', P'', \dots$  le aree di questi poligoni. Come si vede in Fig. 3.2, le  $P$  si “avvicinano” sempre più a  $C$ . Continuando così a costruire sempre nuovi poligoni, si riesce a trovarne uno, la cui area  $P$  differisce da  $C$  per meno di  $D$  (la parte in giallo in Fig. 3.3), cioè  $T < P < C$ . Allora  $P > T$ , cioè l’area del poligono è maggiore di quella del triangolo.

D’altro canto per la costruzione dei poligoni stessi, si ha che, considerando la perpendicolare  $OX$  dal centro del cerchio ad un lato del poligono, questa sarà minore dell’altezza del triangolo, cioè del raggio del cerchio.

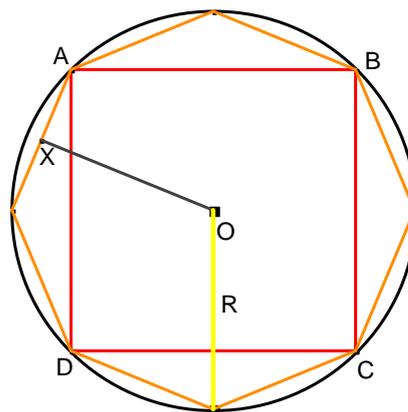


Fig. 3.4

Ma anche il perimetro del **poligono** è a sua volta minore della base, dato che è minore della circonferenza del cerchio. Di conseguenza, l’area del **poligono** è minore di quella del triangolo, il che è assurdo.

Sempre ragionando per assurdo, si suppone ora che l'area del cerchio sia minore di quella del triangolo:  $C < T$ , cioè  $T - C = D$ .

Si circoscrive al cerchio un **quadrato**, si dividano gli archi in due parti uguali e si tirino le tangenti ai punti di divisione (Fig. 3.5).

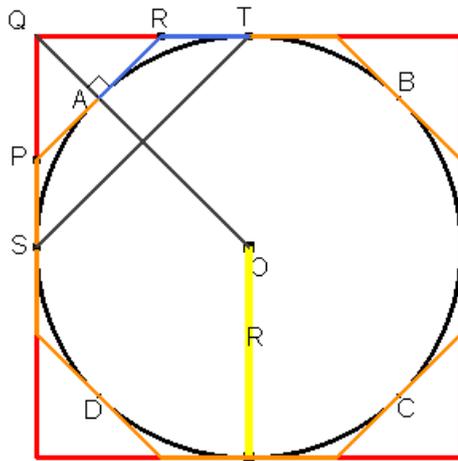


Fig. 3.5

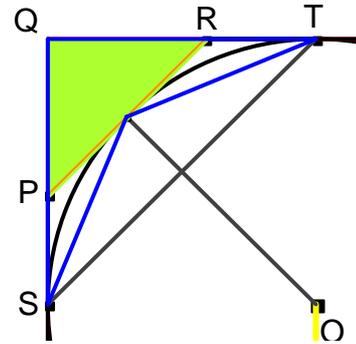


Fig. 3.6

L'angolo QAR è retto, e quindi QR è maggiore di **TR**, dato che **TR** è uguale a **RA**, e il **triangolo RQP** è maggiore della metà della **figura QSATQ**. Partendo ora dal **quadrato** circoscritto e togliendo ogni volta i triangoli detti, si ottengono i vari **poligoni** circoscritti di aree  $P, P', P'', \dots$  (Fig. 3.7).

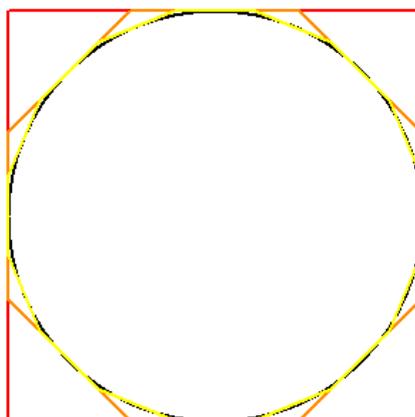


Fig. 3.7

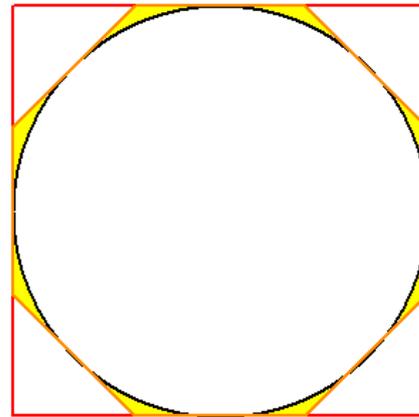


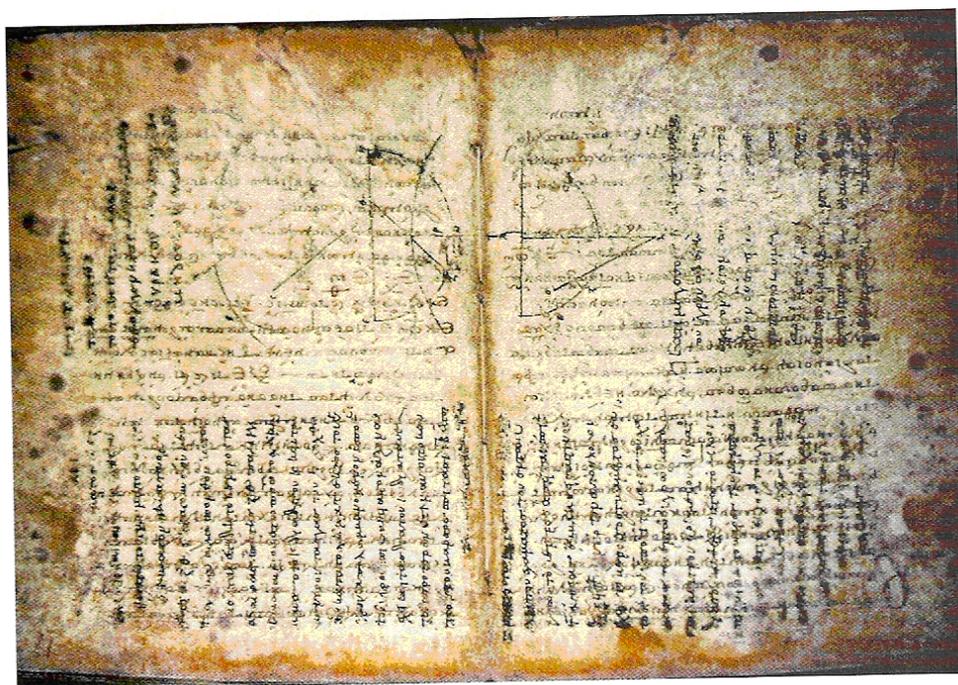
Fig. 3.8

La differenza tra questi e il cerchio finirà col diventare minore dell'ipotetica differenza tra l'area del triangolo e quella del cerchio

(parte gialla in Fig. 3.8):  $C < P < T$ , e quindi l'area del **poligono** circoscritto è minore di quella del triangolo. Ma, dato che OA, essendo il raggio del cerchio, è uguale all'altezza del triangolo e che il perimetro del **poligono** è maggiore della circonferenza del cerchio e quindi maggiore della base del triangolo, si ha che l'area del poligono inscritto è maggiore di quella del triangolo. Assurdo di nuovo. Pertanto il cerchio è equivalente al triangolo.

## § 3.5 IL METODO MECCANICO DI ARCHIMEDE

Nel Medio Evo spesso, gli antichi codici che non erano di argomento religioso venivano grattati via col raschietto e un nuovo testo *devoto* veniva a ricoprire la prosa precedente. Si creava così un “palinsesto”,



ossia un libro cancellato e soprascritto. Uno di questi palinsesti, scritto prima dell'anno Mille, è oggi l'unico manoscritto greco esistente al mondo, il più antico, che contenga l'opera di Archimede. Non è l'originale, ma una copia successiva, si ritiene però, che questa ne sia una riproduzione molto fedele, come pure le tavole geometriche che contiene.

Il 16 luglio 1907 la prima pagina del New York Times riportava la notizia di una scoperta sensazionale:



il professor **Johan Ludvig Heiberg** di Copenhagen aveva rinvenuto un nuovo manoscritto di Archimede a Costantinopoli. Un certo professor H. Schöne gli aveva segnalato la descrizione di un

codice nel catalogo della biblioteca di un monastero ortodosso di Costantinopoli, redatto sette anni prima, nel 1899, da un erudito greco. Questi aveva individuato, sotto al testo di un messale proveniente dal



monastero bizantino di San Saba, nel deserto della Giudea, non lontano da Gerusalemme, la traccia di un secondo, più antico testo greco.

Ne trascrisse qualche riga, anche se non aveva la più pallida idea di che cosa si trattasse. Ma Heiberg intuì, si precipitò a Costantinopoli, e, avendo poco tempo, fece fotografare il palinsesto. Tornato a Copenhagen e munito di una lente d'ingrandimento, si mise a decifrare: tra quei fogli aveva ritrovato il "**Metodo**" di Archimede.

Va anche detto che nel manoscritto in questione non si trova soltanto gran parte del **Metodo**, ma si trovano anche ampi brani delle *Spirali* e della *Sfera e cilindro*, e più brevi brani dell'*Equilibrio dei piani* e della *Misura del cerchio*.

Il libro venne battuto il 29 ottobre 1998 per due milioni di dollari. Il 17 gennaio del 1999 il nuovo proprietario, un collezionista americano,

accetta di affidarlo alle cure del Walters Art Museum di Baltimora (USA).



#### La conservazione del palinsesto di Archimede

Per ulteriori approfondimenti sulla storia del palinsesto ritrovato si può consultare *The Archimedes Palimpsest* pubblicato da Christie's in occasione dell'asta e il sito della Walters Art Gallery:

<http://www.thewalters.org/archimedes/frame.html>

o il sito <http://www.archimedespalimpsest.org/>.

Inoltre, di recente è stato pubblicato, anche in italiano, un libro che racconta in modo dettagliato la scoperta del palinsesto da parte del professor Heiberg: *Il codice perduto di Archimede. La storia di un libro ritrovato e dei suoi segreti matematici*, di Netz R. e Noel W., BUR saggi, 2008.

La massima importanza del manoscritto ritrovato risiede nel fatto che essa contiene quasi al completo l'opera sul **Metodo**. Viene chiamato così in base al titolo dell'opera, che è Αρχιμήδουζ περί τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος (Metodo, via, di Archimede sui teoremi meccanici, a Eratostene).

Il Metodo di Archimede ha un'importanza tutta particolare, perché rivela un aspetto del pensiero di Archimede che non è dato riscontrare altrove. Ad alcuni matematici del XVII secolo le sue dimostrazioni apparivano così completamente sprovviste di motivazioni da indurli a

sospettare che Archimede avesse tenuto nascosto il suo metodo affinché le sue opere potessero essere ammirate ancor di più.

I procedimenti seguiti da Archimede non mostrano quale sia la strada seguita per giungere ai risultati, ma generalmente questi risultati presuppongono una *via segreta* seguita dal siracusano.

Qui Archimede aveva reso pubblica, perché tutti la potessero leggere, una descrizione delle *indagini “meccaniche” preliminari* che lo avevano portato a fare la maggior parte delle sue principali scoperte matematiche:

*«...anche a me alcune cose si manifestarono prima per via meccanica, e poi le dimostrai geometricamente; perché la ricerca fatta con questo metodo non importa una vera dimostrazione.»*<sup>24</sup>

Egli riteneva, infatti, che il suo “metodo” in questi casi mancasse di rigore, perché era basato su assunzioni condotte mediante tecniche talvolta basate sull’intuizione, e queste non erano considerate sufficienti a garantire la verità del risultato. Era per questo che ad esse seguiva sempre una dimostrazione per esaurizione, in questo modo egli dimostrava rigorosamente l’esattezza del risultato al quale era giunto per altra via.

Il **Metodo** si presenta sotto la forma di una lunga lettera scritta da Archimede al suo amico Eratostene. In essa si espone appunto il “metodo” da lui utilizzato per scoprire le formule che in un secondo momento avrebbe dimostrato mediante il metodo di esaurizione.

L’autore iniziava dicendo che è *“più facile, dopo avere con tal metodo acquistato una certa cognizione delle questioni, trovarne la dimostrazione”*<sup>25</sup>. Annunciava, poi, che egli stesso possedeva un metodo o approccio “meccanico” che apriva la strada ad alcune delle sue

---

<sup>24</sup> Dalla lettera di Archimede a Eratostene, Rufini E., *Il “metodo” di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell’antichità*, Casa editrice di Alberto Stock, Roma, 1926, p. 107.

<sup>25</sup> Dalla lettera di Archimede a Eratostene, Rufini E., *Il “metodo” di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell’antichità*, Casa editrice di Alberto Stock, Roma, 1926, p. 107.

dimostrazioni, persuaso del fatto che “*non poca utilità esso arrecherà alla matematica*”<sup>26</sup>.

Il suo procedimento, descritto con imponente maestria nel manoscritto ritrovato, è il risultato della “*felice combinazione di ragionamenti meccanici e di ragionamenti infinitesimali*”<sup>27</sup>.

L’esposizione parte da semplici principi e giunge mano a mano, con deduzioni successive, alle proposizioni più complesse. Lo stile di quest’opera è notevolmente diverso da quello di tutte le altre opere archimedee. In genere l’autore tralascia i passaggi intermedi, che affida alla sagacia del lettore e procede per sommi capi. Ma qui segue passo passo l’andamento delle dimostrazioni fino a completare il ragionamento.

Un’altra sostanziale differenza con le altre opere sta nel contenuto delle dimostrazioni. Archimede giunge ai risultati in base a considerazioni meccaniche, e soprattutto in base a certe considerazioni di *carattere infinitesimale*, alle quali egli è il primo a negare valore dimostrativo.

Al di fuori di ogni preoccupazione di rigore, Archimede considera ogni figura piana come composta di elementi infinitesimali: linee rette tracciate parallelamente ad una certa direzione, e similmente le figure solide come costituite dalle loro sezioni piane parallele ad una certa giacitura. Ciò equivaleva, implicitamente, a dire che ogni figura era composta di un numero infinito di elementi. Archimede, ovviamente, non espone il concetto in questa maniera, ma dice solamente che ogni figura è “*composta o riempita da tutti i suoi elementi*”<sup>28</sup>.

---

<sup>26</sup> Dalla lettera di Archimede a Eratostene, Rufini E., *Il “metodo” di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell’antichità*, Casa editrice di Alberto Stock, Roma, 1926, p. 108.

<sup>27</sup> Rufini E., *Il “metodo” di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell’antichità*, Casa editrice di Alberto Stock, Roma, 1926, p. 84.

<sup>28</sup> Questa concezione delle figure fu poi riportata in auge e sviluppata con successo dal matematico italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647) con la sua teoria degli indivisibili.

Per quanto riguarda i ragionamenti meccanici, l'elemento che sta alla base del suo metodo è la *legge della leva* (di 1° genere), da lui scoperta, secondo la quale un corpo di massa  $\mathbf{M}$  sospeso ad un braccio di una leva a una distanza  $\mathbf{D}$  dal punto d'appoggio è in equilibrio con un corpo di massa  $m$  sospeso all'altro braccio ad una distanza  $d$  se  $\mathbf{M}\cdot\mathbf{D} = m\cdot d$ .

L'idea fondamentale di Archimede è quella di considerare gli infiniti oggetti che compongono la figura come “fili pesanti”, paralleli tra loro, e attribuendo ad essi un “peso reale” li pone sulla leva.

La combinazione dei due tipi di ragionamenti precedentemente descritti, dà luogo al metodo di Archimede. Questo può essere riassunto, come descritto da Rufini<sup>29</sup> nel modo seguente:

[...] Supponiamo che si debba calcolare la superficie o il volume di una figura  $X$ , piana o solida. Si sceglie anzitutto opportunamente un'altra figura  $B$ , di cui si conosce la superficie o il volume e la posizione del centro di gravità. Si dispongono le due figure in modo che i loro diametri o i loro assi giacciono sulla stessa retta, cosicché anche i loro centri di gravità siano situati sulla stessa retta. Si segano le due figure con piani paralleli e (in generale) perpendicolari all'asse; le sezioni ottenute sono i loro elementi infinitesimali, e le due sezioni create dallo stesso piano nell'una o nell'altra figura si considerano come elementi corrispondenti.

Si prolunga d'una lunghezza opportuna il diametro o l'asse, e il segmento ottenuto si considera come il giogo di una bilancia o l'asta di una leva di primo genere. Si tratta ora di stabilire sulla leva l'equilibrio fra gli elementi di  $X$  e quei di  $B$ , fissato preventivamente il punto d'appoggio  $P$ , o fulcro della leva. Archimede sa che due grandezze sospese ai bracci d'una leva si fanno equilibrio quando è uguale il prodotto delle loro superfici o volumi per la distanza del loro centro di

---

<sup>29</sup> Rufini E., *Il “metodo” di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell'antichità*, Casa editrice di Alberto Stock, Roma, 1926, pp. 83-87.

gravità dal fulcro; in altre parole «quando i loro momenti rispetto al punto d'appoggio sono uguali».

Per determinare il momento di  $X$  si può procedere in questo modo: uno qualsiasi dei piani tra loro paralleli e perpendicolari alla leva abbia da  $P$  la distanza  $a$  e determini nella figura  $X$  la sezione  $v$ , e nella figura  $B$  la sezione  $u$  (a una distanza  $b$ );  $v \cdot dx$  e  $u \cdot dx$  saranno gli elementi corrispondenti di  $X$  e di  $B$ .

Posto che  $v : u = b : a$ ,

si avrà che ogni elemento di  $X$  sospeso alla leva alla distanza  $a$  da  $P$  farà equilibrio al corrispondente elemento di  $B$  situato al suo posto.

Si immaginino allora tutti gli elementi di  $X$  trasportati e sospesi tutti per il loro centro di gravità nello stesso punto della leva, situato alla distanza  $a$  da  $P$ , dalla parte opposta rispetto a  $P$ , a quello a cui sono situati gli elementi di  $B$ , i quali rimangono invece al loro posto. Anche in questa posizione tutti gli elementi di  $X$  faranno equilibrio a tutti gli elementi di  $B$ . Questo vuol dire che la figura  $X$  sospesa per il suo centro di gravità nello stesso punto in cui furono sospesi i suoi elementi fa equilibrio alla figura  $B$  situata al suo posto; i loro momenti saranno perciò uguali. Il momento di  $X$  rispetto a  $P$  sarà dunque  $V \cdot a$ , se con  $V$  indichiamo la sua superficie (o il suo volume); e se  $b$  è la distanza nota da  $P$  del centro di gravità di  $B$ , sarà  $U \cdot b$  il suo momento. Quindi:

$$V \cdot a = U \cdot b$$

da cui

$$V = \frac{U \cdot b}{d}, \text{ oppure } d = \frac{U \cdot b}{V},$$

che danno rispettivamente la superficie (o il volume) di  $X$ , o il suo centro di gravità se si conosce  $V$ .

# Capitolo 4

## TEOREMI ANTICHI CON NUOVE SOLUZIONI

### § 4.1 DUE TEOREMI DAL “METODO” DI ARCHIMEDE

L'argomento principale del Metodo, annunciato da Archimede stesso all'inizio della lettera ad Eratostene, consiste nell'esposizione del modo in cui avvenne la scoperta di due teoremi:

*«Archimede ad Eratostene salute.*

*Ti scrissi precedentemente circa alcuni dei teoremi da me trovati, e ti inviai i loro enunciati, invitandoti a trovarne le dimostrazioni, che io allora non potei indicare. Gli enunciati di quei teoremi erano i seguenti:*

*Del primo: se in un prisma retto avente per base un parallelogrammo si iscrive un cilindro avente le basi sopra due*

*parallelogrammi opposti, e i lati sopra gli altri piani del prisma, e se per il centro del cerchio base del cilindro e per un lato del quadrato della faccia opposta si conduce un piano, questo piano condotto staccherà dal cilindro un segmento limitato da due piani e dalla superficie del cilindro, cioè dal piano secante e dal piano, in cui è situata la base del cilindro, e dalla superficie [cilindrica] compresa fra questi due piani; il segmento cilindrico così determinato è la sesta parte di tutto il prisma.*

*L'enunciato del secondo era: Se in un cubo si inscrive un cilindro avente le basi sopra due parallelogrammi opposti e la superficie (laterale) tangente agli altri quattro piani (facce), e se nello stesso cubo s'inscrive poi un altro cilindro avente le basi su altri due parallelogrammi e la superficie tangente agli altri quattro piani, il solido compreso dalle superfici dei cilindri e comune ad ambedue i cilindri, è uguale ai due terzi di tutto il cubo.»<sup>30</sup>*

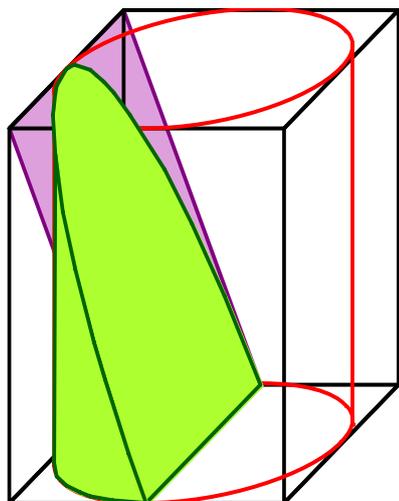
Il primo riguarda il volume della cosiddetta unghia cilindrica, il secondo il volume del solido comune a due cilindri iscritti in un cubo.

---

<sup>30</sup> Dalla lettera di Archimede a Eratostene, Rufini E., *Il "metodo" di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell'antichità*, Casa editrice di Alberto Stock, Roma, 1926, pp. 105-106.

### 4.1.1

## L'UNGHIA CILINDRICA



DEFINIZIONE. L'unghia cilindrica è quella parte di cilindro che viene staccata sezionando il cilindro stesso, contenuto in un parallelepipedo a base quadrata, con un piano individuato dal centro di una delle sue basi e dal lato del quadrato tangente il cerchio della base opposta.

### I RISULTATI DI ARCHIMEDE

La soluzione del problema dell'unghia cilindrica viene illustrata nelle proposizioni XI, XII, XIII e XIV del Metodo. L'investigazione attraverso il *metodo meccanico* è contenuta nelle prime due proposizioni, la XI e la XII.

La proposizione XIII presenta un'altra dimostrazione del medesimo risultato, svolta con un differente procedimento. Questa proposizione, nonostante non contenga alcun "processo meccanico" è ancora una volta definita "inconcludente" da Archimede, e non è considerata, come anche la prima, una vera e propria dimostrazione. Infine, la proposizione XIV, pervenuta solo in frammenti, e ricostruita da Heiberg sotto la guida di Zeuthen, presenta la "*dimostrazione geometrica della prop. XI*", ovvero la prova con il metodo d'esaurizione in cui si vuole convalidare il risultato già ottenuto per il volume dell'unghia cilindrica.

Presentiamo i passi delle prime due dimostrazioni archimedee perché in esse sono presenti procedimenti sicuramente nuovi per l'epoca archimedeo, e molto significativi e perché in generale "*nella sua opera si assomma tutta l'Analisi infinitesimale degli antichi; essa, inoltre, per*

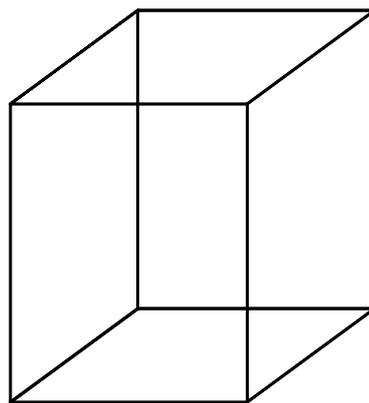
*la profondità dei concetti che la ispirano, per la sicurezza dei metodi e la vastità delle applicazioni, merita di essere considerata come la più importante anticipazione della nostra Analisi*”<sup>31</sup>. Tralascieremo, invece, la dimostrazione per esaurimento, in quanto lunga e poco utile ai fini che ci siamo posti.

Nelle dimostrazioni abbiamo provato ad utilizzare diversi accorgimenti con lo scopo di agevolarne la comprensione. Con una “procedura dinamica” abbiamo diviso le fasi della costruzione del disegno, in modo da avere una “progressione di figure”. Utilizzando in maniera opportuna il colore, sia nelle figure che nel testo, abbiamo provato ad alleggerire le lunghe dimostrazioni archimedee, identificando, quando possibile, le figure con il proprio colore invece che con le lettere. In più, grazie alle trasparenze e ai chiaroscuri, abbiamo provato a mettere in risalto i particolari dei disegni così da capire meglio la loro posizione.

Nella proposizione XI è enunciato il teorema che si vuole dimostrare.

**Proposizione XI – DETERMINAZIONE MECCANICA.**

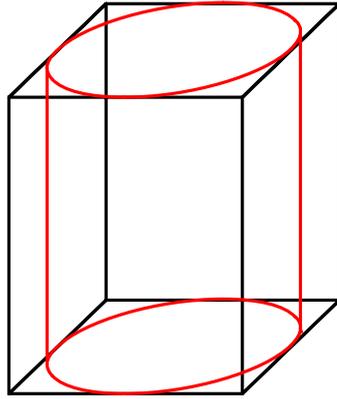
*Se in un prisma retto a basi quadrate*



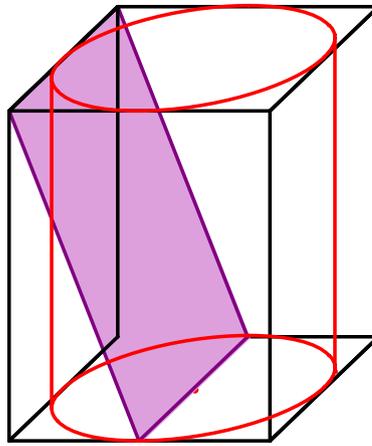
*si iscrive un cilindro avente le sue basi su due quadrati opposti e la superficie (laterale) tangente agli altri quattro parallelogrammi del prisma,*

---

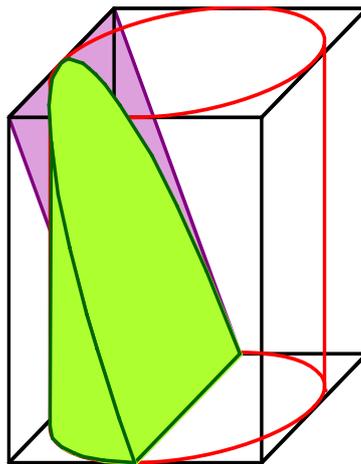
<sup>31</sup> Rufini E., *Il “metodo” di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell’antichità*, Casa editrice di Alberto Stock, Roma, 1926, p. 280.



*e se per il centro del circolo base del cilindro e per un lato del quadrato opposto si conduce un piano,*



*la figura determinata da questo piano*



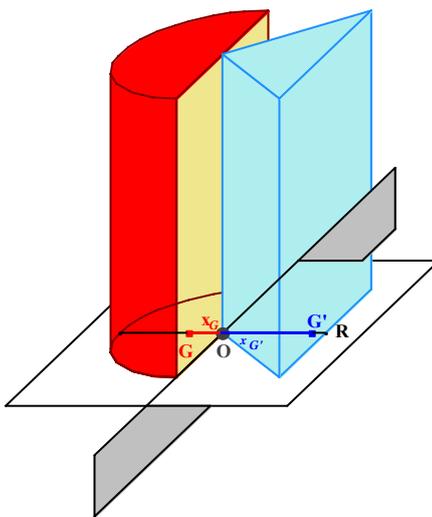
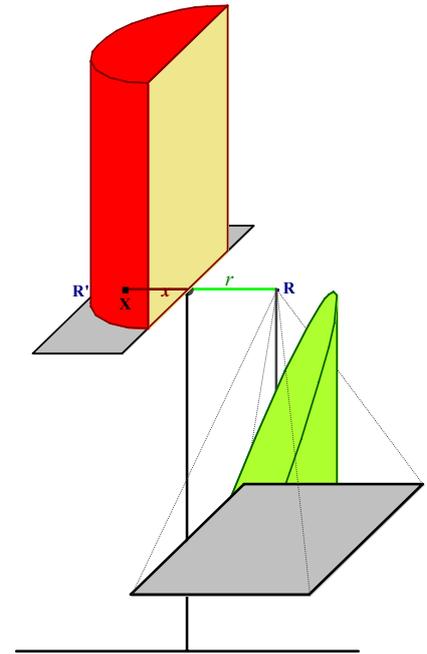
**Fig. 4.1**

*è la sesta parte di tutto il prisma.*

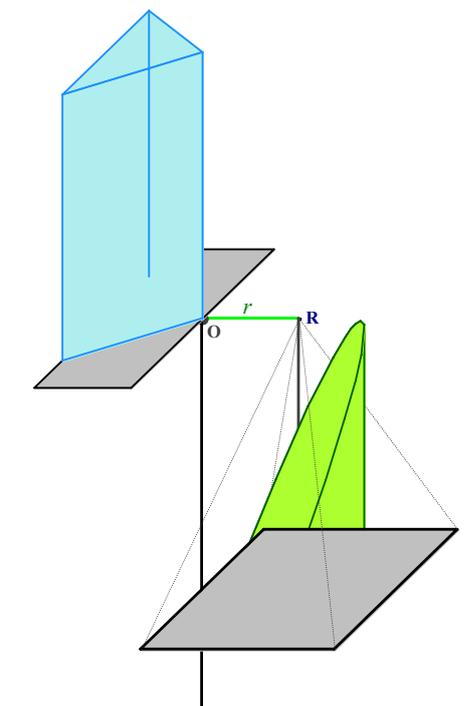
Dunque dobbiamo dimostrare che l'**unghia cilindrica verde** è la sesta parte del parallelepipedo che la contiene.

La dimostrazione di Archimede è divisa in 3 parti:

1. Nella Proposizione XI si dimostra inizialmente che i due solidi in figura, posti nella posizione indicata sui piatti di questa particolare bilancia, in cui i bracci hanno misura uguale al raggio  $r$  di base del cilindro, stanno in equilibrio.



2. Nella Proposizione XII si dimostra che i due solidi in figura posti nella posizione indicata hanno lo stesso peso in quanto stanno in equilibrio.



3. Infine, si sostituisce il **semcilindro** della prima bilancia con il **prisma triangolare** posto nella posizione indicata e dall'equilibrio si determina il peso (volume) dell'**unghia**.

## I<sup>a</sup> PARTE

Dato un cilindro inscritto in un parallelepipedo retto a base quadrata come descritto nella proposizione XI, e l'unghia cilindrica ottenuta sezionando l'intera figura con il piano che passa per il centro del cerchio di base e per il lato del quadrato della faccia opposta. In Fig. 4.1 (a), questo piano è identificato dal **rettangolo viola**.

Si considerino poi due sezioni dell'intera figura:

- la prima sezione si ottiene conducendo un piano perpendicolare al diametro **MN** del semicerchio di base dell'**unghia**.

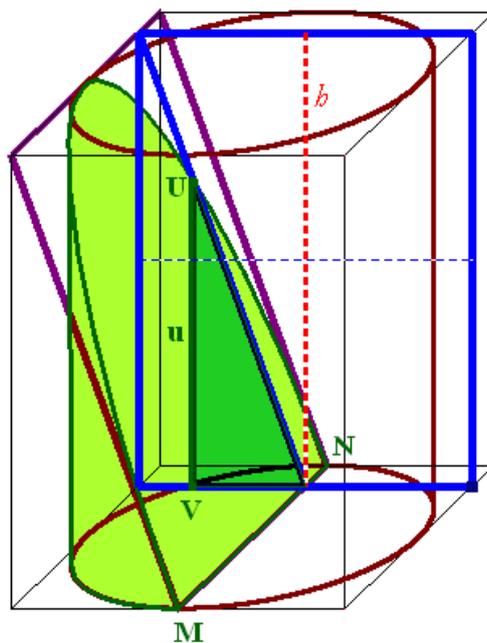


Fig. 4.1 (a)

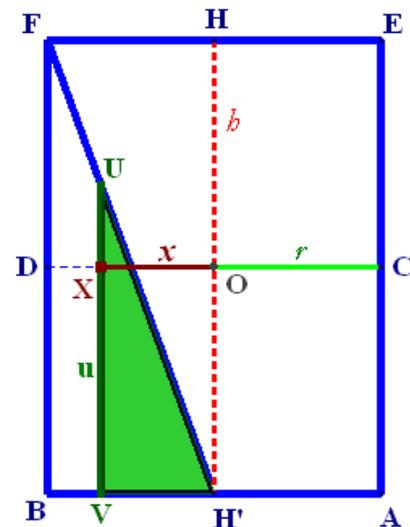


Fig. 4.1 (b)

In questo modo si mette in evidenza un **rettangolo** di altezza  $HH' = h$  che è l'altezza del parallelepipedo, che si interseca con il **rettangolo viola** nel **segmento FH'**.

- la seconda sezione si ottiene conducendo un piano perpendicolare al segmento **HH'**, passante per il centro del parallelepipedo.

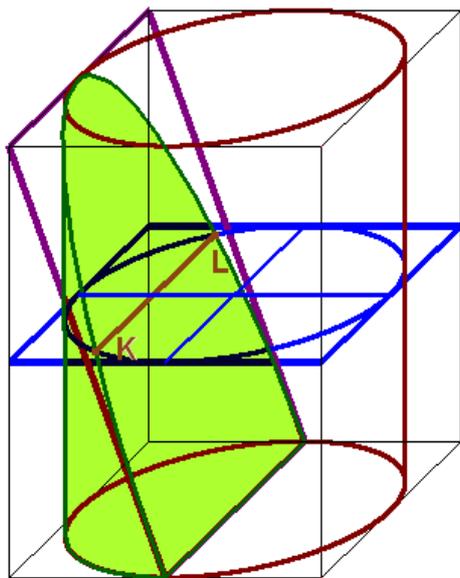


Fig. 4.2 (a)

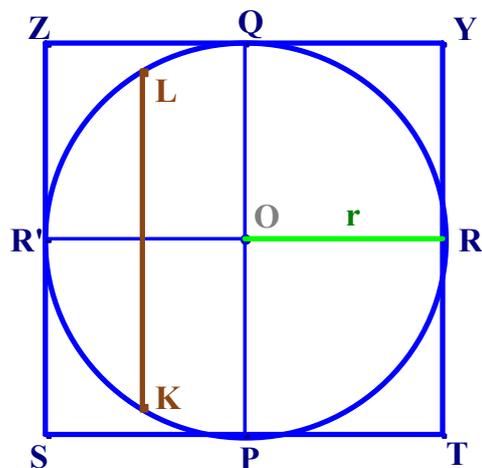


Fig. 4.2 (b)

Questo piano intersecherà il parallelepipedo secondo il **quadrato STYZ**, il cilindro secondo il **cerchio PRQR'** e il **rettangolo viola** secondo il segmento **LK**.

Si tracci ora il segmento **IJ** (giallo nelle figure 4.3)

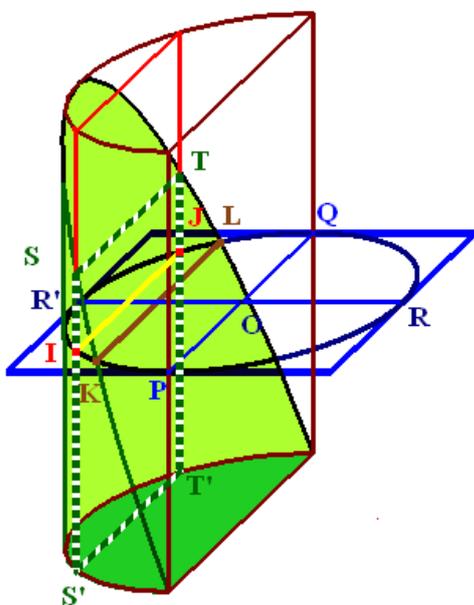


Fig. 4.3 (a)

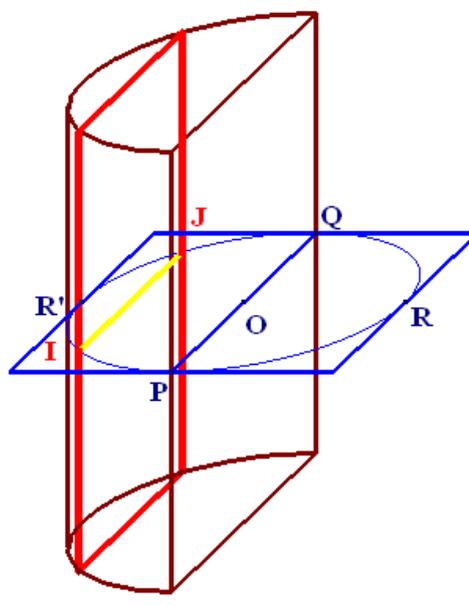


Fig. 4.3 (b)

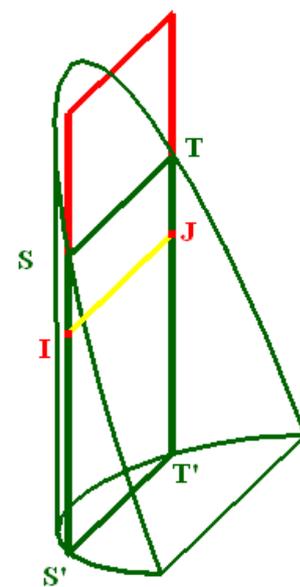


Fig. 4.3 (c)

parallelo a **LK** e, considerando solo il semicilindro contenente l'**unghia**, si conduca da **IJ** un piano perpendicolare a **RR'**. Questo piano seziona il

semicilindro nel **rettangolo rosso** di altezza  $h$  e base di lunghezza pari a **IJ** (Fig. 4.3 (b)) e seziona l'**unghia** nel **rettangolo verde STS'T'**, che è parte del precedente ed ha la sua stessa base, mentre la sua altezza è **SS' = u** (Fig. 4.3 (c)).

Dai disegni che seguono (già presentati) si ha che:

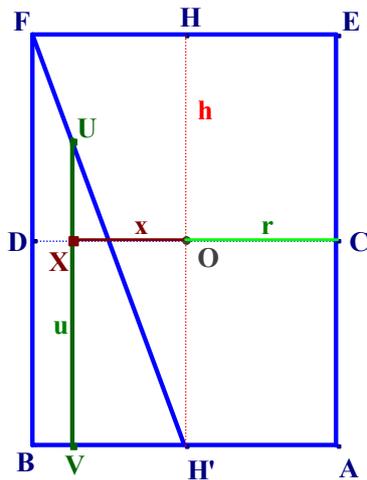


Fig. 4.1 (b)

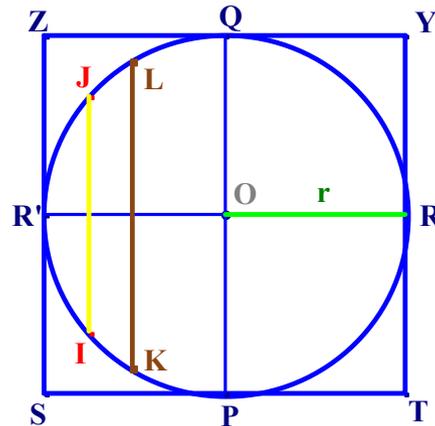


Fig. 4.2 (b)

$$\frac{(\mathbf{DO} = \mathbf{BH}')}{(\mathbf{XO} = \mathbf{VH}')} = \frac{\mathbf{BF}}{\mathbf{UV}} = \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{u}}$$

$$\frac{\mathbf{h}}{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{Rettangolo\ rosso\ (FB \times IJ)}}{\mathbf{Rettangolo\ verde\ (UV \times IJ)}} \quad \text{segue:}$$

$$\frac{\mathbf{DO}}{\mathbf{XO}} = \frac{\mathbf{Rettangolo\ rosso\ (FB \times IJ)}}{\mathbf{Rettangolo\ verde\ (UV \times IJ)}}$$

Essendo poi:  $\mathbf{DO} = \mathbf{OC} = r$  e  $\mathbf{XO} = x$

$$\Rightarrow \frac{\mathbf{DO}}{\mathbf{XO}} = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{Rettangolo\ rosso\ (FB \times IJ)}}{\mathbf{Rettangolo\ verde\ (UV \times IJ)}} \quad (*)$$

A questo punto Archimede applica il “metodo meccanico”, descritto in precedenza (Par. 3.5), e traduce l’uguaglianza

$$\mathbf{Rettangolo\ rosso} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{Rettangolo\ verde} \cdot \mathbf{r}$$

nell’“equilibrio” di una bilancia tra il rettangolo rosso con braccio  $x$  e quello verde, con braccio  $r$ .

Il segmento **CD** diventa quindi il giogo di una bilancia di fulcro **O** e si procede nel modo seguente:

estriamo il **rettangolo verde**, trasportandolo a destra, da quello rosso, che rimane a sinistra con braccio **x**; ponendo il primo in modo che il suo braccio sia **r**.

Abbiamo così tradotto in una situazione di equilibrio con bracci differenti quanto segue da (\*):

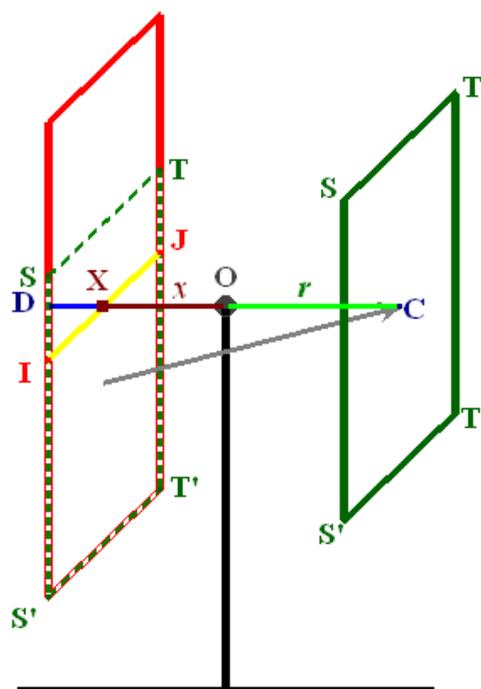


Fig. 4.4

$$\text{Rettangolo rosso} \cdot x = \text{Rettangolo verde} \cdot r.$$

Si nota adesso che preso un qualsiasi altro segmento parallelo a **LK**, in luogo di **IJ**, vale il medesimo ragionamento con rettangoli differenti: l'unione dei **rettangoli verdi**, tutti con braccio **r**, “ricostruiscono” l'intera **ungchia** a destra di **O** e l'unione dei **rettangoli rossi**, con bracci variabili di lunghezza **x**, “ricostruiscono” l'intero **semcilindro** a sinistra di **O**. Questi due oggetti verranno posti sulla seguente bilancia (Fig. 4.5) per cercare di rendere più chiaro il risultato:

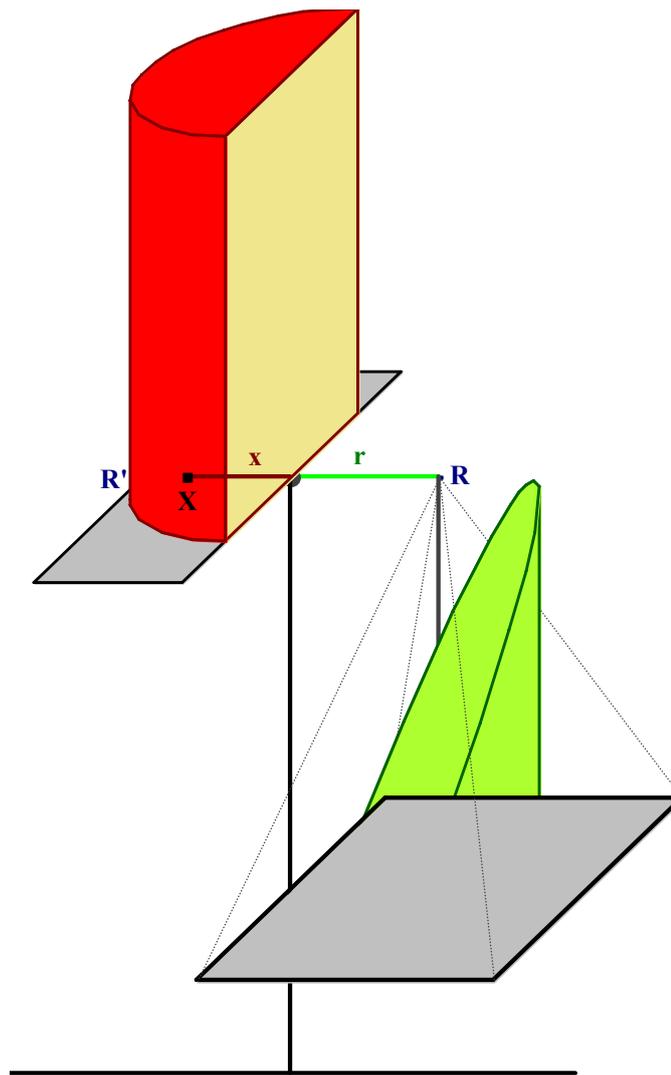


Fig. 4.5

In conclusione, al variare del punto **X** a distanza **x** da **O**, si verifica la condizione di equilibrio per ogni coppia di parallelogrammi (rosso a sinistra a distanza **x** e verde a destra a distanza **r**), e quindi per l'intero **semicilindro** a sinistra e l'intera **unghia cilindrica** a destra posti nella posizione indicata in Fig. 4.5.

In termini moderni sarebbe come effettuare il calcolo del seguente integrale:

$$\int_0^r \mathcal{P}(x) \cdot x \, dx = \text{Unghia}$$

dove per  $\mathcal{P}(x)$  si intendono i diversi **rettangoli rossi** in funzione della loro distanza **x** da **O** che varia in  $[0, r]$ .

## II<sup>a</sup> PARTE

Si passa ora, alla proposizione XII.<sup>32</sup>

Preso nuovamente il **quadrato STYZ** in Fig. 4.2 (b),

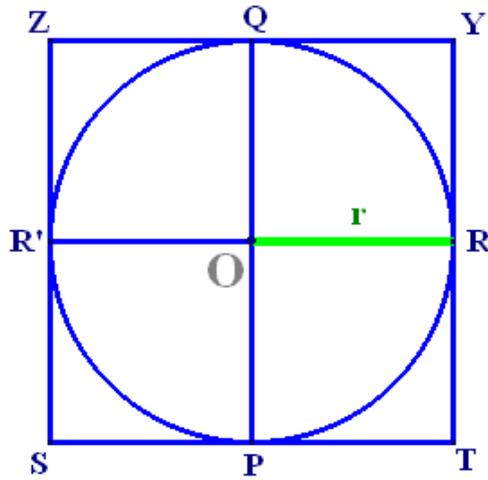


Fig. 4.2 (b)

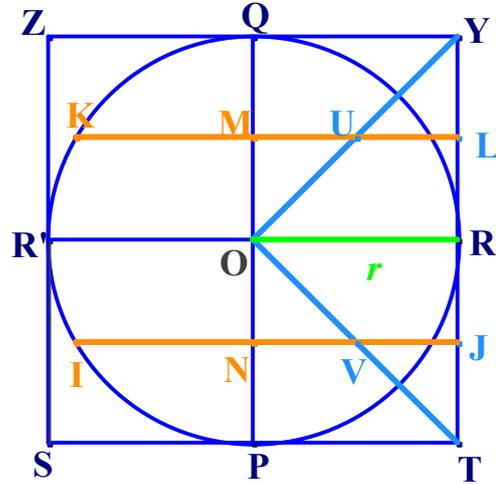


Fig. 4.2 (c)

si considerino i segmenti celesti **OY** e **OT** e i **segmenti arancioni KL** e **IJ**, paralleli ed equidistanti dal segmento **RR'**. Quest'ultimi incontrano

<sup>32</sup> Probabilmente questa parte della dimostrazione è necessaria ad Archimede per raggiungere il suo scopo, in quanto egli non conosce il baricentro del semicilindro. Per questo motivo, lo sostituisce con il prisma triangolare. Infatti, questa parte sarebbe risultata superflua con la conoscenza del baricentro del semicilindro, che si può trovare attraverso quello del semicerchio con il **teorema di Guldino** (ca. 1640) [Il volume del solido generato dalla rotazione di una figura piana  $F$  intorno ad una retta ad essa complanare e che non l'attraversa, è dato dal prodotto dell'area di tale figura  $F$  per la lunghezza della circonferenza descritta da suo baricentro] applicato al semicerchio:

$$A_{\text{Semicerchio}} \cdot 2\pi X_G = V_{\text{Sfera}} \Rightarrow \frac{\pi R^2}{2} \cdot 2\pi G = \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow G = \frac{4R}{3\pi}.$$

dove  $G$  è il baricentro del semicilindro e  $X_G$  è la sua distanza dal fulcro.

Conoscendo tale baricentro si potrebbe concludere già adesso (con lo stesso ragionamento di Archimede nella III<sup>a</sup> parte) dicendo che:

$$\begin{aligned} V_{\text{Unghia}} \cdot R &= V_{\text{Semicilindro}} \cdot G = \frac{\pi R^2}{2} \cdot h \cdot \frac{4R}{3\pi} \Rightarrow \\ &\Rightarrow V_{\text{Unghia}} = \frac{2}{3} h R^2 \end{aligned}$$

$$\text{Infine, essendo } V_{\text{Parallelepipedo}} = 4R^2 \cdot h \Rightarrow \frac{V_U}{V_P} = \frac{\frac{2}{3} h R^2}{4 h R^2} = \frac{1}{6}$$

Forse può essere utile ricordare la dimostrazione del **teorema di Guldino** per raggiungere una considerazione che ci interessa. Dividendo una figura  $F$  in  $n$  quadratini uguali di area  $q(n)$  e di centro  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), calcoliamo il volume del solido di rotazione:

$$\sum_{i=1}^n 2\pi x_i \cdot q(n), \Rightarrow V_{\text{Solido di rot}} = nq(n) \cdot 2\pi \frac{\sum x_i}{n} \rightarrow A_F \cdot 2\pi X_G.$$

Quindi se Archimede oltre alle "fette di "spessore  $dx$ " avesse considerato delle areole di area  $(dx)^2$  (sarebbero i quadratini unitari  $q(n)$ ) forse avrebbe anche anticipato il teorema di Guldino (ci sembra molto semplice) e avrebbe potuto semplificare la sua, pur bellissima, dimostrazione.

la semicirconferenza  $PQR'$  in  $K$  e  $I$ , il segmento  $OY$  in  $U$  e il segmento  $OT$  in  $V$ .

I due piani per  $OY$  e  $OT$  perpendicolari al piano del **quadrato**  $STYZ$ , individuano nel parallelepipedo rettangolo un **prisma retto a base triangolare** a destra di  $O$ . Si consideri anche il **semicilindro** individuato dal semicerchio  $PQR'$ , a sinistra di  $O$ . Il **prisma** e il **semicilindro** hanno entrambi la stessa altezza  $h$  pari a quella del parallelepipedo di cui il **quadrato**  $STYZ$  è una sezione (Fig. 4.6 (a)).

Si conducano altri due piani perpendicolari al piano del **quadrato**  $STYZ$  per  $KL$  e  $IJ$ , così da ottenere due sezioni rettangolari del **semicilindro** e due del **prisma triangolare** (Fig. 3.6 (b)).

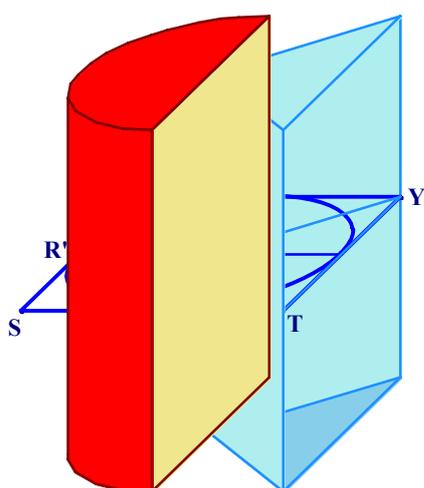


Fig. 4.6 (a)

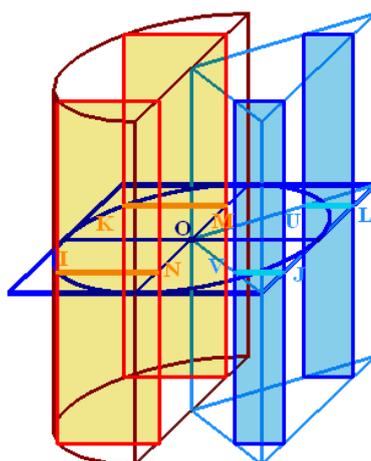


Fig. 4.6 (b)

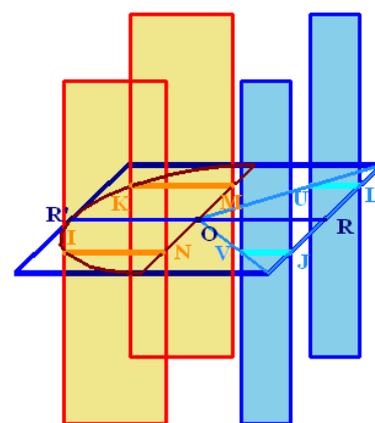


Fig. 4.6 (c)

I rettangoli contenuti nel **semicilindro** hanno altezza  $h$  e lato uguale a  $KM = IN$ , quelli contenuti nel **prisma triangolare** hanno la stessa altezza  $h$  e lato uguale a  $UL = VJ$  (Fig. 4.6 (c)).

Si noti adesso che per simmetria il baricentro  $X$  dei **rettangoli rossi** e il baricentro  $X'$  dei **rettangoli celesti** si trovano sul segmento  $RR'$  (Fig. 4.2 (d)).

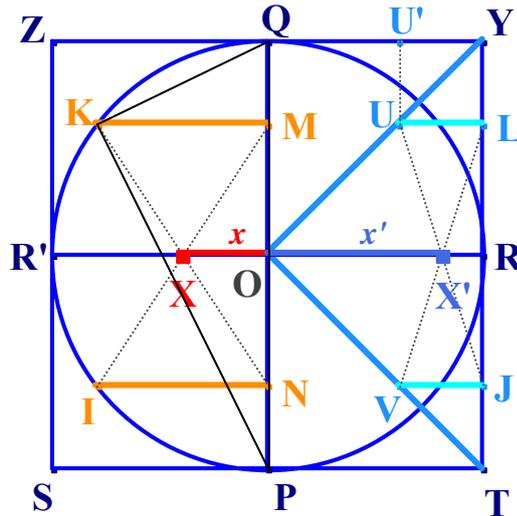


Fig. 4.2 (d)

In questo modo si ha che,

$$\frac{\text{Rettangoli rossi}}{\text{Rettangoli celesti}} = \frac{(\text{KM} = \text{IN})}{(\text{UL} = \text{VJ})} =$$

$$= \frac{\text{KM}}{\text{QM}} = \quad (\text{essendo } \text{UL} = \text{UU}' = \text{QM})$$

moltiplicando entrambi i membri per **KM**

$$= \frac{\text{KM}^2}{\text{QM} \cdot \text{KM}} = \quad \text{per il II}^\circ \text{ teorema di Euclide applicato al triangolo POK } (\text{KM}^2 = \text{QM} \cdot \text{MP})$$

$$= \frac{\text{QM} \cdot \text{MP}}{\text{QM} \cdot \text{KM}} = \quad (\text{semplificando per QM})$$

$$= \frac{\text{MP}}{\text{KM}} = \frac{\text{QM} + 2 \text{ OM}}{\text{KM}} = \quad (\text{essendo } \text{MP} = \text{QM} + 2 \text{ OM})$$

$$= \frac{\text{UL} + 2 \text{ UM}}{\text{KM}} = \quad (\text{essendo } \text{UL} = \text{QM} \text{ e } \text{UM} = \text{OM})$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \text{ UL} + \text{UM}}{\frac{1}{2} \text{ KM}} = \frac{x'}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\text{Rettangoli rossi}}{\text{Rettangoli celesti}} = \frac{\text{OX}'}{\text{OX}} = \frac{x'}{x}$$

da cui si ottiene la condizione di equilibrio della leva:

$$\text{Rettangoli rossi} \cdot x = \text{Rettangoli celesti} \cdot x' .$$

Poiché i rettangoli non vengono spostati, anche la somma dei **rettangoli rossi** contenuti nel **semicilindro** si fa equilibrio rispetto al punto **O** con la somma dei **rettangoli celesti** contenuti nel **prisma triangolare** (Fig. 4.7 (b)) (si noti che la dimensione dei rettangoli rossi è maggiore di quella dei rettangoli celesti, ma  $x$  è minore di  $x'$ ).

Utilizziamo la seguente bilancia per cercare di rendere più chiaro quanto appena espresso:

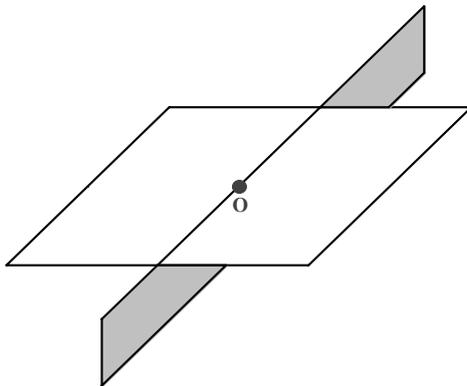


Fig. 4.7 (a)

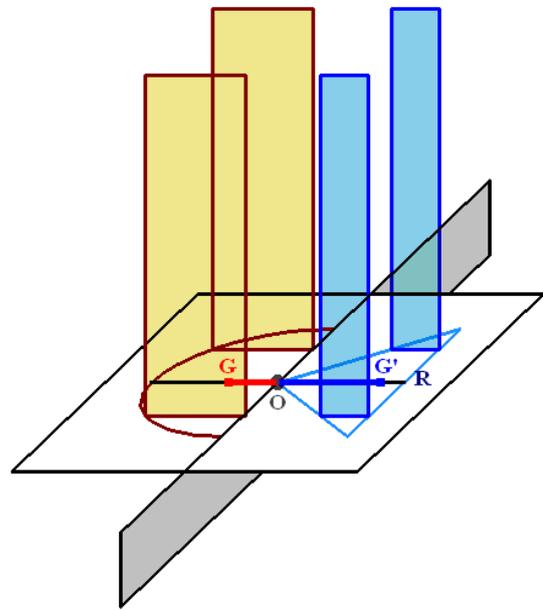


Fig. 4.7 (b)

Facendo variare i **segmenti arancioni** **KL** e **IJ** in Fig. 4.2 (c), parallelamente ad **RR'** si determinano varie sezioni rettangolari del **semicilindro** e del **prisma triangolare**, situati come in Fig. 4.7 (b).

In conclusione, ciò vuol dire che indicati con **G** e **G'** i baricentri del semicerchio e del triangolo,

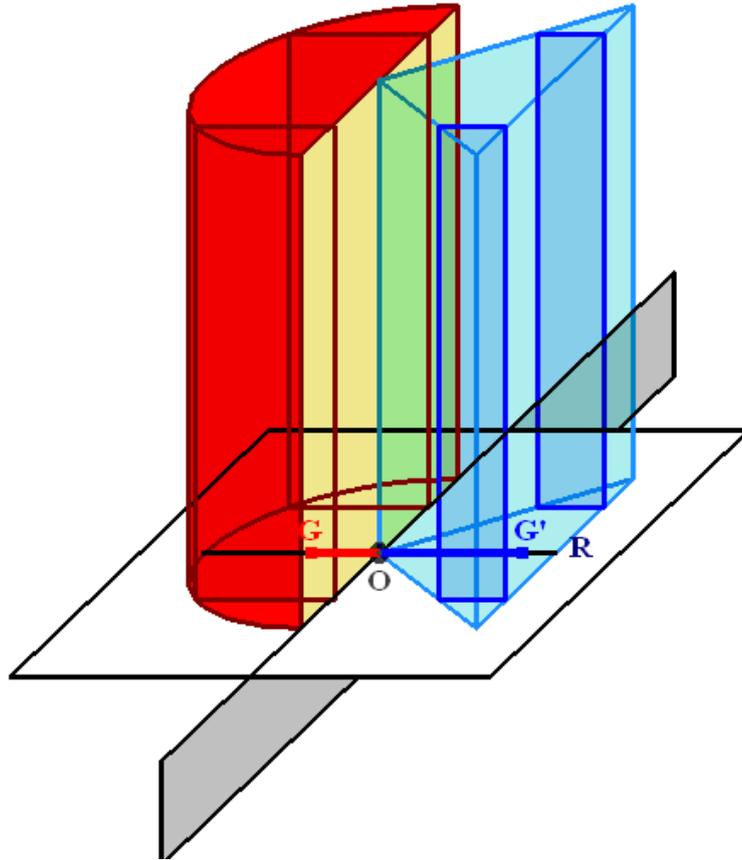


Fig. 4.7 (c)

l'intero **semicilindro rosso** moltiplicato per **OG** e il **prisma celeste**, moltiplicato per **OG'**, situati come in Fig. 4.7 (c), si fanno equilibrio rispetto al punto **O**.

In termini moderni sarebbe come considerare la seguente uguaglianza tra integrali:

$$\int_0^r 2\mathcal{R}(x) \cdot x \, dx = \int_0^r 2\mathcal{R}(x') \cdot x' \, dt$$

Dove,  **$2\mathcal{R}(x)$**  e  **$2\mathcal{R}(x')$**  rappresentano la somma delle sezioni rettangolari rispettivamente del **semicilindro** e del **prisma triangolare** al variare di  **$x$**  e  **$x'$** .

### III<sup>a</sup> PARTE

Visti i risultati ottenuti, si può sostituire il **prisma triangolare** al **semicilindro** nella prima bilancia (Fig. 4.5), mantenendo le loro posizioni rispetto ad **O**,

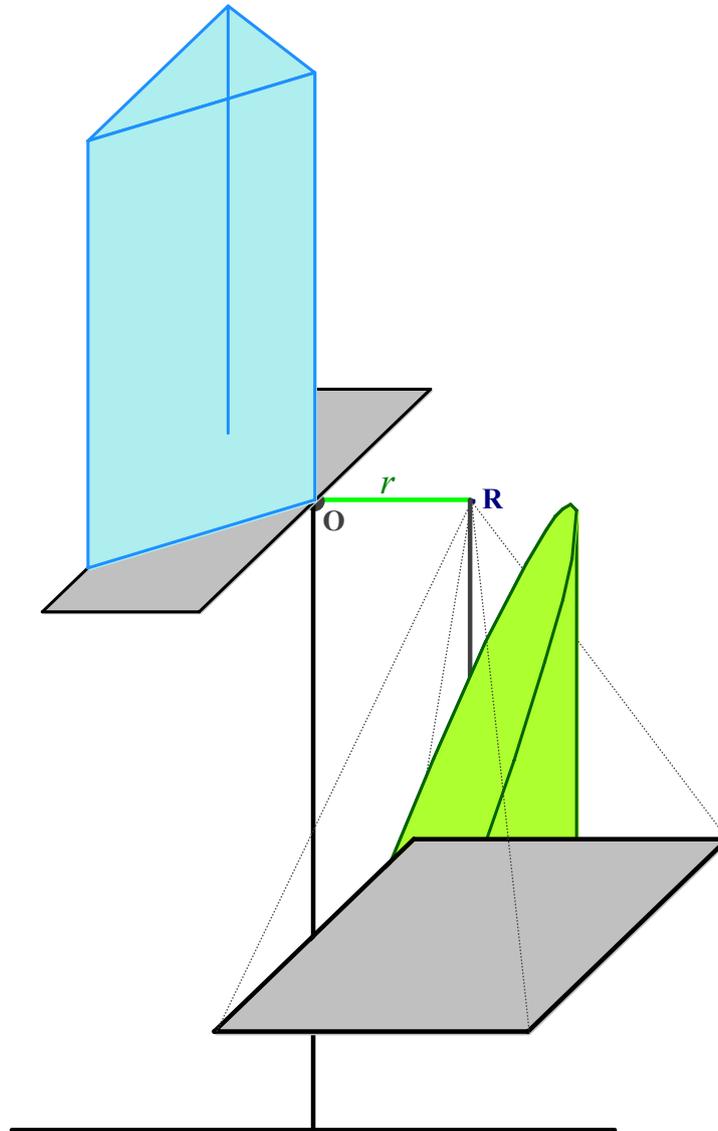
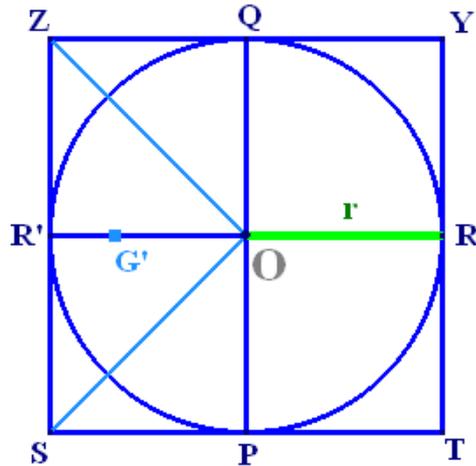


Fig. 4.8

con la seguente condizione di equilibrio della leva:

$$\textit{Prisma triangolare celeste} \cdot \mathbf{OG}' = \textit{Unghia verde} \cdot r. (**)$$

Considerando, infine, che il punto **G'** sul segmento **RR'** è tale che la sua distanza da **O** sia il doppio della sua distanza da **R'**,



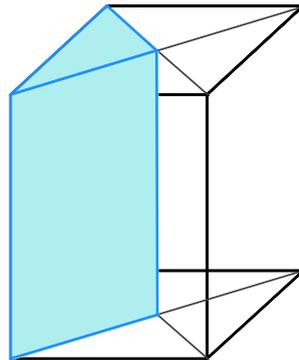
cioè  $OG' = 2 G'R'$ , segue che  $OG' = \frac{2}{3} OR' = \frac{2}{3} OR = \frac{2}{3} r$ .

Quindi dalla relazione (\*\*\*) segue che:

$$\text{Vol. Prisma triang.} \cdot \frac{2}{3} r = \text{Vol. Unghia} \cdot r \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Vol. Unghia} = \frac{2}{3} \text{Vol. Prisma triangolare},$$

e considerando che il **prisma triangolare azzurro** è la quarta parte del parallelepipedo,



si conclude che:

$$\text{Unghia} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \text{Parallelepipedo} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Unghia} = \frac{1}{6} \text{Parallelepipedo}.$$

**Proposizione XIII - ALTRA DETERMINAZIONE DI ARCHIMEDE DEL VOLUME DELL'UNGHIA CILINDRICA.**

Questa proposizione presenta una dimostrazione differente da quella appena analizzata. Qui Archimede ricorre a una forma di scomposizione in sezioni dell'**unghia** perpendicolari al diametro **MN** del semicerchio di base dell'**unghia**.

Si prenda nuovamente la Fig. 4.1 e la si guardi da un'altra angolazione (Fig 4.9 (a)).

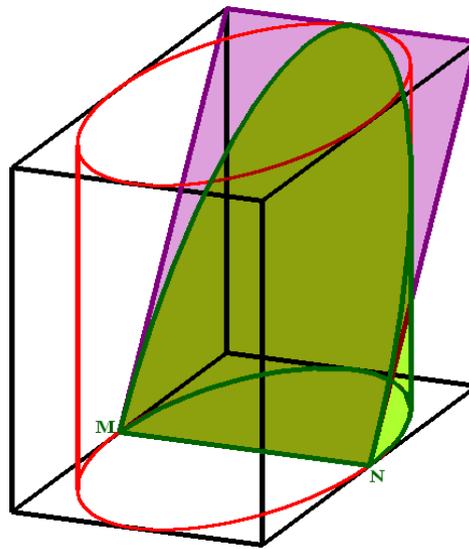


Fig. 4.9 (a)

Si consideri il **prisma triangolare blu** ottenuto sezionando il parallelepipedo lungo il **piano obliquo viola** che determina l'**unghia** attraverso la sua intersezione con il **cilindro**.

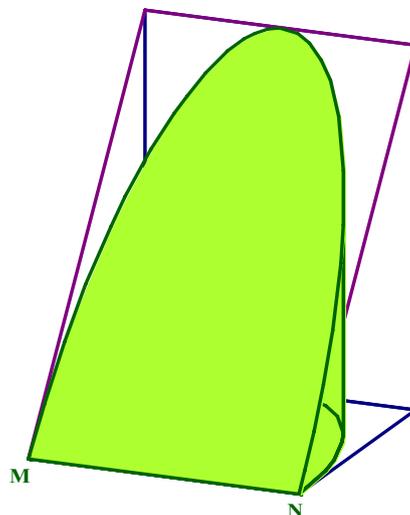


Fig. 4.9 (b)

Infine, si tracci un piano *scelto a caso* perpendicolare a **MN**. Questo piano incontra il **semicerchio** di base dell'**unghia** nel segmento **UC** e il **rettangolo R**, base del **prisma triangolare blu** nel segmento **US**,

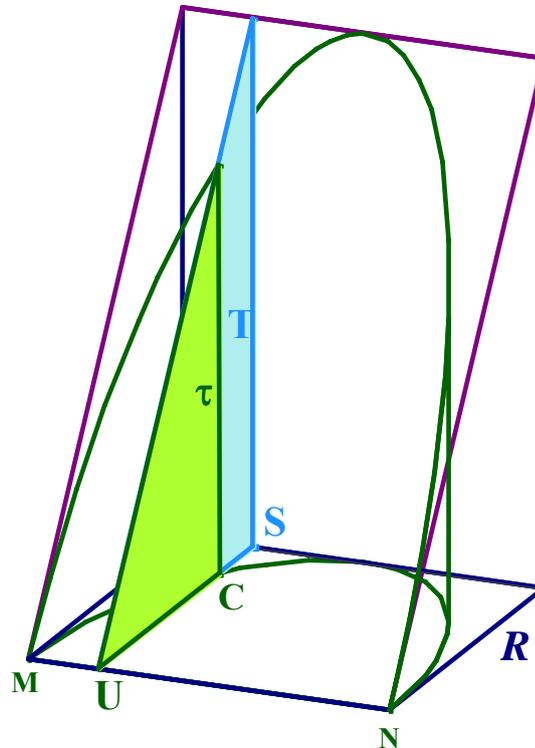


Fig.4.9 (c)

inoltre seziona il **prisma** nel **triangolo azzurro T** e l'**unghia** nel **triangolo verde  $\tau$**  (parte del primo).

A questo punto, la dimostrazione di Archimede diventa molto complessa. Sono presenti una serie di proporzioni in cui vengono utilizzate proprietà della parabola presenti nelle opere di Apollonio (Coniche I, 11 e 20) e in quelle di Euclide, e relazioni studiate dallo stesso Archimede in *Quadratura della parabola*. Forse proprio per la complessità dell'argomento e i riferimenti a proprietà dimostrate altrove anche da altri matematici, tali argomenti, che si possono sicuramente giudicare interessanti, non sono molto noti. Tanto che nella rivista "Archimede", tale quesito viene proposto come esercizio ai lettori<sup>33</sup>. E

<sup>33</sup> Una lattina ha la forma di un cilindro con la base superiore completamente aperta. Inizialmente la lattina è piena d'acqua, poi viene gradualmente inclinata, versando il liquido fino a quando la

nella soluzione, pubblicata successivamente, non si accenna al fatto che questo quesito era stato proposto e risolto dallo stesso Archimede.

Per rendere fruibile l'argomento lo abbiamo ripresentato con il linguaggio moderno introducendo lo strumento delle funzioni. In tal modo la dimostrazione si semplifica notevolmente.

Si prenda il rettangolo  $R$ , base del **prisma rettangolare blu**, in un sistema di assi cartesiani, con il punto  $N$  a distanza 1 da  $O$ .

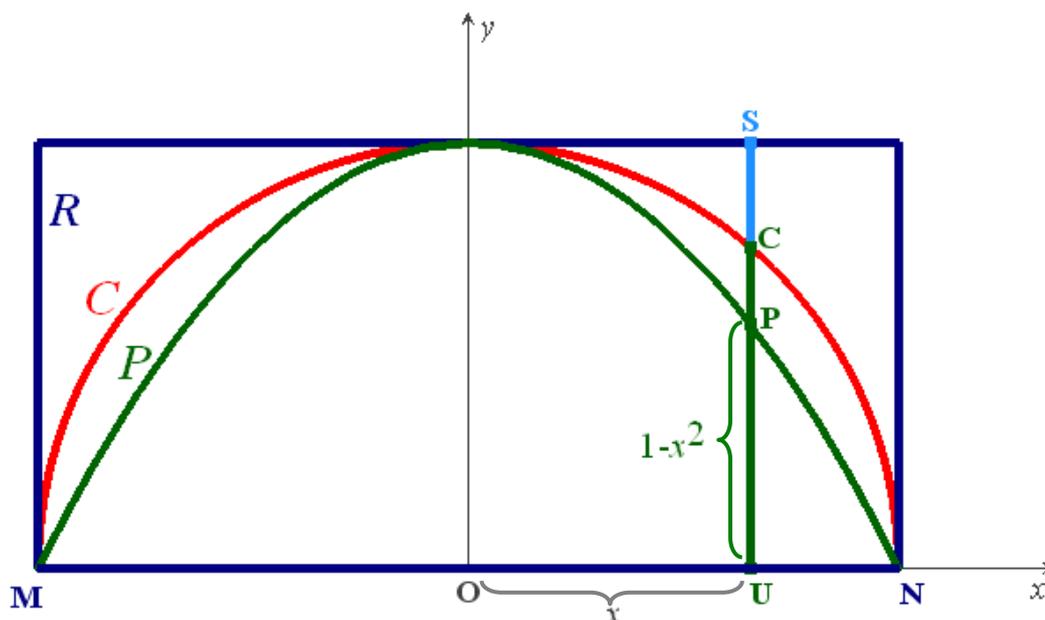


Fig. 4.10

Al suo interno s'inscrivano, un **semicerchio rosso C**, di equazione  $y = \sqrt{1-x^2}$ , base del **cilindro** e quindi dell'unghia e una **parabola P**, di equazione  $y = 1-x^2$ . In questo modo il segmento **US** che rappresenta il piano scelto a caso, attraversando il **rettangolo R** incontra il **semicerchio C** in **C** e la **parabola P** in **P**.

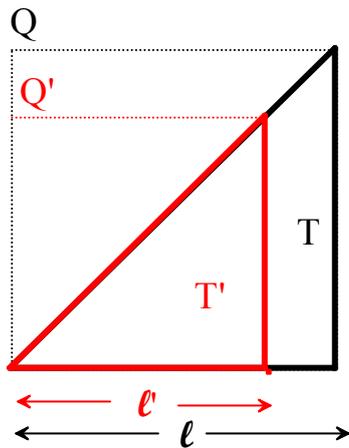
---

superficie libera dell'acqua passa per il centro della base inferiore. Determinare quale percentuale del contenuto iniziale è rimasta nella lattina.

"Archimede", Luglio – Settembre 2007, Le Monnier, pag. 158.

Soluzione in "Archimede", Gennaio – Marzo 2008, Le Monnier, pag. 58 – 60.

Si considerino adesso le seguenti relazioni:



(1) Si prendano due triangoli rettangoli isosceli simili **T** e **T'**, inscritti uno dentro l'altro come in figura. Ciascuno di questi triangoli è la metà di un quadrato, rispettivamente di **Q** e di **Q'**. **Q** ha lato uguale al cateto di **T**, che chiameremo  $l$  e **Q'** ha lato uguale al cateto di **T'**,  $l'$ . Risulta allora che:

$$\frac{AreaT'}{AreaT} = \frac{\frac{AreaQ'}{2}}{\frac{AreaQ}{2}} = \frac{\frac{l'^2}{2}}{\frac{l^2}{2}} = \frac{l'^2}{l^2}.$$

Per affinità la proprietà precedente vale per ogni coppia di triangoli simili quindi anche per i triangoli  $\tau$  e **T** della Fig. 4.9 (c):

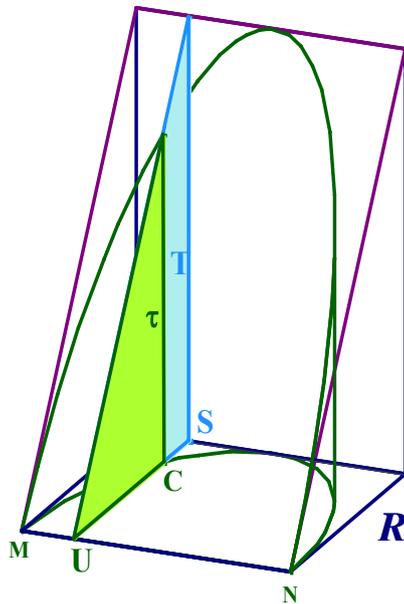


Fig. 4.9 (c)

$$\frac{Area \tau}{Area T} = \frac{UC^2}{US^2} \quad (1)$$

(2) Si applichi il II° Teorema di Euclide al triangolo rettangolo MCN della Fig. 4.10:

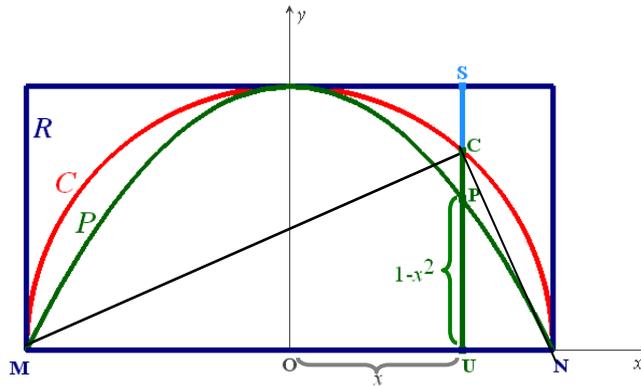


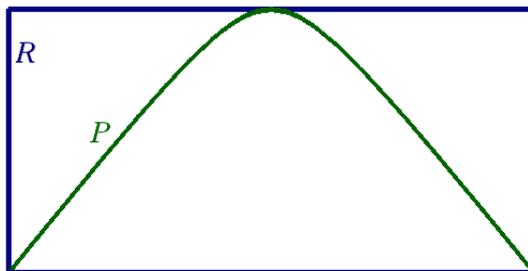
Fig. 4.10

$$UC^2 = MU \cdot UN = (1+x)(1-x) = 1-x^2.$$

In questo modo segue che:

$$\frac{UC^2}{US^2} = \frac{1-x^2}{1} = \frac{UP}{US} \quad (2)$$

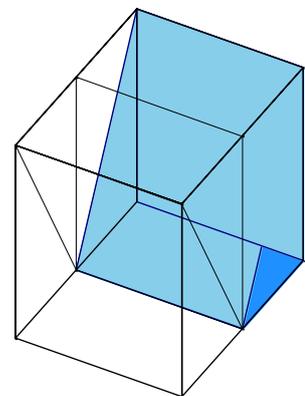
(3) Verrà considerata la proposizione di Archimede sull'area del segmento parabolico<sup>34</sup>: *l'area del segmento parabolico retto è due terzi dell'area del rettangolo ad esso circoscritto*, e la si applichi al segmento parabolico **P** e al rettangolo **R**:



$$\text{Area } P = \frac{2}{3} \text{ Area } R \quad (3)$$

(4) Per costruzione si ha che

$$\text{Prisma triangolare} = \frac{1}{4} \text{ Parallelepipedo}$$



<sup>34</sup> Questa proprietà si trova nei trattati sulle coniche di Aristotele e Euclide, in *Conoidi e Sferoidi* (Prop. 3) e in *Quadratura della parabola* (Prop. 3).

Infine si termina la dimostrazione come segue:

$$\frac{\text{Area } \tau}{\text{Area } T} = \frac{UC^2}{US^2} \quad \text{per la relazione (1)}$$

$$\frac{UC^2}{US^2} = \frac{UP}{US} \quad \text{per la relazione (2)}$$

segue che:

$$\frac{\text{Area } \tau}{\text{Area } T} = \frac{UP}{US}$$

E considerando che:

- l'unione di tutti i triangoli di tipo  $\tau$  dà l'**unghia**;
- l'unione di tutti i triangoli di tipo  $T$  dà il **prisma triangolare**;<sup>35</sup>
- l'unione di tutti i segmenti di tipo  $UP$  dà il **segmento parabolico  $P$** ;
- l'unione di tutti i segmenti di tipo  $US$  dà il **rettangolo  $R$** ,

segue:

$$\frac{\text{Vol. } \mathbf{Unghia}}{\text{Vol. } \mathbf{Prisma triangolare}} = \frac{\text{Area } \mathbf{Segmento parabolico } P}{\text{Area } \mathbf{Rettangolo } R} = \frac{2}{3}$$

per la relazione (3). Dunque,

$$\text{Vol. } \mathbf{Unghia} = \frac{2}{3} \text{ Vol. } \mathbf{Prisma triangolare},$$

e per la relazione (4)  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Vol. } \mathbf{Unghia} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \text{ Vol. } \mathbf{Parallelepipedo}$$

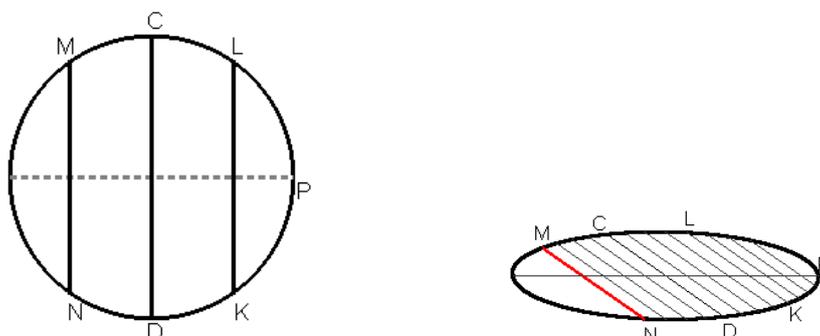
cioè 
$$\text{Vol. } \mathbf{Unghia} = \frac{1}{6} \text{ Vol. } \mathbf{Parallelepipedo}.$$

---

<sup>35</sup> Accettando, come fa Archimede, che la somma delle aree delle sezioni dell'unghia e del prisma danno i volumi dell'unghia e del prisma, cioè pensando che tali sezioni abbiano uno spessore piccolo quanto si vuole ma non nullo.

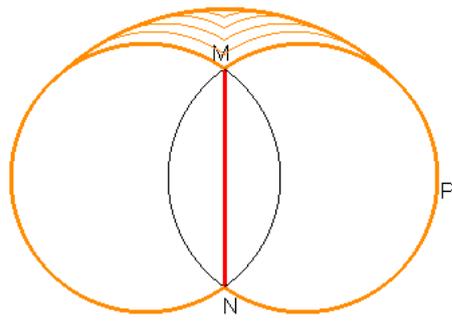
Riportando in questo caso soltanto l'informazione, si può notare che il problema dell'unghia cilindrica attrasse l'attenzione di molti matematici che lo analizzarono in diversi modi ai primordi del calcolo infinitesimale.

Tra questi ricordiamo **Keplero** (1571 – 1630) che utilizzò le sezioni dell'unghia per calcolare il volume di una varietà di solidi diversi, ottenuti dalla rotazione di un cerchio intorno ad una retta interna o esterna ad esso. Keplero concepisce un segmento semicircolare, ad esempio **MPN**, come costituito da un insieme di corde parallele a **MN**.

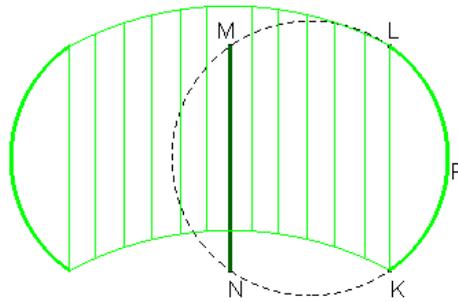
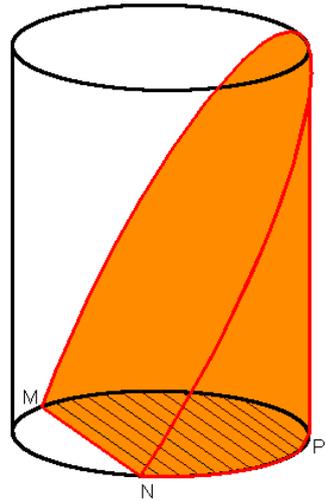


Quando il segmento ruota attorno ad **MN**, ogni corda descrive la superficie di un cilindro di raggio uguale alla distanza della corda da **MN**.

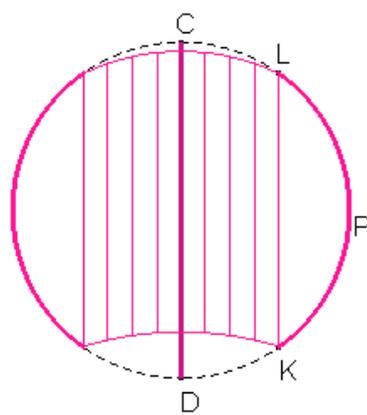
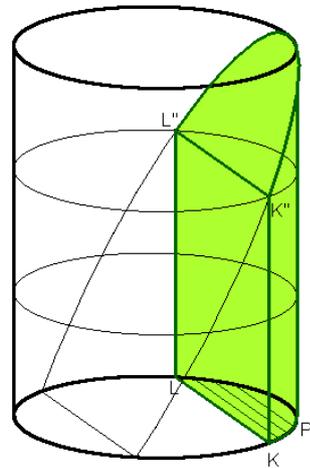
Il volume del solido generato può essere rappresentato dalla somma delle superfici di tutti questi cilindri. Considerando poi, ogni cilindro come un rettangolo costruito a partire da ogni corda parallela ad **MN**, con altezza eguale alla lunghezza della traiettoria circolare descritta dalla rotazione della corda, il solido risultante è un cilindro di base **MPN** con una sezione obliqua, ed avrà lo stesso volume del solido risultante dalla rotazione di **MPN** attorno a **MN**. Presentiamo alcuni esempi:



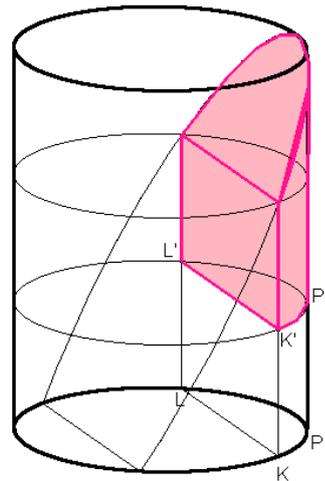
Volume *mela*  $\equiv$

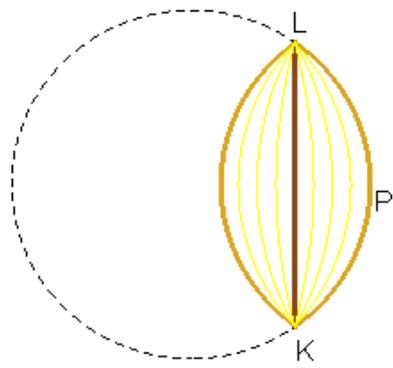


Volume *mela sferica*  $\equiv$

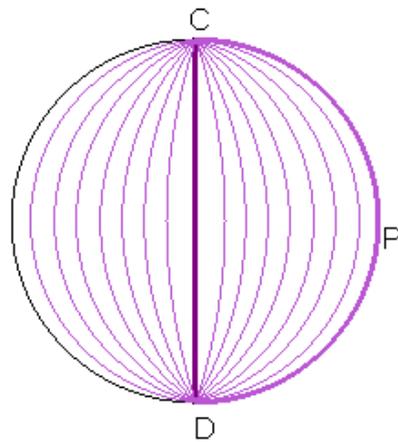
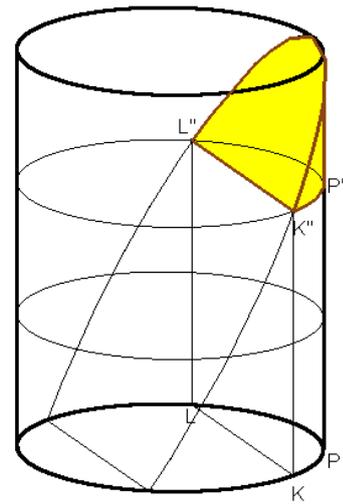


Volume *anello sferico*  $\equiv$

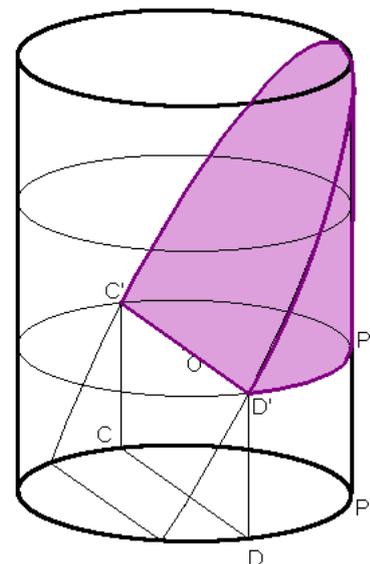




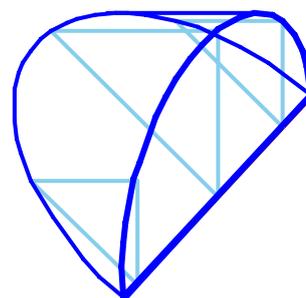
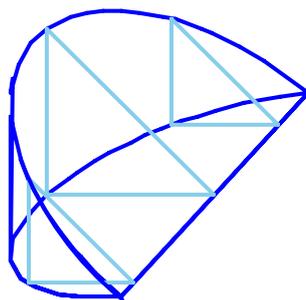
Volume *limone*  $\equiv$



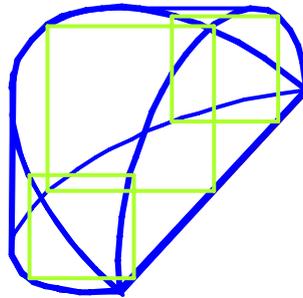
Volume *sfera*  $\equiv$



Dopo qualche anno nel IX Libro di *Ductus in planum* di **Grégoire de Saint-Vincent** (1584 – 1667) si trova un metodo di integrazione per determinare il volume di “una sezione cilindrica o *unghia*”. L’*unghia* di Grégoire si ottiene tagliando un cilindro retto secondo un piano obliquo per il diametro del cerchio di base.

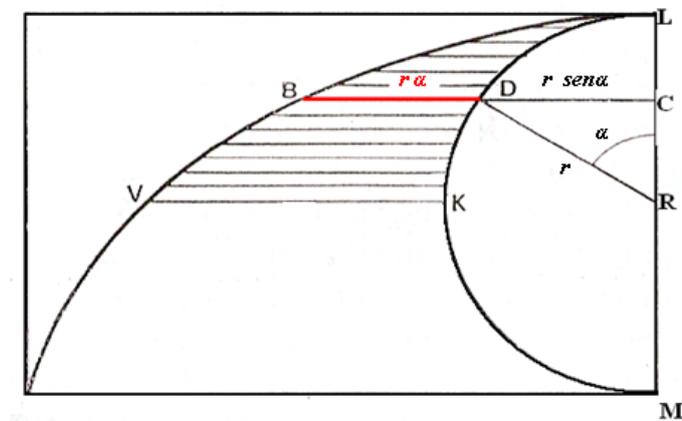


In più se l'altezza dell'unghia è uguale al suo raggio di base, le sezioni prese perpendicolarmente alla base sono **triangoli rettangoli**, mentre le sezioni della *doppia unghia*, formata dalle due unghie aventi la sezione obliqua uguale, sono **quadrati**.

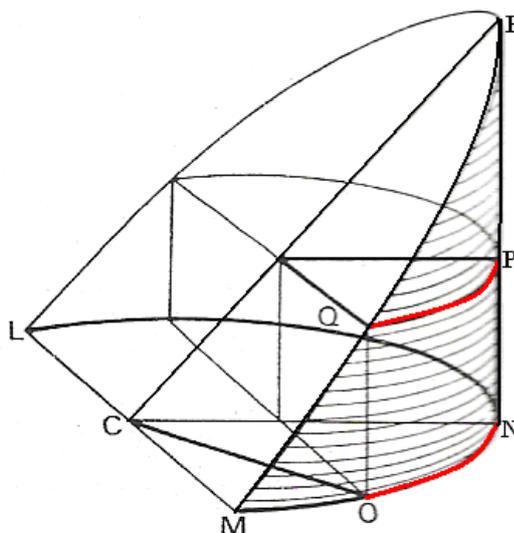


**Andrè Tacquet** (1612 – 1660) ritorna sulla determinazione del volume del segmento cilindrico o *unghia di Grégoire* con un puro metodo geometrico. Ciò che è interessante in questo caso è l'attacco che Tacquet fa contro gli *Indivisibili di Cavalieri*. Egli non crede affatto che le figure geometriche o i solidi siano formati da un insieme di linee, nel primo caso, o superfici, nel secondo; e in generale una quantità finita con può essere generata da *indivisibili*. In tutto il suo lavoro, il gesuita sfodera una profonda conoscenza della matematica greca e sceglie un approccio ai metodi infinitesimali puramente geometrico.

Infine **Christiaan Huygens** (1596 – 1687) per ottenere la quadratura di un segmento di cicloide LBD

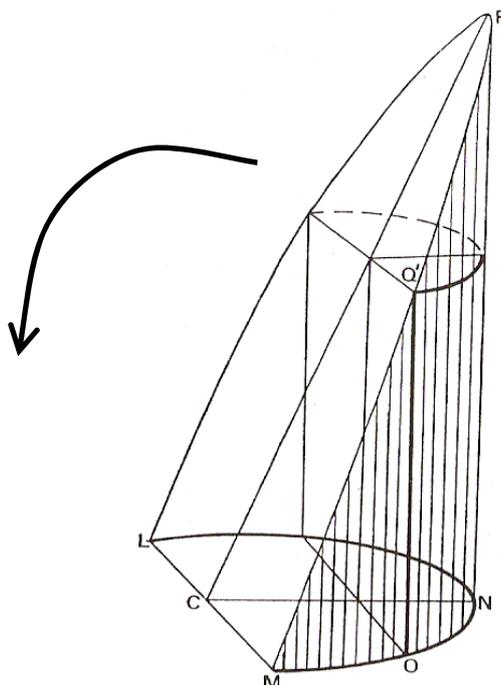


rappresenta lo spazio LVK attraverso la superficie curva di un unghia cilindrica

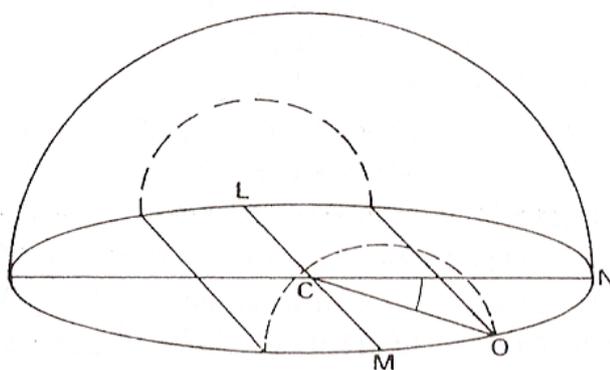


con base semicircolare LMN di raggio  $r$  e altezza NF uguale al raggio. Per la proprietà della cicloide **BD = ON = QP** e la parte dell'unghia FMN corrisponde alla parte della cicloide LVK.

Per determinare questa superficie, Huygens introduce la *seconda sezione cilindrica dell'unghia*, con la stessa base LMN e altezza uguale a  $NF' = LMN = \pi r$ .



Le linee verticali nella superficie curva corrispondono con le linee della superficie formata ruotando il semicerchio LNM di due angoli retti secondo il diametro LM.



Anche in questi passaggi, come era stato per Tacquet, si può notare un certo rigetto per gli *Indivisibili di Cavalieri* e una certa tendenza a cercare di integrare alcune delle dimostrazioni archimedee.

## NUOVE SOLUZIONI E APPLICAZIONI

La sfera e il cilindro sono stati oggetti molto significativi per Archimede, tanto che egli dedicò a questi due solidi un intero trattato in due libri: *Sulla sfera e sul cilindro*. In quest'opera sono presenti molti importanti teoremi, uno per tutti quello rappresentato sulla sua tomba: *ogni cilindro la cui base è il cerchio massimo di una sfera e la cui altezza è uguale al diametro della sfera è  $\frac{3}{2}$  della sfera, e la sua superficie insieme con le sue basi è  $\frac{3}{2}$  della superficie della sfera*<sup>36</sup>.

### AREA E VOLUME DELLA SFERA

**AREA.** Inizialmente vogliamo dimostrare che *l'area della superficie della sfera è uguale all'area della superficie laterale del cilindro*.

Si consideri una **sfera** di raggio **R** inscritta in un cilindro che ha per base la circonferenza massima della sfera e altezza **2R** (Fig. 4.11 (b)), e la loro sezione con un piano per i due diametri dei cerchi inferiore e superiore, che individua rispettivamente un quadrato e un cerchio (Fig. 4.11 (a)).

Si prenda un **segmento C** tangente alla **circonferenza** e il corrispondente **segmento c** su un lato del quadrato circoscritto ad essa (Fig. 4.11 (a)).

Con l'animazione fornita dal Cabri, le "tracce" dei segmenti (rosso sulla sfera e verde sul cilindro) descrivono una piccola **porzione di superficie sferica rossa**, il primo, e una piccola **porzione di superficie laterale del cilindro verde**, il secondo (Fig. 4.11 (b)).

---

<sup>36</sup> Questa proposizione si trova nel I libro di *Sulla sfera e sul cilindro*, come Corollario alla Proposizione 34, e nel *Metodo* (Proposizione 2). In queste due opere sono presenti due dimostrazioni differenti di questo risultato. In *Sulla sfera e sul cilindro* si trova una dimostrazione con il metodo di esaurimento, mentre nel *Metodo* viene utilizzato il metodo meccanico.

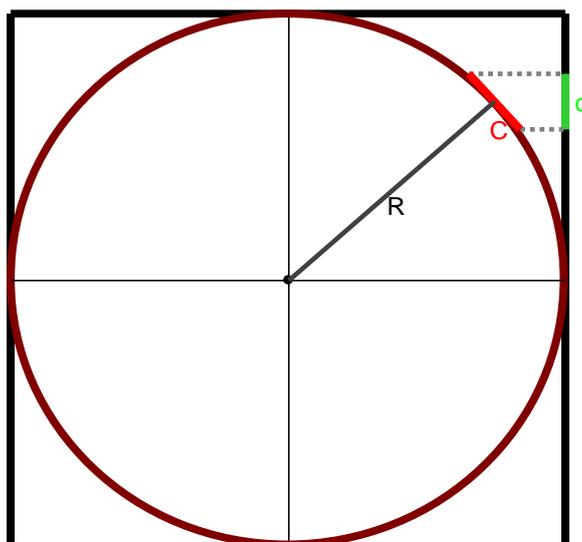


Fig. 4.11 (a)

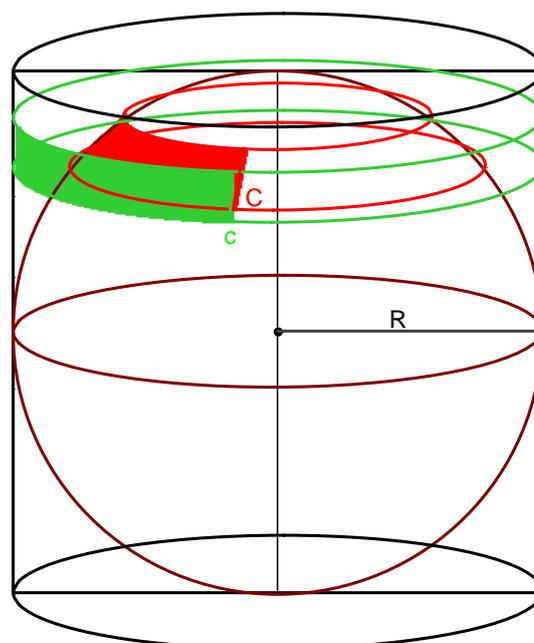


Fig. 4.11 (b)

Si nota inoltre che la **fascia verde**, proiezione di quella **rossa** sul cilindro, si “allunga” esattamente quanto diminuisce in altezza.

Per la dimostrazione di questo risultato si considerino, nella Fig. 4.11 (a), il **triangolo rettangolo rosso** di ipotenusa **C** e cateto **c** e il **triangolo rettangolo azzurro** inscritto nella circonferenza ruotato di  $90^\circ$  e posto su di essa in modo che sia tangente alla circonferenza.

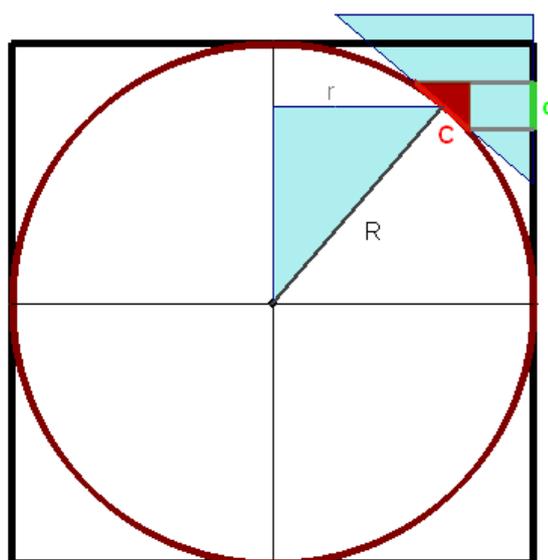


Fig. 4.11 (a)

I due triangoli rettangoli (quello rosso e quello azzurro) sono simili, quindi vale la proporzione

$$\frac{R}{r} = \frac{C}{c}$$

dalla quale si ha  $Rc = rC$ . E ancora  $2\pi Rc = 2\pi rC$ . I due membri di quest'ultima uguaglianza rappresentano rispettivamente la **striscia verde** e la **striscia rossa**, che risultano essere uguali. Quando  $c$  e  $C$  sono infinitesimi si può affermare che la superficie della **sfera** è uguale alla superficie laterale del cilindro ad essa tangente.

In più, visto che la superficie laterale del cilindro si apre e si distende in una superficie rettangolare di lato corto  $2R$  e lato lungo  $2\pi R$ ,

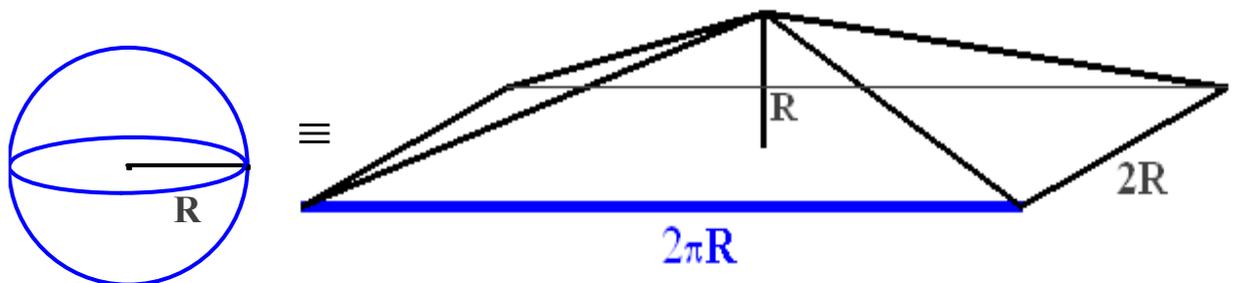


l'area laterale del cilindro è  $4\pi R^2$  così come l'area della **sfera**.

**VOLUME.** Con il precedente risultato e ricordando che il volume di un

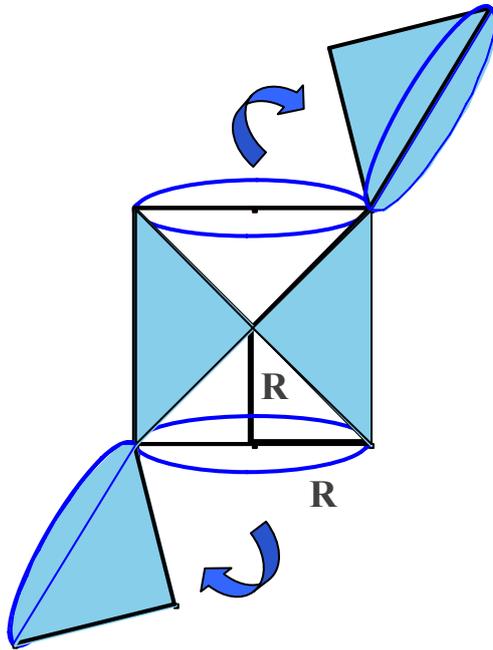
“solido a punta” è sempre  $\frac{A_{base} \cdot h}{3}$  è semplice ricavare anche il volume

della sfera:

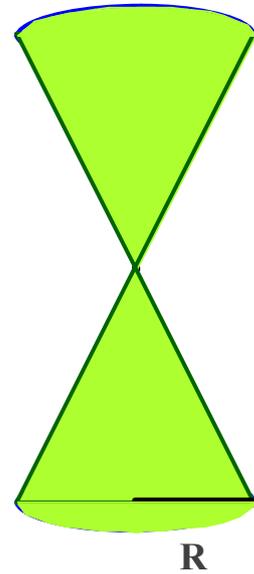


$$V_{Sfera} = V_{Piramide} = \frac{4\pi R^2 \cdot R}{3} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

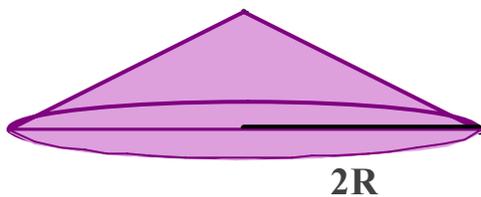
In questo modo, è semplice trovare altri solidi che hanno lo stesso volume della sfera.



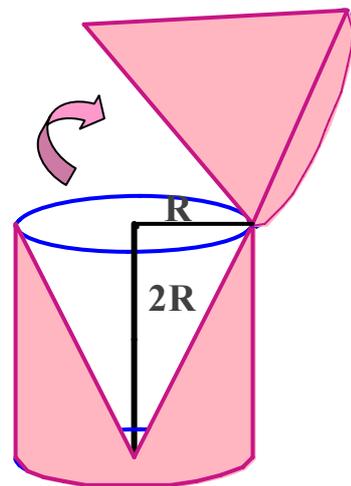
$$\begin{aligned} V_{\text{Solido}} &= V_{\text{Cilindro}} - 2 V_{\text{Cono}} = \\ &= 2\pi R^3 - 2\left(\frac{\pi R^2 \cdot R}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V_{\text{Clessidra}} &= 2 V_{\text{Cono}} = \\ &= 2\left(\frac{\pi R^2 \cdot 2R}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$



$$V_{\text{Cono}} = \frac{\pi(2R)^2 \cdot R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$



$$\begin{aligned} V_{\text{Solido}} &= V_{\text{Cilindro}} - V_{\text{Cono}} = \\ &= 2\pi R^3 - \left(\frac{\pi R^2 \cdot 2R}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

# AREA DELLA SUPERFICIE CURVA E VOLUME DELL'UNGHIA CILINDRICA

AREA. Riproduciamo il quadrato in Fig. 4.11 (a) in prospettiva

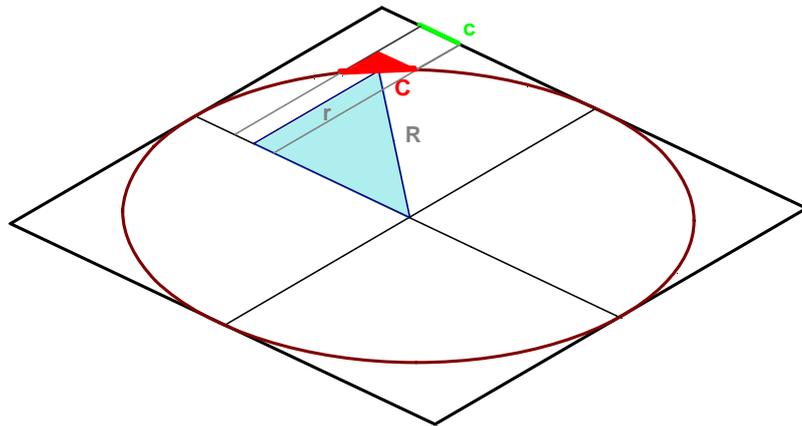


Fig. 4.11 (c)

e osserviamo nella seguente figura, che

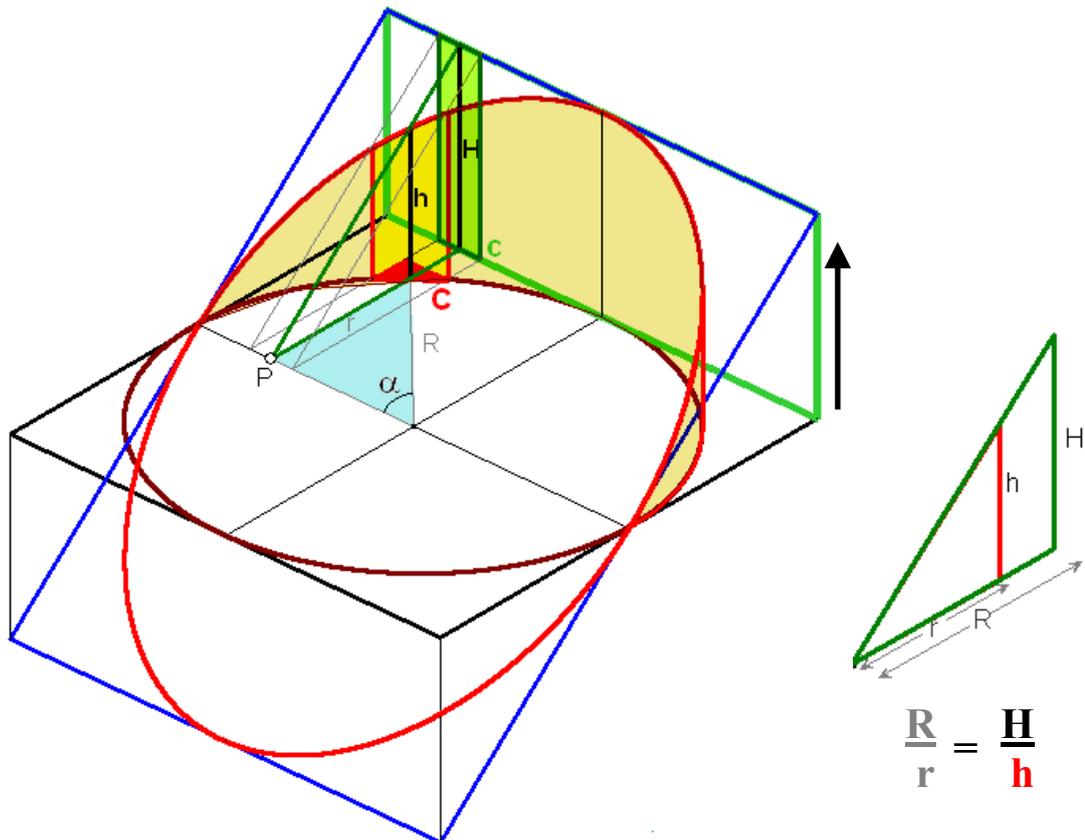


Fig. 4.12

la parte colorata in **beige** è la parte curva della superficie laterale dell'unghia cilindrica di cui si vuole misurare l'area.

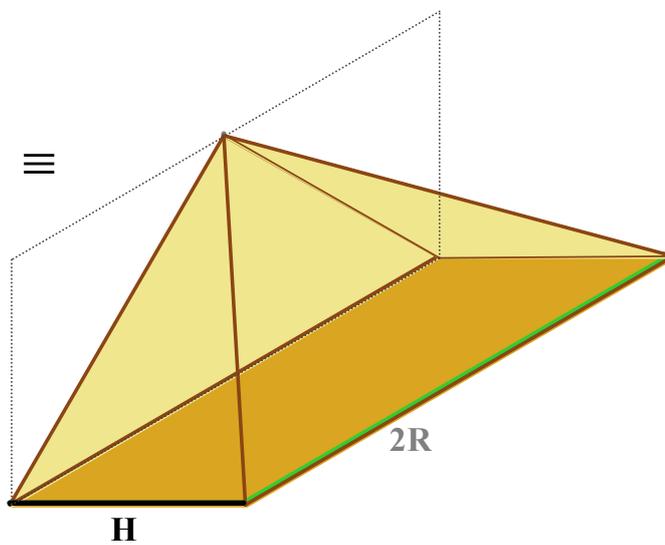
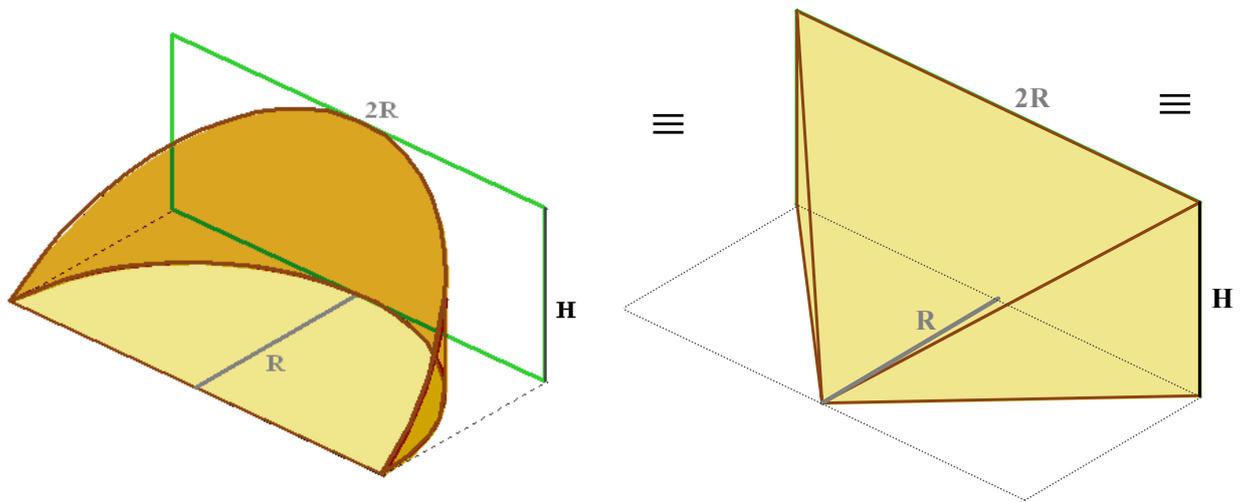
Dalla corrispondenza biunivoca ottenuta in precedenza tra il segmento **c** e il segmento **C**, si deduce la seguente proporzione:

$$\frac{R}{r} = \frac{C}{c} = \frac{H}{h}.$$

Da ciò segue che c'è una corrispondenza biunivoca anche tra la **superficie verde** di altezza **H** e area **C·H** e la **superficie gialla** di altezza **h** e area **c·h**. Cioè ad ogni punto **P** sul diametro corrisponde un **“rettangolino” verde** e un **“trapezoide” giallo** con aree proporzionali. Infatti, con l'animazione fornita dal Cabri si vede che “muovendo” il punto **P** sul diametro a cui appartiene, la **superficie del “rettangolino” verde** si “allunga”, rispetto a quella **gialla**, quando diminuisce in larghezza. Inoltre, quando **c** e **C** sono infinitesimi si può affermare l'area della superficie del **“rettangolino” verde** è uguale a quella del **“trapezoide” giallo**.

Considerato infine che al “muoversi” del punto **P**, i **“rettangolini” verdi** descrivono la superficie del **rettangolo verde** di altezza **H** e base **2R**, e i **“trapezoidi” gialli** descrivono la superficie totale dell'**unghia**, segue che l'area della superficie curva dell'**unghia** è uguale all'area della superficie del **rettangolo verde** che è **2RH**.

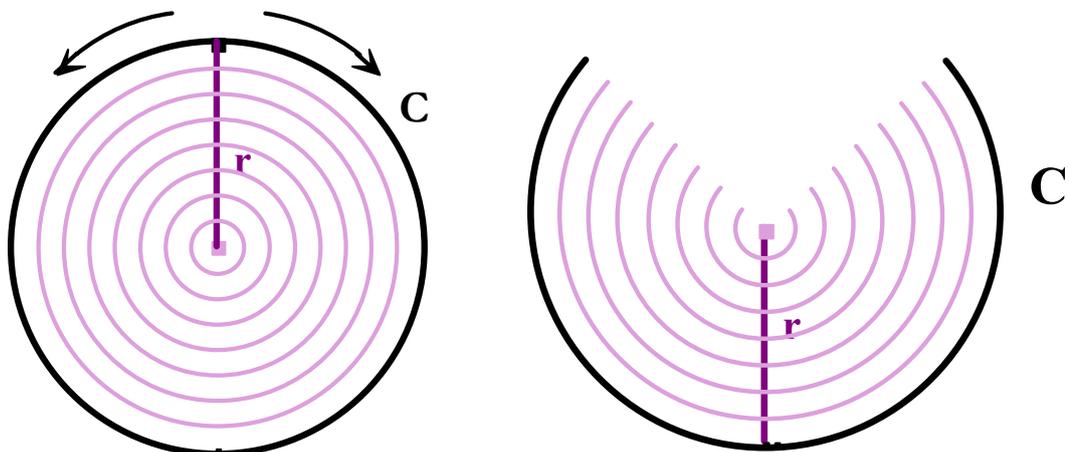
**VOLUME.** Sommando le superfici curve concentriche di cui abbiamo prima calcolato l'area si trova il volume dell'unghia utilizzando nuovamente la formula dei “solidi a punta”:

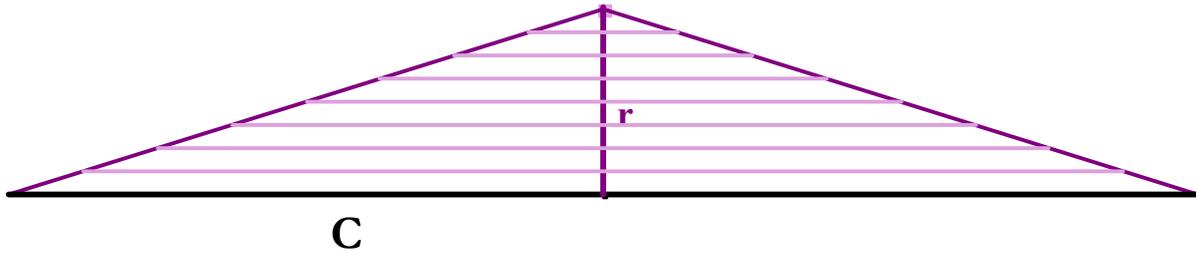


**Vol. Unghia =**

$$= \frac{2R^2 \cdot H}{3} = \frac{2}{3} R^2 H$$

A questo punto facciamo un'ulteriore considerazione:  
 inizialmente si noti che aprendo un cerchio si ottiene un triangolo isoscele che ha per base la lunghezza della circonferenza **C** e per altezza il **raggio r** della stessa.





Durante questa trasformazione si conserva l'area, e soltanto il **segmento verticale viola** di lunghezza  $r$  resta fisso. Si sezioni quindi la sfera con piani paralleli, così da ottenere cerchi sempre più sottili e si aprano quest'ultimi in **triangoli isosceli** come appena visto:

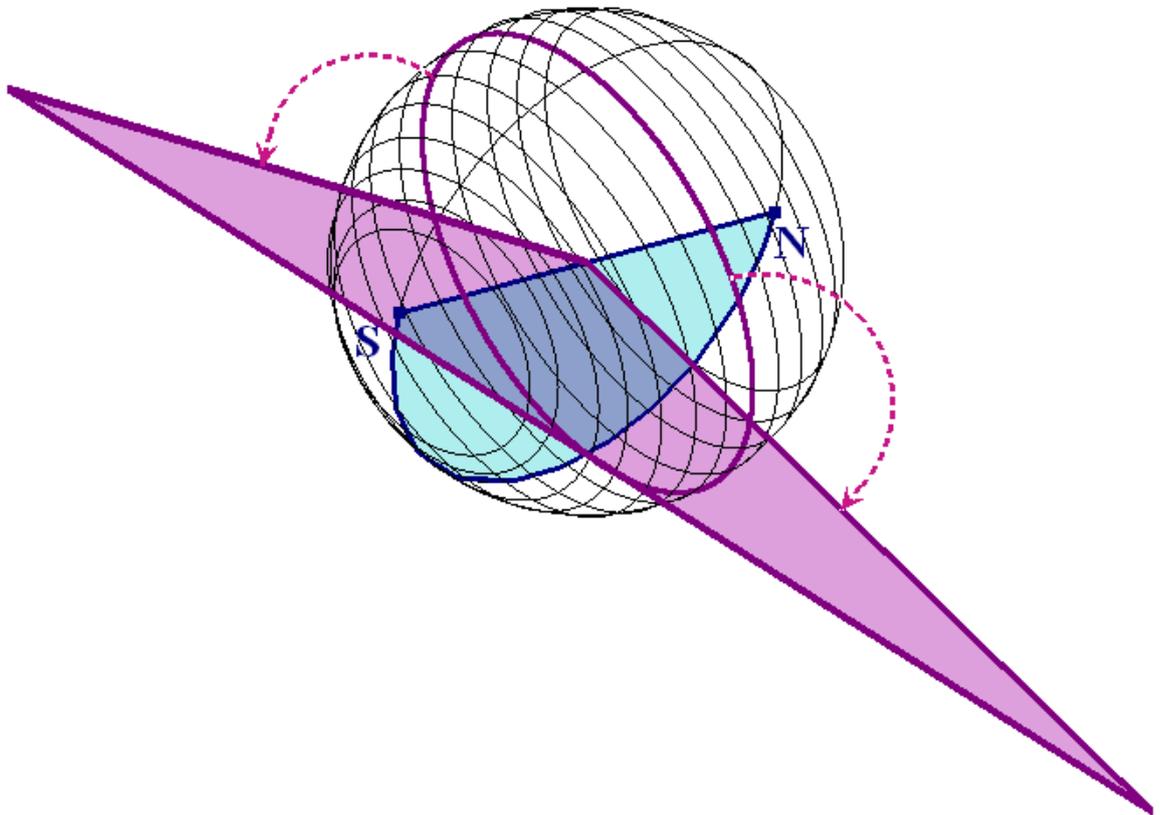


Fig. 4.13

in questa trasformazione i punti che rimangono fissi sono solo quelli dei **segmenti viola** dei vari cerchi della **semicirconferenza azzurra**. Poiché i **triangoli** sono simili ed hanno un vertice sul segmento **SM** si ottiene un nuovo solido che sembra un “portagrissini” (Fig.4.14(a)).

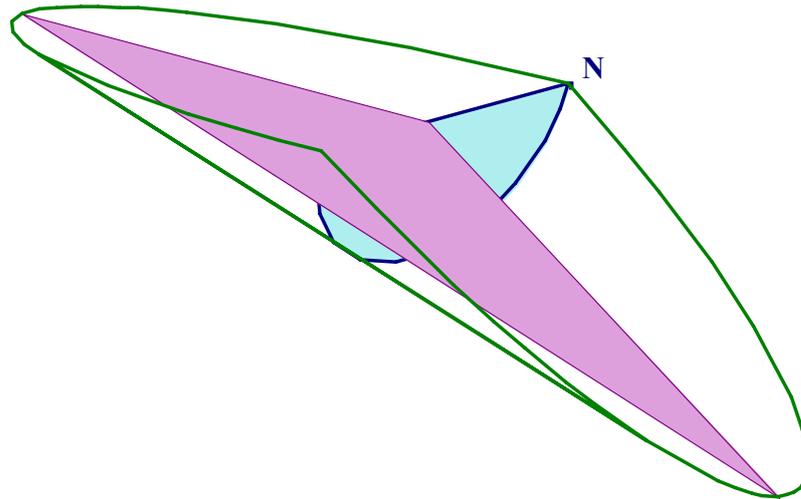


Fig. 4.14 (a)

Questo solido ha:

- la superficie curva uguale a quella della sfera ed evidentemente uguale ad una doppia unghia:  $4\pi R^2$ ;
- lo stesso volume della sfera e lo stesso volume di due unghie:  $\frac{4}{3}\pi R^3$ .

Possiamo così trovare il volume dell'unghia cilindrica considerando la metà di quello della sfera:  $\frac{2}{3}\pi R^3$ . Infine, inscrivendo il nuovo solido in un **cilindro** e a sua volta in un parallelepipedo a base quadrata

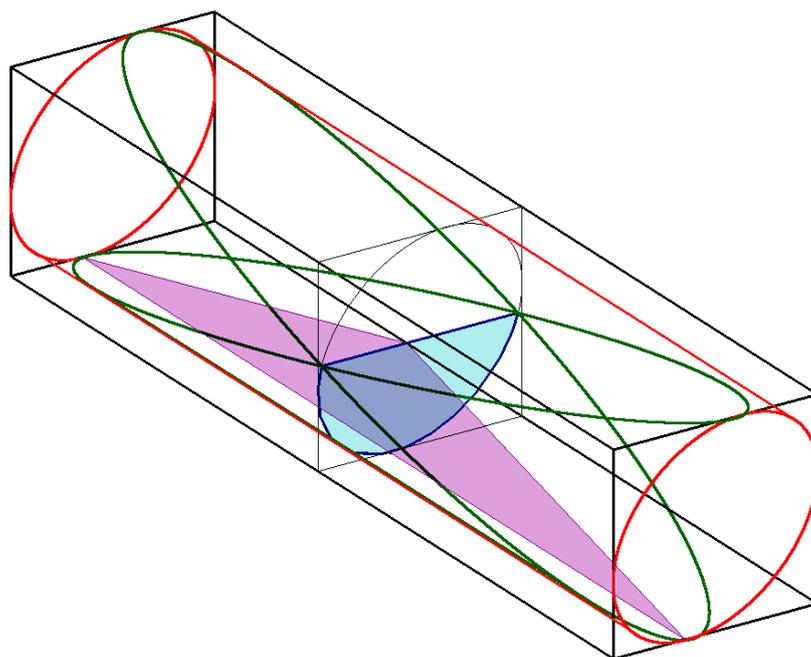


Fig. 4.14 (b)

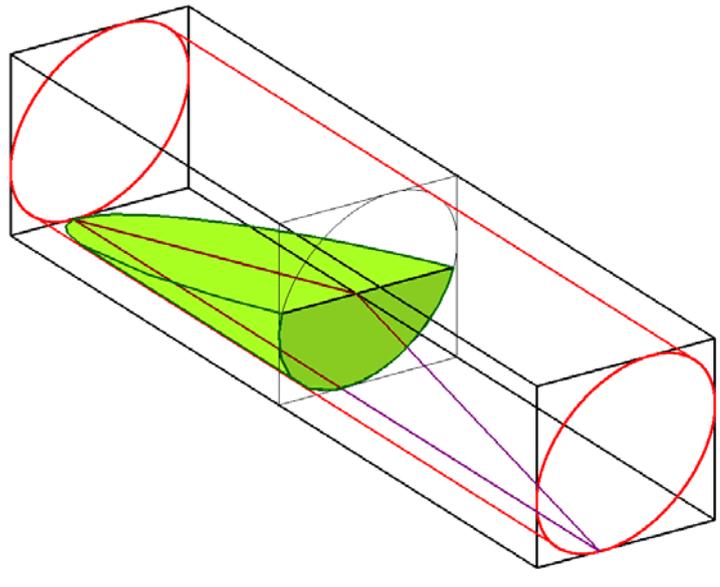


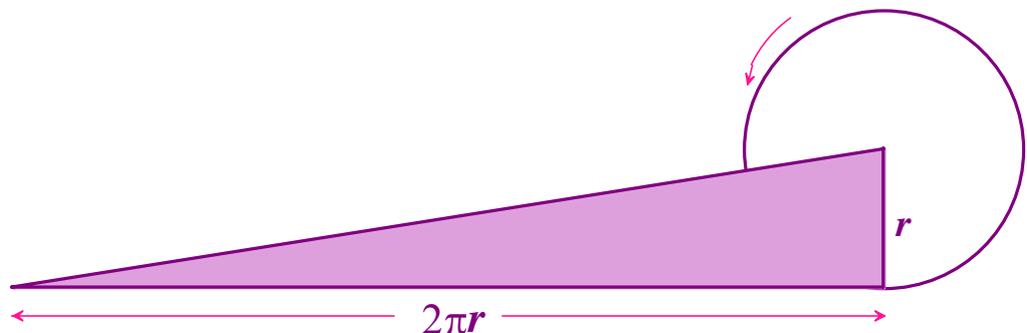
Fig. 4.14 (c)

e ponendo  $H = \pi R$  otteniamo nuovamente  $\text{Volume Unghia} = \frac{2}{3} R^2 H$ , ed

essendo  $\text{Volume Parallelepipedo} = 4R^2 H \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\text{Volume Unghia}}{\text{Volume Parallelepipedo}} = \frac{\frac{2}{3} R^2 H}{4R^2 H} = \frac{1}{6}.$$

In modo più diretto per calcolare l'area dell'**unghia** è quello di aprire ogni cerchio della sfera in un triangolo rettangolo, invece che isoscele, di base  $2\pi r$  (questo concetto è anche presente nella *Misura del cerchio*, vedi Par. 3.4).



Sezionando nuovamente la sfera in cerchi sottili e “aprendoli” in triangoli rettangoli si ottiene nuovamente l'**unghia** (Fig. 4.15).

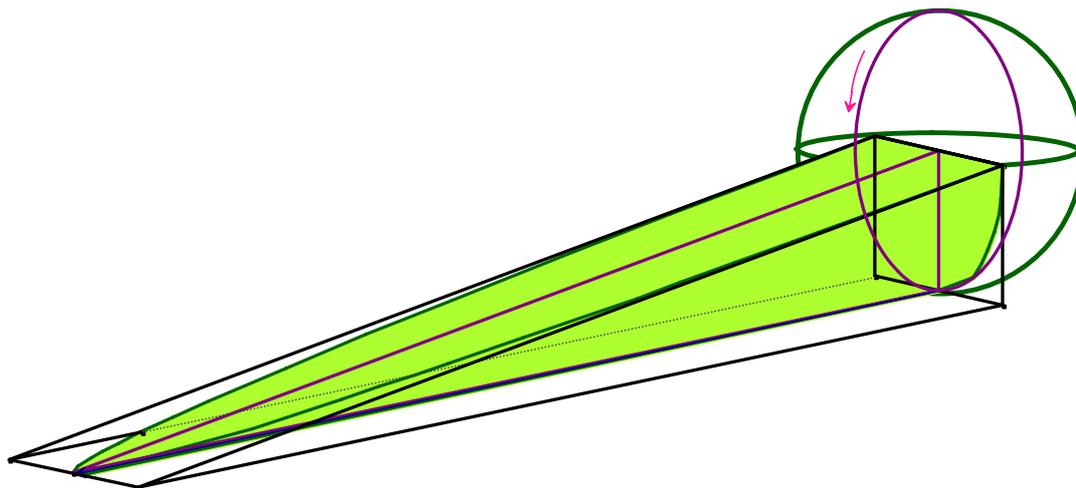
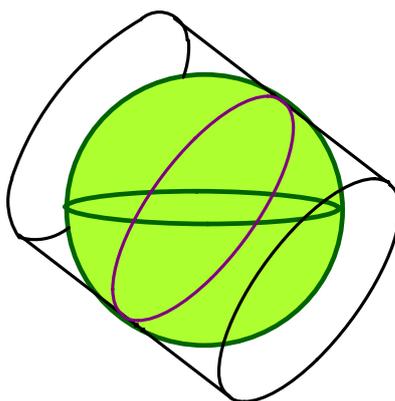


Fig. 4.15

Infine, avvolgendo su se stesso il prisma triangolare la **sfera** inscritta in un cilindro,



$$\text{quindi } \frac{\text{Vol. } \mathbf{Unghia}}{\text{Vol. } \mathbf{Prisma triangolare}} = \frac{\text{Vol. } \mathbf{Sfera}}{\text{Vol. } \mathbf{Cilindro}} = \frac{2}{3}.$$

Ma *Prisma triangolare* = 4 *Parallelepipedo*

$$\Rightarrow \mathbf{Unghia} = \frac{1}{6} \mathbf{Parallelepipedo}.$$

## AREA DELLA SINUSOIDE

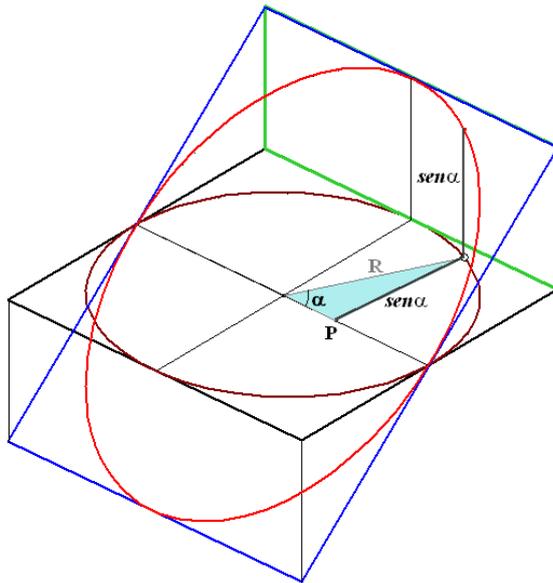


Fig. 4.16 (a)

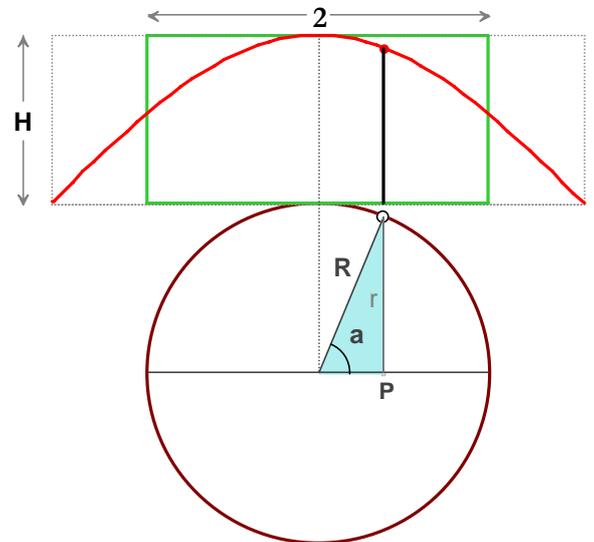


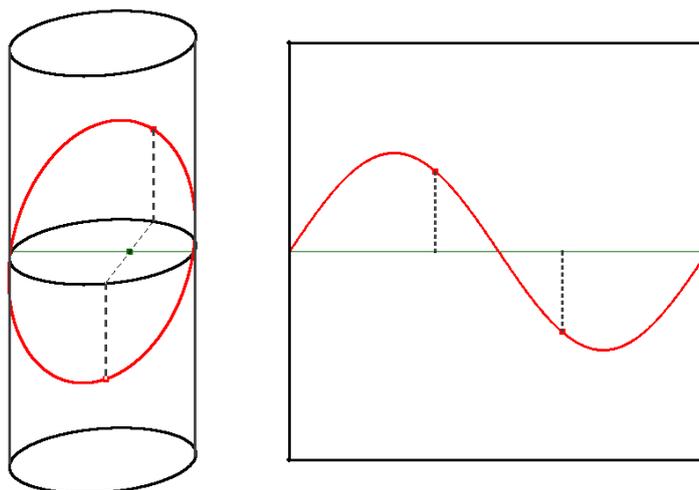
Fig. 4.16 (b)

Si prenda la Fig. 4.12 e si noti che “schiacciando” la parte curva di unghia (Fig. 4.16 (a)) su un piano si ottiene un **ramo di sinusoide** di altezza **H** (Fig. 4.16 (b)). In particolare, nel caso in cui  $H = R = 1$  la sinusoide è quella canonica.

Dalle figure 4.16 e dai risultati ottenuti nel paragrafo precedente si deduce che la **sinusoide** ha la stessa area dell’unghia e quindi stessa area del **rettangolo verde**, che nel caso canonico vale 2.

Osservando adesso che tutte le sezioni oblique di un cilindro aperto sono sinusoidi<sup>37</sup>,

<sup>37</sup> Emma Castelnuovo arriva allo stesso risultato avvolgendo un foglio di carta attorno ad una candela. Successivamente questi due oggetti vengono tagliati secondo una sezione obliqua ottenendo una sinusoide sul foglio di carta disteso.

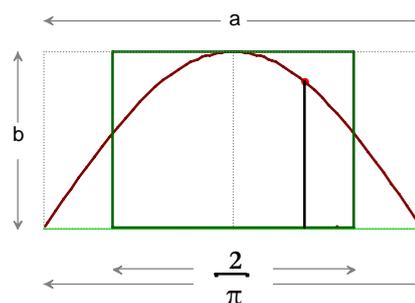
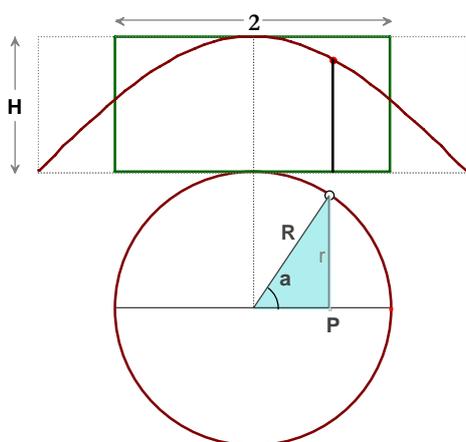


calcoliamo l'area di una sinusoide generica.

**Area Sinusoide = Area rettangolo**

Sinusoide canonica  
 $H = R = 1$

**Area Sinusoide canonica = 2**



Si prenda la sinusoide canonica in Fig. 4.16 (b) e si noti che la base del **rettangolo grigio** tratteggiato ad essa circoscritto sta in rapporto di  $\frac{2}{\pi}$  con la base del **rettangolo verde**, quest'ultimo avente la stessa area della **sinusoide**. Quindi si ha che l'area della **sinusoide** è  $\frac{2}{\pi}$  volte l'area del **rettangolo grigio** ad essa circoscritto.

Si estenda questo risultato a tutte le sinusoidi ottenute da quella canonica con una affinità e si prenda la sinusoide generica di base **a** e altezza **b**.

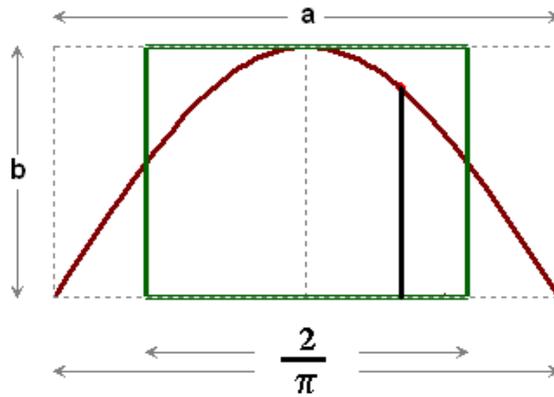


Fig. 4.19

Ricordando che le affinità nel piano mantengono i rapporti tra le aree, si conclude che anche l'area della sinusoide affine sarà  $\frac{2}{\pi}$  volte l'area del rettangolo affine circoscritto ad essa.

In questo caso il rettangolo ha area **ab**. Dunque l'area della sinusoide è  $\frac{2}{\pi} \mathbf{ab}$ .

## 4.1.2 L'INTERSEZIONE DEI CILINDRI

### IL RISULTATO DI ARCHIMEDE

Il secondo teorema annunciato nella lettera introduttiva ad Eratostene è un altro esempio del geniale metodo di Archimede. La soluzione *meccanica* è illustrata nella Proposizione XVI ed è seguita da una “dimostrazione-conferma” con il metodo di esaustione (Proposizione XVII).

Entrambe queste dimostrazioni sono perdute. Per quanto riguarda la prima, le linee guida sono state proposte da **Zeuthen**, sviluppate in seguito da **Reinach** e **Heath**, i quali vi aggiunsero anche uno schema della seconda dimostrazione. La ricostruzione della deduzione meccanica (Prop. XV) è stata fatta imitando i ragionamenti della Proposizione II (in cui Archimede ricava il rapporto tra la sfera e il cilindro), mentre la dimostrazione geometrica (Prop. XVI) è stata condotta sull'esempio della Proposizione XIV<sup>38</sup>.

La dimostrazione meccanica di questo problema fa uso di sezioni parallele e della legge di equilibrio della leva, come nel caso dell'unghia. Anche in questa dimostrazione si sceglie, in modo conveniente, una seconda figura di volume noto da paragonare al solido che si vuole misurare. In questo modo la soluzione si presenta immediatamente come conseguenza di proposizioni precedentemente studiate. La figura nota che Archimede utilizza in questa dimostrazione è un parallelepipedo che ha quattro volte le dimensioni del cubo di partenza.

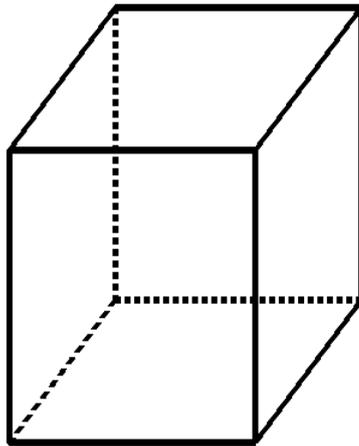
La dimostrazione inoltre è molto semplificata dal fatto che il medesimo ragionamento viene eseguito nella Proposizione 2, che viene quindi soltanto richiamata.

---

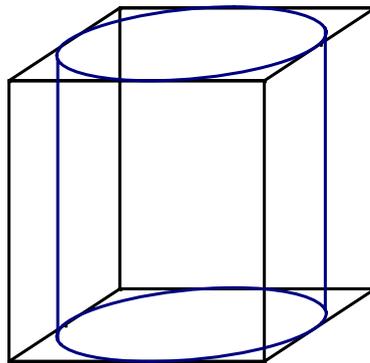
<sup>38</sup> Heath T., *The Works of Archimedes*, Dover Publications, New York, 2002.

Riportiamo solo la dimostrazione meccanica di Archimede, tralasciando quella per esaurimento, poco utile ai nostri scopi.

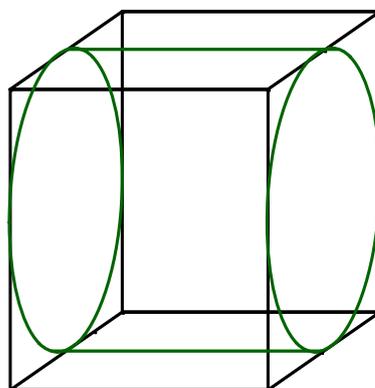
**Proposizione XV.** *Se in un cubo*



*s'inscrive un cilindro avente le basi sopra due quadrati opposti e la superficie laterale tangente alle altre quattro facce;*



*e se nello stesso cubo s'inscrive poi un altro cilindro avente le basi su altri due quadrati e la superficie laterale tangente alle rimanenti facce,*



*il solido racchiuso dalle superficie dei due cilindri e comune ad essi due*

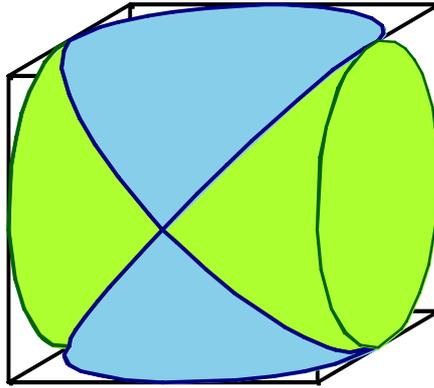


Fig. 4.17

*è uguale ai due terzi di tutto il cubo.*

Si prenda la Fig. 4. 17, e si consideri un piano scelto a caso che passi per il centro **O** del cubo e sia perpendicolare a due sue facce opposte (Fig. 4.18).

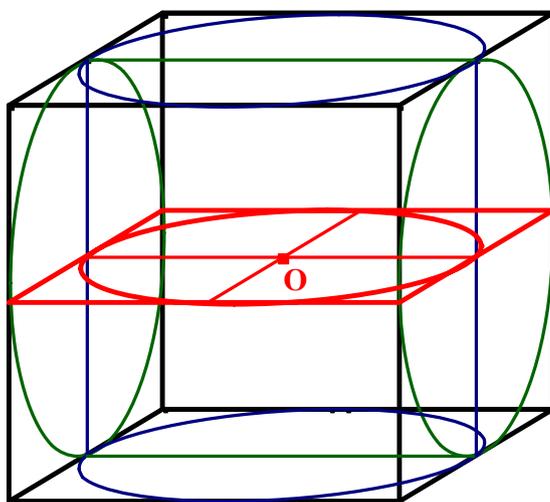


Fig. 4.18 (a)

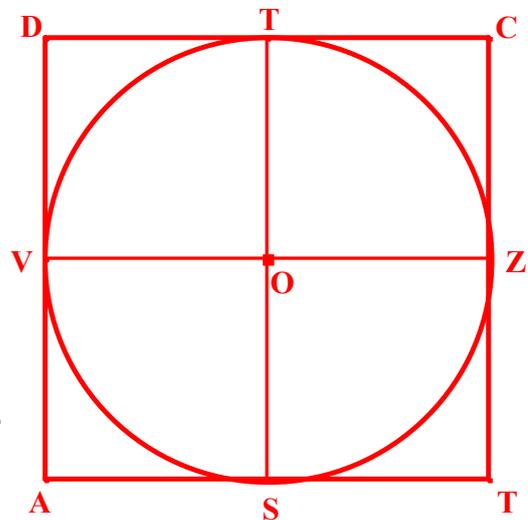


Fig. 4.18 (b)

Questo piano seziona il cubo nel **quadrato ABCD**, il cilindro il cui asse è perpendicolare al piano (blu in Fig. 4.18 (a)) nel **cerchio STVZ** e l'altro cilindro (verde in Fig. 4.18 (a)) nello stesso **quadrato ABCD**.

Si considera adesso un piano per **ST** perpendicolare al **quadrato ABCD**, questo piano interseca il cubo in un **quadrato arancione** il cui centro è sempre **O** (Fig. 4.19).

Si costruisca una **piramide** con vertice in **V** e avente per base il **quadrato arancione**. Prolungando i lati di questa **piramide** fino ad intersecare il piano per **Z** parallelo alla sua base, si ottiene nuovamente un **quadrato**. Questo **quadrato** avrà lato di lunghezza **EF**, uguale al doppio di **ST**.

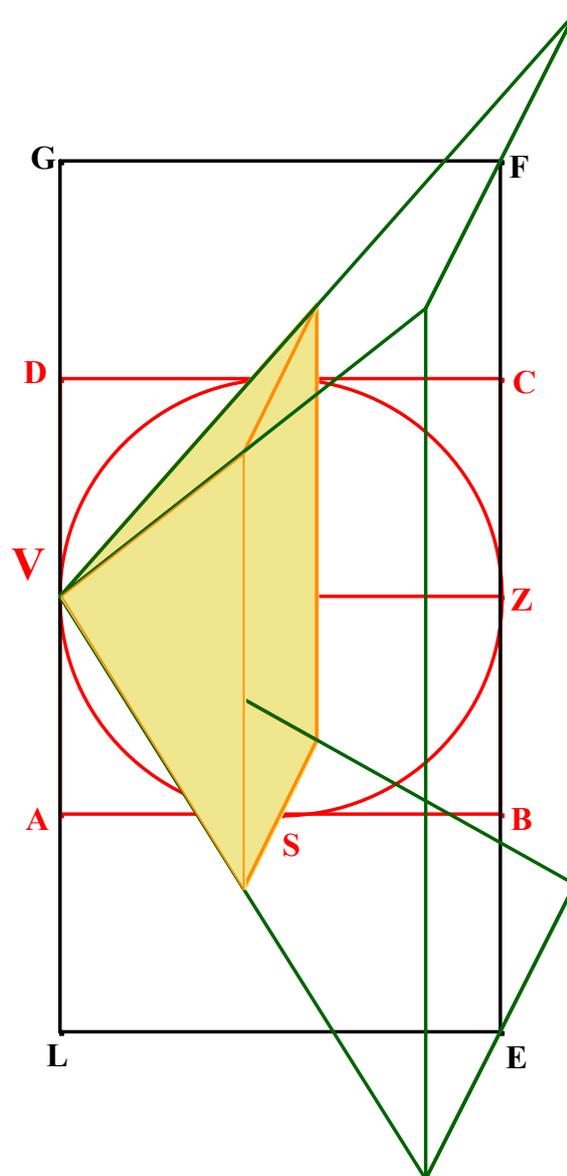


Fig. 4.19

Si mette così in evidenza il rettangolo **EFLG**, sezione del parallelepipedo che ha quattro volte le dimensioni del cubo.



In ultimo, usando come anticipato il procedimento della dimostrazione della Proposizione 2 si ha che:

$$\mathbf{MX} = \mathbf{VZ}, \mathbf{XQ} = \mathbf{VX}, \text{ e che}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{MX} \cdot \mathbf{XQ} &= \mathbf{VZ} \cdot \mathbf{VX} \quad (\text{1° Teorema di Euclide applicato al triangolo UVZ}) \\ &= \mathbf{UV}^2 = \mathbf{UX}^2 + \mathbf{VX}^2 \quad (\text{Teorema di Pitagora applicato al triang. UVX}) \\ &= \mathbf{UX}^2 + \mathbf{XQ}^2 \end{aligned}$$

Allora  $\mathbf{MX} \cdot \mathbf{XQ} = \mathbf{UX}^2 + \mathbf{XQ}^2$ .

$$\begin{aligned} \text{Inoltre, } \frac{\mathbf{YV}}{\mathbf{VX}} &= \frac{\mathbf{MX}}{\mathbf{XQ}} \quad \text{moltiplicando entrambi i membri per } \mathbf{MX} \\ &= \frac{\mathbf{MX}^2}{\mathbf{XQ} \cdot \mathbf{MX}} \quad \text{sostituisco il risultato precedente} \\ &= \frac{\mathbf{MX}^2}{\mathbf{XQ}^2 \cdot \mathbf{UX}^2} \quad \text{da cui, considerando l'intero parallelepipedo} \\ &= \frac{\mathbf{MN}^2}{\mathbf{UP}^2 \cdot \mathbf{QR}^2} \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{\mathbf{YV}}{\mathbf{VX}} = \frac{\mathbf{MN}^2}{\mathbf{UP}^2 \cdot \mathbf{QR}^2} = \frac{\text{Area } \mathbf{Quadrato\ verde}}{\text{Area } \mathbf{Quadr. blu} + \text{Area } \mathbf{Quadr. rosso}}$$

Si può così dire che, il *quadrato* di lato  $\mathbf{MN}$  che è nel parallelepipedo, rimanendo al suo posto, farà equilibrio, rispetto a  $\mathbf{V}$ , a tutti e due i quadrati della piramide e del *solido I* (= Intersezione dei cilindri) posti con il loro centro di gravità in  $\mathbf{Y}$ . Cioè,

$$\mathbf{Quadrato\ verde} \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{Quadrato\ blu} + \mathbf{Quadrato\ rosso}) \cdot \mathbf{l},$$

dove  $\mathbf{l} = \mathbf{YV}$  = lato del cubo.

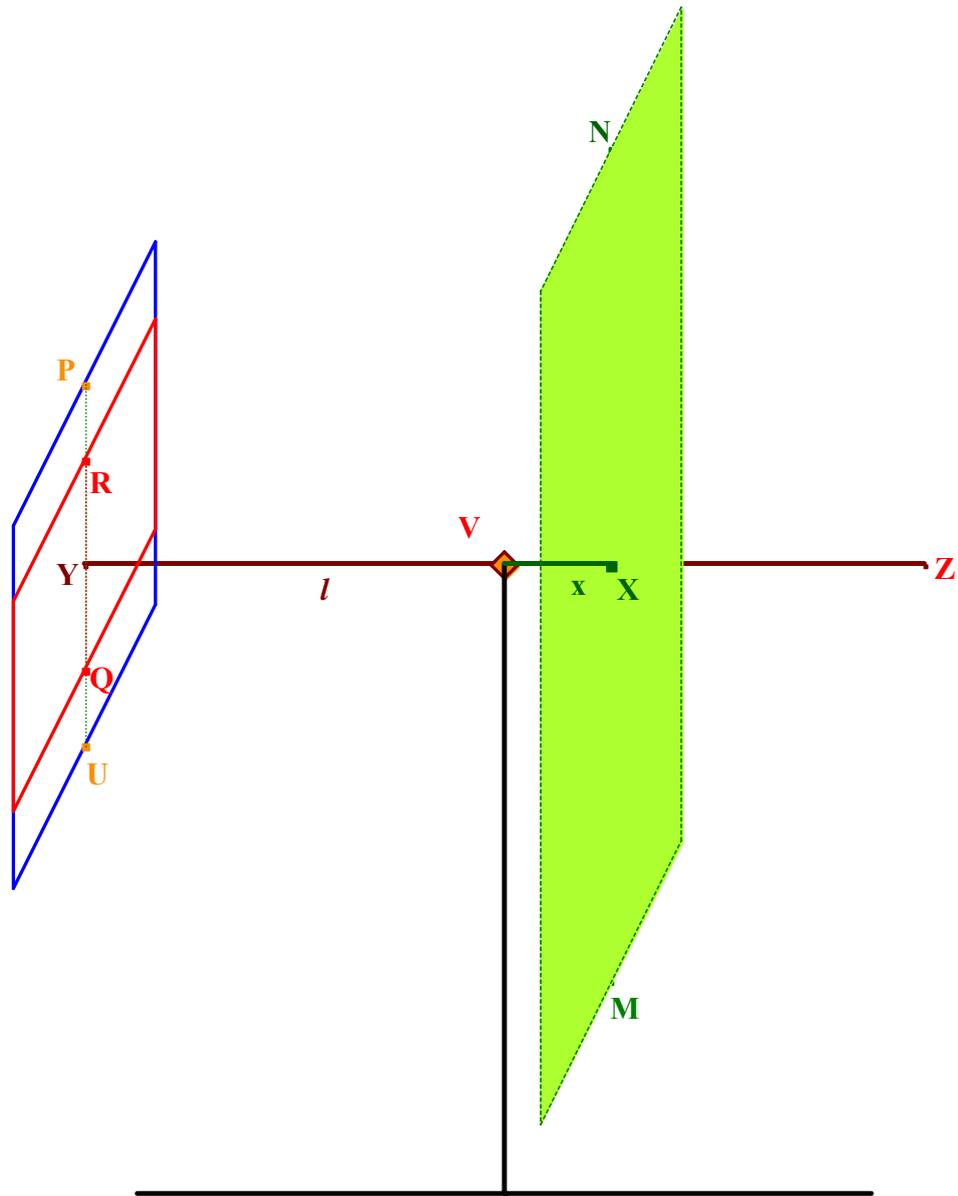


Fig. 4. 21

Facendo variare il punto **X** (e quindi il segmento **x**) sul segmento **VZ** si ottiene l'intero parallelepipedo a destra e il **solido I** e la piramide a sinistra. Ne segue che, *il parallelepipedo rimanendo al suo posto farà equilibrio, rispetto a **V**, al solido comune ai due cilindri e alla piramide posti con il loro centro di gravità in **Y**.*

Essendo infine,

- il centro di gravità del parallelepipedo **O**;
- **YV = 2 OV**;

- *Piramide* =  $\frac{1}{3}$  *Parallelepipedo*;
- *Parallelepipedo* = 4 *Cubo*,

si ha che

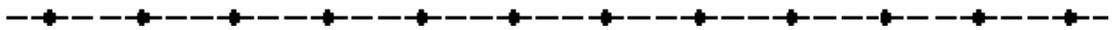
$$\frac{YV}{VO} = \frac{l}{l/2} = \frac{\text{Parallelepipedo}}{\text{Solido I} + \text{Piramide}}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{\text{Parallelepipedo}}{\text{Solido I} + \frac{1}{3}\text{Parallelepipedo}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \text{ Solido I} = \frac{1}{3} \text{ Parallelepipedo}$$

$$\text{Solido I} = \frac{1}{6} \text{ Parallelepipedo} = \frac{1}{6} \cdot 4 \text{ Cubo} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Solido I} = \frac{2}{3} \text{ Cubo.}$$

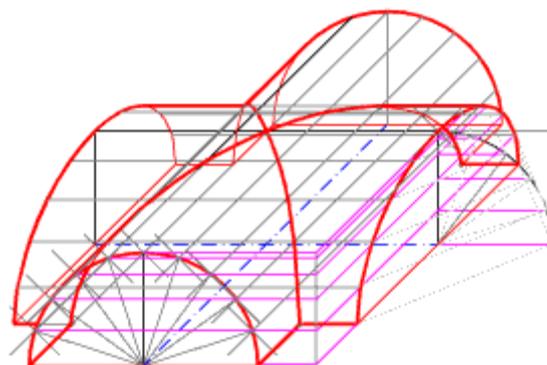
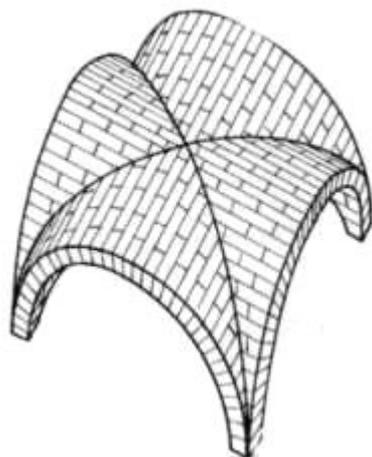


Questo teorema, come quello dell'unghia cilindrica, si trova nei *Metrica* di **Erone** (in cui viene citata anche la proposizione sull'area del segmento parabolico)<sup>39</sup>. A proposito di questo il matematico alessandrino fa notare come questo solido è particolarmente interessante nella pratica, poiché nelle costruzioni delle fontane o dei bagni dalla sua epoca s'incontra molto spesso un solido formato da due cilindri che si intersecano ad angolo retto.

Questa particolare costruzione architettonica è oggi propriamente detta **volta a crociera**.

---

<sup>39</sup> Rufini E., ., Il "metodo" di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell'antichità, Casa editrice di Alberto Stock, Roma, 1926, p. 186.



Esempio di volta a crociera in muratura      Volta a crociera in Assonometria Cavaliera frontale

La volta a crociera è formata da due semicilindri che hanno come proprie sezioni normali (dette anche sezioni rette) due semicirconferenze congruenti, e hanno, anche, come propri assi due rette tra loro incidenti. In particolare, l'intersezione tra tali semicilindri è formata da due semiellissi tra loro congruenti.

Rufini fa notare come sia il teorema sull'unghia cilindrica che questo sull'intersezione dei cilindri, fossero conosciuti anche da matematici del XVI secolo, sebbene l'opera di Archimede e di Erone fosse rimasta ignorata fino agli inizi del nostro secolo. Il pittore di Borgo Sansepolcro **Piero della Francesca** (1420 – 1492) nell'opera *De Corporibus regularibus*, composta poco prima della sua morte, tratta di problemi che hanno “evidenti relazioni con quelli trattati da Archimede”<sup>40</sup>.

**Luca Pacioli** si servì dell'opera di Della Francesca per redigere il suo trattato sui cinque corpi regolari stampato in appendice alla *Divina Proportione* (opera nella quale elogia la sezione aurea), in cui si trovano gli enunciati di due problemi riconducibili a quelli archimedei. Ecco la traduzione di Pacioli riportata da Rufini<sup>41</sup>:

<sup>40</sup> Rufini E., *Il “metodo” di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell'antichità*, Casa editrice di Alberto Stock, Roma, 1926, p. 186.

<sup>41</sup> Rufini E., *Il “metodo” di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell'antichità*, Casa editrice di Alberto Stock, Roma, 1926, pp. 186-187.

*“Egli è una colonna tonda a sesto che il diametro suo è 4, cioè de ciascuna sua basa, ed un'altra colonna de simile grossezza la fora hortogonalmente; domandase che quantità se leva de la prima colonna per quella foratura, cioè che quantità se leva de la colonna per quello buso” (Tract. Tertius, casus 10; nell'opera del Della Francesca, Tract. Quartus, prop. X).*

*“Egli è una volta a cruciera et per ciascuna faccia 8, et è alta 4, così come nel colmo degli archi commo mezzo della volta; domandase de la sua superficie concava” (Tract. Tertius, casus II; nell'opera del Della Francesca, Tract. Quartus, prop. XI).*

Le soluzioni a questi problemi sono esatte; le dimostrazioni invece con cui si cerca di giustificare i risultati, involute e inesatte.

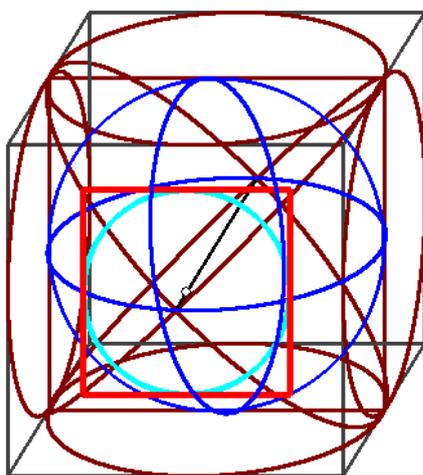
## NUOVA SOLUZIONE E ALCUNE CONSIDERAZIONI

Per semplificare la dimostrazione precedente facciamo uso, in primo luogo della dinamicità del Cabri Géomètre e in secondo luogo di proporzioni tra figure già note.

**$I^3$  = Intersezione dei cilindri**

**$C^3$  = Sfera**       **$C^2$  = Cerchio**

**$Q^3$  = Cubo**       **$Q^2$  = Quadrato**



$$\text{Teorema. } \frac{\text{Volume } I^3}{\text{Volume } Q^3} = \frac{2}{3}$$

Si prenda il cubo e i due cilindri retti inscritti in esso come descritto nella Proposizione XV, e si noti che all'interno del **solido  $I^3$**  (= Intersezione dei cilindri) si può inscrivere una **sfera**. Questa sfera, avrà il raggio uguale a quello dei cilindri, e sarà posizionata come in Fig. 4.22.

Si consideri un piano parallelo ad una faccia del cubo. Questo piano seziona la **sfera** nel **cerchio celeste** e il **solido  $I^3$**  nel **quadrato rosso** (Fig. 4.22).

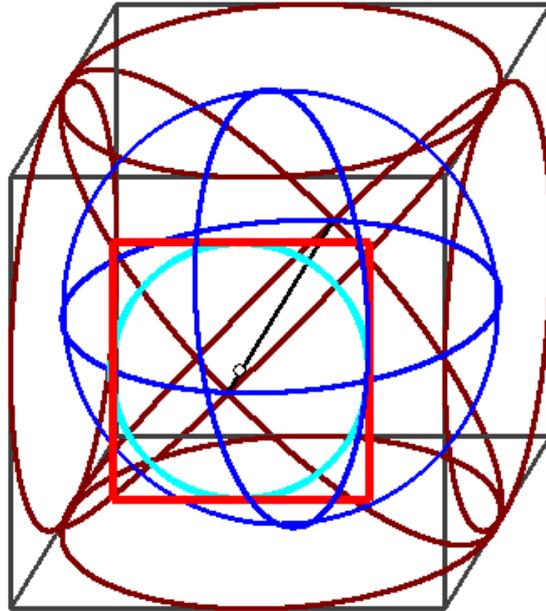


Fig. 4.22

Al variare del punto “cerchiato” sul segmento nero,

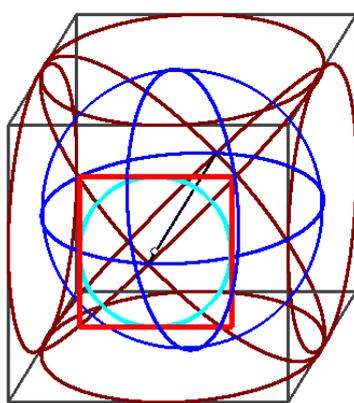


Fig. 4.22 (a)

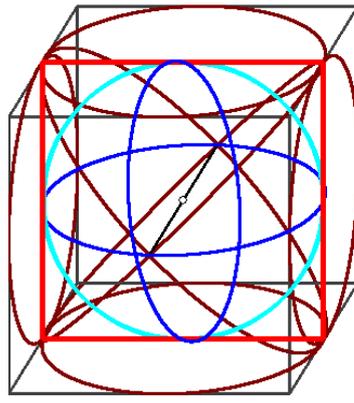


Fig. 4.22 (b)

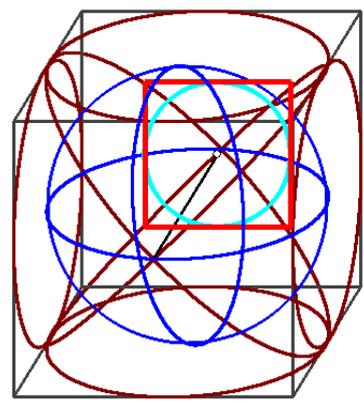


Fig. 4.22 (c)

il **cerchio** descriverà la **sfera** e il **quadrato** il **solido I<sup>3</sup>**.  
 Risulta chiaro allora che il rapporto che sussiste tra la **sfera** e  
 il **solido I<sup>3</sup>** è lo stesso di quello che lega il **cerchio** e il  
**quadrato**.

Cioè,

$$\frac{V_{\text{Solido I}^3}}{V_{\text{Sfera}}} = \frac{A_{\text{Quadrato}}}{A_{\text{Cerchio}}} = \frac{4}{\pi} .$$

Si identifica con  $Q^3$  il cubo,  $Q^2$  il quadrato,  $C^3$  la sfera e  $C^2$  il cerchio, in modo da ottenere in pochi passaggi il risultato voluto.

$$\frac{\text{Volume } I^3}{\text{Volume } Q^3} = \frac{\frac{I^3}{C^3}}{\frac{Q^3}{C^3}} = \frac{Q^2}{Q^3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

A questo punto seguono alcune osservazioni derivanti dai risultati già ottenuti.

Si noti che all'interno del solido  $I^3$ , si riesce a distinguere un' **unghia**.

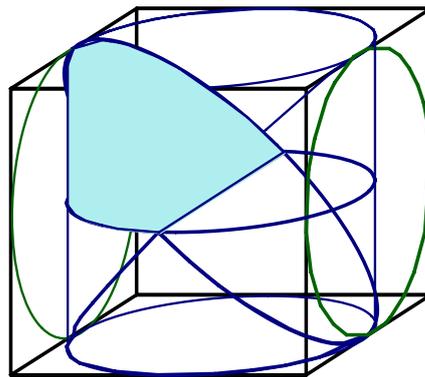
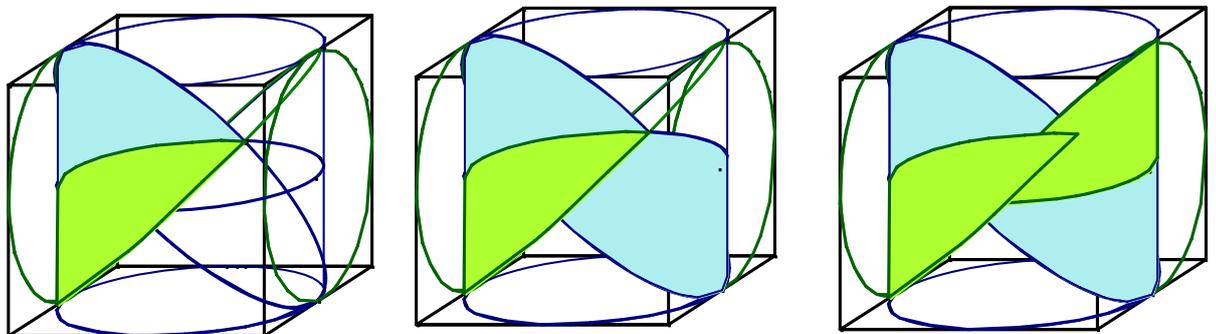
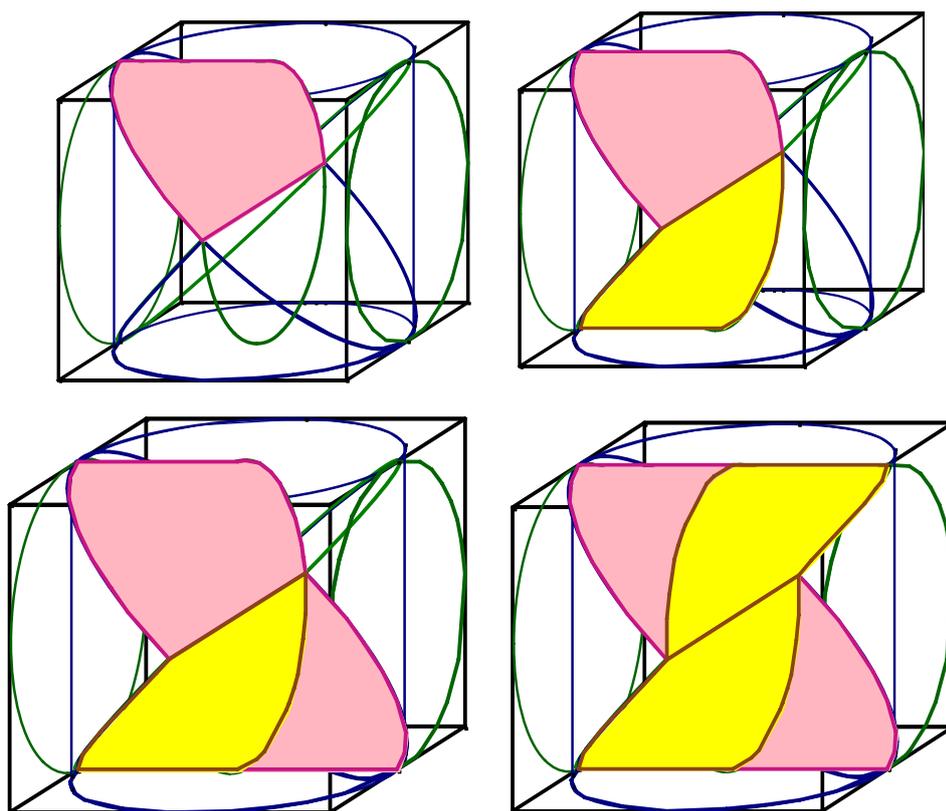


Fig. 4.23

Ma facendo ancora più attenzione se ne riescono ad individuare 8:





⇒ **Intersezione cilindri = 8 Unghie.**

E visto che il “portagrissini” è formato da 2 unghie, possiamo anche dire che:

**Intersezione cilindri = 4 “Portagrissini”.**

In formule, si ha che, essendo il lato del cubo il doppio del raggio di base del cilindro:

$$\text{Volume } \mathbf{Cubo} = 8 R^3,$$

essendo poi

$$\text{Volume } \mathbf{Unghia} = \frac{2}{3} R^3,$$

*(in questo caso l'altezza dell'unghia coincide con mezzo lato del cubo, cioè R)*

ne segue che

$$\text{Volume } \mathbf{Intersezione\ cilindri} = \frac{16}{3} R^3.$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \text{Volume } \mathbf{Intersezione\ cilindri} &= \frac{16}{3} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3 = \\ &= \frac{2}{3} l^3 = \frac{2}{3} \text{ Volume } \mathbf{Cubo}. \end{aligned}$$

## § 4.2 DA “SULLE SPIRALI”

Il trattato “*Sulle Spirali*” fu molto ammirato ma poco letto, poiché veniva considerato come una fra le opere di Archimede più difficili.

È datato intorno al 250 a.C. e si pensa essere successivo ai due libri “*Sulla sfera e sul cilindro*”. La lettera introduttiva a **Dositeo di Pelusio**, matematico e astronomo greco, allievo di Conone di Samo, corrispondente di Archimede dopo la morte di quest’ultimo, da conferma di ciò. In essa Archimede fa cenno ad alcuni problemi<sup>42</sup> sottoposti all’attenzione di Conone e dei matematici alessandrini a cui però non aveva fatto seguire nessuna dimostrazione e ritardò a lungo l’invio di queste ad Alessandria.

*“Archimede a Dositeo salute.*

*Dei teoremi già inviati a Conone, e dei quali sempre mi richiedi di scrivere le dimostrazioni, hai la maggior parte di queste, scritte nei libri che ti ha portato Eraclide: alcune [altre] di esse te le mando scritte in questo libro. Non meravigliarti se gran tempo ho lasciato trascorrere prima di inviarti le dimostrazioni: infatti è accaduto che io ho voluto prima presentarle agli studiosi di matematica, che preferivano ricercare essi stessi [le dimostrazioni]. Infatti, quanti teoremi di geometria che non apparivano facili in principio sono stati poi portati a compimento?”<sup>43</sup>.*

L’invio di questo libro a Dositeo era mirato a fornire ai matematici di Alessandria le dimostrazioni di un problema che aveva sottoposto al loro esame in precedenza.

Questo problema, come dice Archimede, riguardava tutt’altro

---

<sup>42</sup> Ad esempio, dato un cono o un cilindro, trovare una sfera uguale al cono o al cilindro, o tagliare una sfera in modo che i segmenti ottenuti abbiano un rapporto dato, o ancora problemi riguardanti solidi generati dalla rotazione delle sezioni coniche.

<sup>43</sup> Dalla lettera di Archimede a Dositeo, Frajese A., *Opere di Archimede*, UTET, Torino, 1974, p. 317.

genere di questioni, e “*non aveva niente in comune*” con quelli prima accennati: si trattava di studiare una curva nuova, la spirale.

*“[...]Dopo di questi sulla spirale erano stati proposti i seguenti: essi sono d’altro genere e non hanno nulla in comune con quelli prima detti: e di essi ti abbiamo scritto le dimostrazioni in questo libro. Essi sono questi: se una linea retta, rimanendo [fermo] un estremo, vien fatta rotare nel piano con velocità costante fino a farla tornare di nuovo nella posizione dalla quale è partita, e insieme con la retta rotante viene mosso un punto sulla retta con velocità costante cominciando dall’estremo fisso, il punto descrive nel piano una spirale. Dico quindi che l’area compresa tra la spirale e la retta che è tornata nella posizione dalla quale si è mossa, è la terza parte del cerchio descritto con centro nel punto fisso e con raggio che è la retta percorsa dal punto in una sola rotazione della retta (Spir., 24).*

*E se una retta è tangente ad una spirale nell’ultimo suo termine, e se dal termine fisso [= principio] della spirale si traccia una retta perpendicolare alla retta rotata e ricondotta nella posizione [iniziale] [= retta principio della rotazione] in modo che incontri la tangente, dico che la retta condotta [alla tangente] è uguale alla circonferenza del cerchio (Spir., 18). E se la retta che ruota e il punto che si muove su di essa vengon fatti rotare per più giri e ricondotta [la retta] di nuovo in posizione iniziale, dico che l’area descritta nella terza rotazione è doppia dell’area descritta nella seconda rotazione dalla spirale, l’[area descritta] nella quarta [rotazione è] tripla [dell’area descritta nella seconda], quella [descritta] nella quinta [rotazione] è quadrupla [dell’area descritta nella seconda], e sempre le aree descritte nelle successive rotazioni sono multiple dell’area descritta nella seconda rotazione secondo i successivi numeri [interi], mentre l’area descritta nella prima rotazione è la sesta parte di quella descritta nella seconda*

*rotazione (Spir., 27). E se sulla spirale descritta in una sola rotazione si prendono due punti, e da essi si conducono rette al termine fisso della linea descritta [= al principio della spirale] e si prolunga la retta minore, dico che l'area compresa da quell'arco del cerchio maggiore che è dalla stessa parte della spirale tra le rette, dalla spirale e dalla retta prolungata, rispetto all'area compresa dall'arco del cerchio minore, dalla stessa spirale e dalla retta congiungente i loro termini, ha lo stesso rapporto che il raggio del cerchio minore più due terzi dell'eccesso di cui il raggio del cerchio maggiore supera il raggio del cerchio minore ha rispetto al raggio del cerchio minore più un terzo dell'eccesso suddetto.*

*Di queste e di altre [preposizioni] sulle spirali vengono scritte da me le dimostrazioni in questo libro; e vengono premesse come per gli altri [libri] geometrici le cose che son necessarie per la loro dimostrazione. [...]"<sup>44</sup>*

---

<sup>44</sup> Dalla lettera di Archimede a Dositteo, Frajese A., *Opere di Archimede*, UTET, Torino, 1974, pp. 319-321.

## 4.2.1

### LA SPIRALE DI ARCHIMEDE

Le *Spirali* sono un'opera assai singolare. Questo lavoro, oltre a fornire 28 proposizioni contiene anche 7 definizioni tra la proposizione 12 e la proposizione 13. Fondamentale è la definizione di Spirale:

Definizione I. *Se si traccia nel piano una linea retta, ed essa, fermo restando uno dei suoi estremi, vien fatta rotare con velocità costante quante volte si vuole, e se al tempo stesso sulla linea rotante si trasporta un punto con moto uniforme cominciando dall'estremo che resta fermo, il punto descriverà nel piano una spirale*".<sup>45</sup>

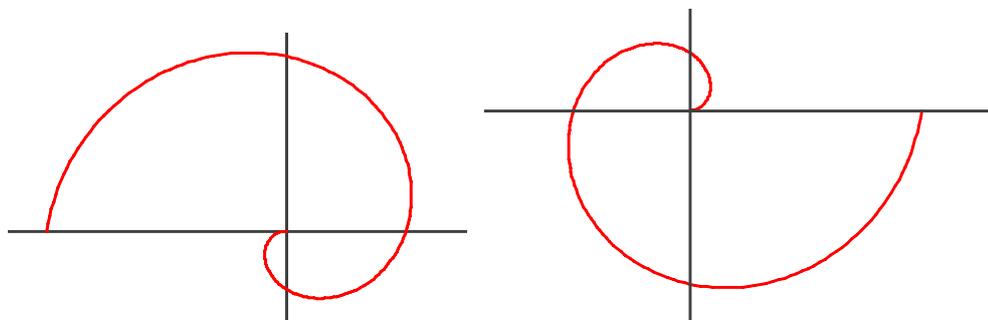


Fig. 4.24

Lo studio che Archimede fece della spirale si inquadrava nella scia delle ricerche, tipiche della matematica greca, volte a trovare le soluzioni dei tre famosi problemi classici (duplicazione del cubo, trisezione di un angolo, quadratura del cerchio). Infatti, la curva si presta facilmente a effettuare molteplici sezioni dell'angolo, ma può anche servire a quadrare il cerchio.

Altri due risultati molto interessanti riguardo a questa curva sono i seguenti. Il primo riguarda la tangente alla spirale nel punto finale del primo giro:

<sup>45</sup> Frajese A., *Opere di Archimede*, UTET, Torino, 1974, p. 345.

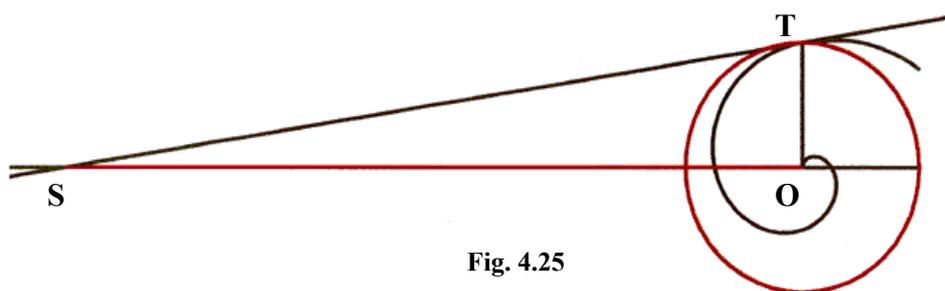


Fig. 4.25

si immagini che la retta ruotante abbia compiuto una sola rotazione completa, e si prenda la tangente alla spirale nel punto finale T. Dal centro di rotazione O si tracci la perpendicolare al raggio del cerchio. La parte di perpendicolare compresa fra il centro di rotazione O e il punto di intersezione S, della perpendicolare con la tangente, è uguale alla **circonferenza del “primo cerchio”**, ovvero il cerchio che ha come raggio il segmento OT (Proposizione 18). Il secondo risultato stabilisce che:

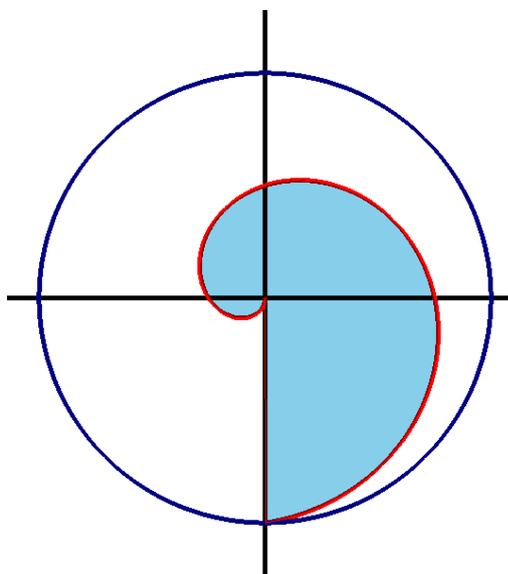


Fig. 4.26

la **superficie azzurra**, compresa fra la prima rotazione della spirale e la retta ruotante e uguale a  $\frac{1}{3}$  del **primo cerchio** (Proposizione 24).

Le verifiche di questi risultati avvengono mediante dimostrazioni per duplice *reductio ad absurdum*, senza specificare il modo in cui

Archimede li possa aver concepiti.

Nonostante ciò, quest'opera esercitò un grande fascino su studiosi del calibro di **François Viete** (1540-1603) e **Galileo**, che si riferì ad essa come a *le meravigliose Spirali di Archimede*.

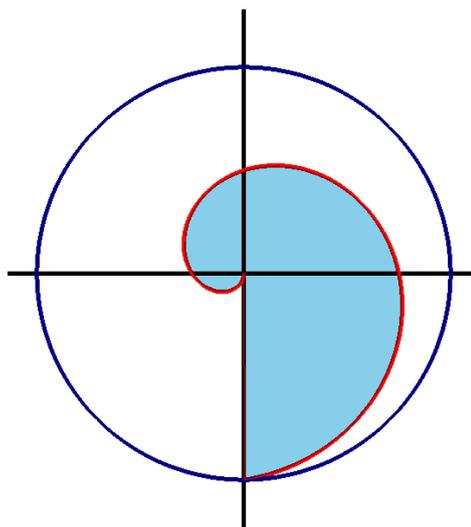
“Oltre che dai risultati ottenuti da Archimede, Galileo era colpito dalla commistione di argomenti cinematici e geometrici. In effetti le prime due proposizioni delle *Spirali* trattano appunto del moto uniforme: la prima dimostra che *gli spazi percorsi da un punto che si muove di moto uniforme* (che percorre cioè spazi uguali in tempi uguali) *stanno fra loro come i tempi di percorrenza*; la seconda che *gli spazi percorsi in tempi uguali da due punti che si muovono di moto uniforme sono fra loro proporzionali*. Queste due proposizioni di Archimede sono uno dei primissimi tentativi di costruire un modello matematico per la descrizione del movimento. La dimostrazione è infatti inquadrata nello schema teorico della teoria delle proporzioni, applicata qui non a grandezze geometriche, ma a spazi e a tempi. E per Galileo, la cui ricerca gravitò quasi interamente intorno al problema della costruzione di un modello geometrico del moto, l'esempio di Archimede costituì un punto di riferimento fondamentale.”<sup>46</sup>

---

<sup>46</sup> Napolitani P. D., “Le scienze”, *Archimede*, Ottobre 2001, anno IV, n° 22, p. 40.

## L'AREA DELLA SPIRALE DETERMINATA DA ARCHIMEDE

Il risultato di cui ci occuperemo e di cui vogliamo proporre una dimostrazione più semplice è proprio quello già accennato sull'area della spirale.



**Proposizione XXIV di Sulle Spirali.** *La superficie compresa dalla spirale descritta nella prima rotazione e dal primo segmento sulla [retta] principio della rotazione è la terza parte del primo cerchio.*

La dimostrazione di Archimede viene eseguita con il metodo di esaustione, l'uso del quale presuppone che già si conosca il risultato da dimostrare.

Archimede considera un cerchio Z che abbia area uguale ad  $\frac{1}{3}$  del primo cerchio, cioè quello che passa per il centro di rotazione e che è tangente alla spirale nel punto finale del primo giro.

Si tratterà dunque di dimostrare che l'area della spirale è uguale all'area del cerchio Z. Si prosegue quindi con le rispettive prove del fatto che la spirale non possa avere area né minore né maggiore di quella di Z, giungendo così alla conferma del risultato.

In questa proposizione vengono applicate due proprietà esposte in corollari dimostrati precedentemente da Archimede: il primo riguarda la possibilità di costruire una figura circoscritta alla spirale tale che pur essendo maggiore di essa, risulti minore di Z (Corollario alla

Proposizione XXI)<sup>47</sup>; il secondo è il corollario della proposizione 10 sulla somma dei quadrati dei numeri interi<sup>48</sup>:

$$n \cdot A_n^2 < 3 \cdot (A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2) \quad e \quad n \cdot A_n^2 > 3 \cdot (A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_{n-1}^2).$$

Questa proposizione e l'annesso corollario presentano un'interminabile dimostrazione, ne proponiamo una più semplice in **APPENDICE 1**.

Quello che si può notare leggendo le pagine che contengono la dimostrazione archimedeica è il fatto che questa prova è molto lunga complessa e articolata, ma soprattutto priva della sua tipica ingegnosità. Si potrebbe dire che è una semplice verifica del risultato ottenuto sicuramente per altre vie.

Proponiamo una diversa dimostrazione di questo risultato basandoci prevalentemente sul movimento, e utilizzando una nuova trasformazione resa possibile dalle peculiarità del Cabri.

---

<sup>47</sup> PROPOSIZIONE XXI. *Considerata la superficie compresa tra la spirale descritta nella prima rotazione e il primo segmento sulla [retta] origine della rotazione, è possibile circoscrivere alla stessa una figura piana, ed inscrivere un'altra, composta da settori simili, in modo che la figura circoscritta superi quella inscritta di una superficie minore di una qualunque superficie data.*

COROLLARIO. *Di qui è manifesto che è possibile intorno all'area suddetta disegnare la figura, nel modo sopra detto, in modo che la figura circoscritta superi l'area [considerata] di una differenza minore di una superficie comunque data, e ancora inscrivere [un'altra] tale che l'area [considerata] superi la figura inscritta per meno di una superficie comunque data.*

<sup>48</sup> La dimostrazione di questo risultato si trova in *Su conoidi e sferoidi*: Corollario 1 del Lemma della Proposizione 2.

## LE “RADIALITÀ”

Inizialmente descriviamo con qualche esempio cosa succede durante una “radialità”. Si prendano due striscioline che ruotano in modo tale da sovrapporsi “parzialmente” l’una sull’altra come in Fig.4.27 (b).

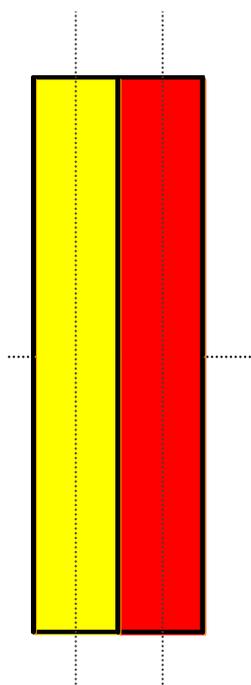


Fig. 4.27 (a)

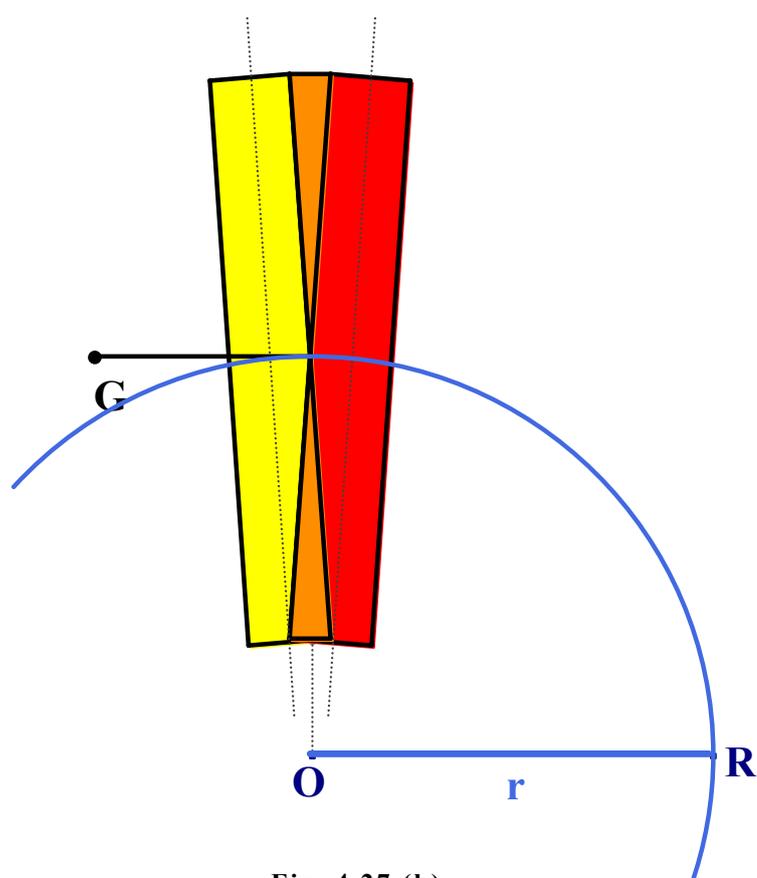


Fig. 4.27 (b)

Proprio da questa figura si vede che la **superficie triangolare arancione** che lasciano scoperta è uguale a quella in cui si sovrappongono, ciò vuol dire che nella trasformazione l’area non varia.

Si prenda successivamente un rettangolo diviso in un numero maggiore di striscioline (Fig. 4.28 (a)),

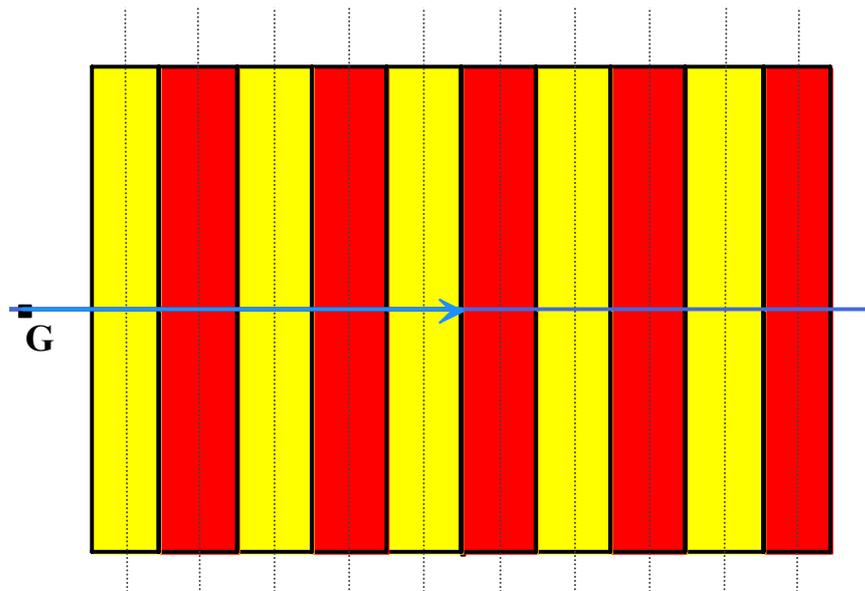


Fig. 4.28 (a)

e si “avvolga” il segmento che contiene il baricentro  $G$  del rettangolo attorno alla **circonferenza celeste** di raggio  $r$ , in modo che tutte le striscioline prima perpendicolari alla retta siano ora perpendicolari alla **circonferenza celeste** (Fig. 4.28 (b)).

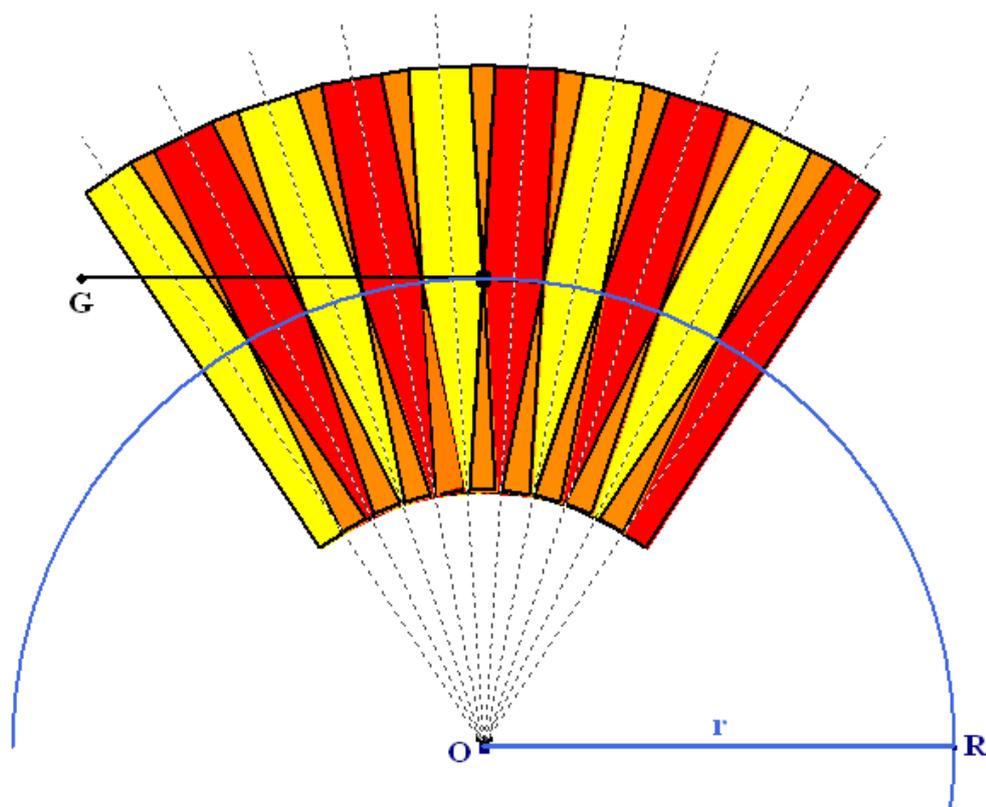


Fig. 4.28 (b)

L'area non varia. In più, visto che l'“aumento” e la “diminuzione” si compensano, anche la lunghezza totale delle parti curve deve essere uguale a quella dei lati del rettangolo di partenza. Questo accade perché stiamo avvolgendo attorno alla retta che contiene il baricentro. Ma se spostassimo il rettangolo portando il suo baricentro ad esempio più su rispetto alla **linea** in cui vogliamo avvolgerlo (Fig. 4.29 (a)):

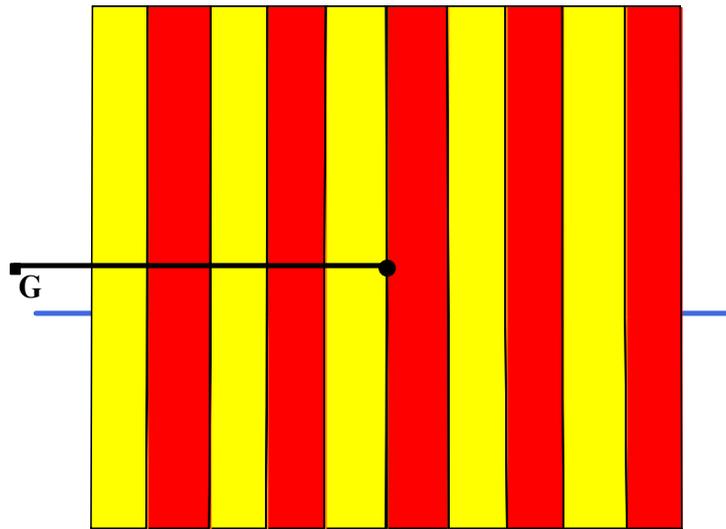


Fig. 4.29 (a)

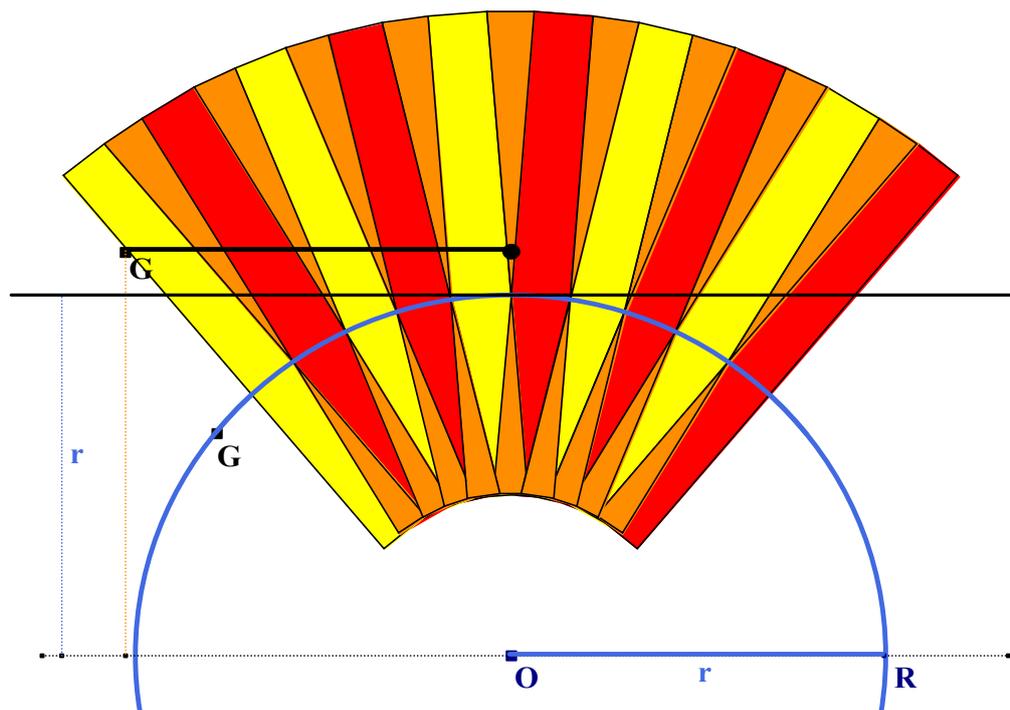


Fig. 4.29 (b)

quello che accade è che le superfici che vengono lasciate scoperte hanno area maggiore rispetto a quelle in cui le striscioline si sovrappongono (Fig. 4.29 (b)).

Un altro esempio può essere quello di avvolgere un particolare rettangolo (Fig. 4.30 (a)),

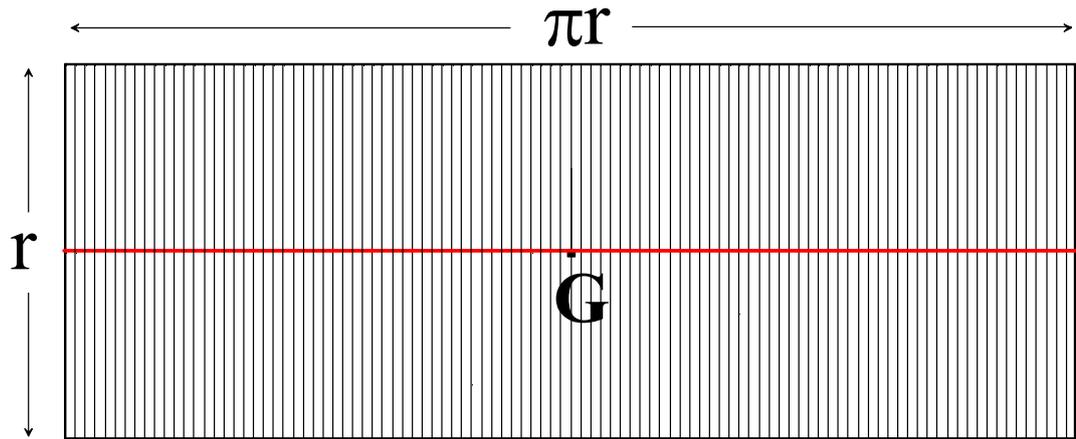


Fig. 4.30 (a)

di base  $\pi r$  e altezza  $r$ , cioè di area  $\pi r^2$ , intorno ad una **linea orizzontale** che passa per il baricentro  $G$  del rettangolo.

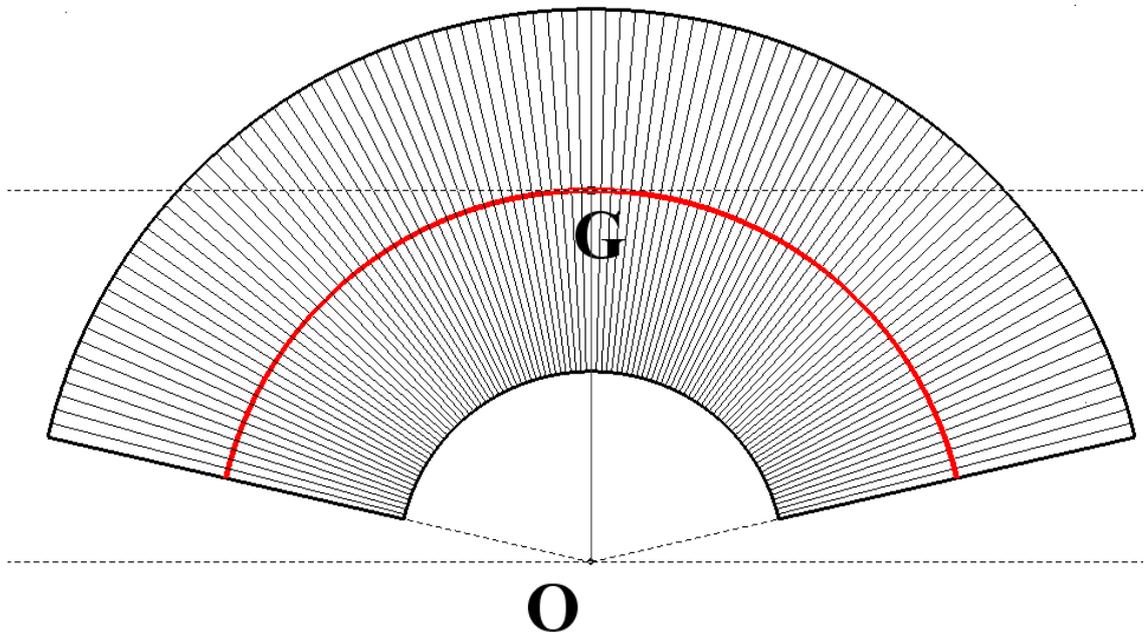


Fig. 4.30 (b)

Quando il raggio del **cerchio** di avvolgimento diventa uguale a  $\frac{r}{2}$ , il rettangolo si trasforma in un cerchio di raggio  $r$  (Fig. 4.30 (c)). L'area iniziale non si è modificata. Riusciamo così a calcolare l'area del cerchio attraverso una radialità.

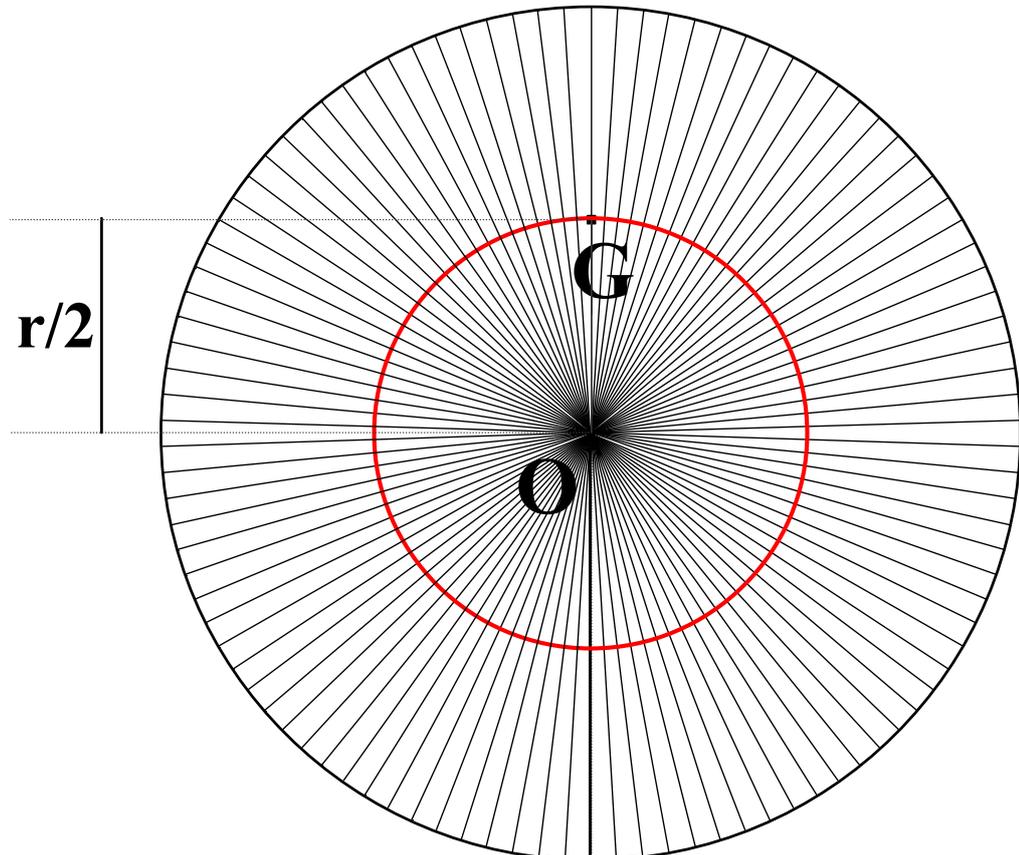


Fig. 4.30 (c)

Infine, si nota che dopo la trasformazione il lato inferiore del rettangolo, di lunghezza iniziale  $\pi r$  si è ridotto ad un punto, corrispondente al centro del cerchio **O**, e il lato superiore del rettangolo si è trasformato nel perimetro del cerchio, cioè  $2\pi r$ , che è anche il totale delle lunghezze delle linee orizzontali del rettangolo. Quindi si può confermare che anche la lunghezza totale delle parti curve viene ad essere uguale a quella dei lati del rettangolo di partenza.

Seguono altri esempi di superfici che dopo l'avvolgimento mantengono l'area iniziale.

Si consideri un rombo nel solito rettangolo e si avvolga la **linea centrale orizzontale** attorno ad un cerchio di raggio  $\frac{r}{2}$ ,

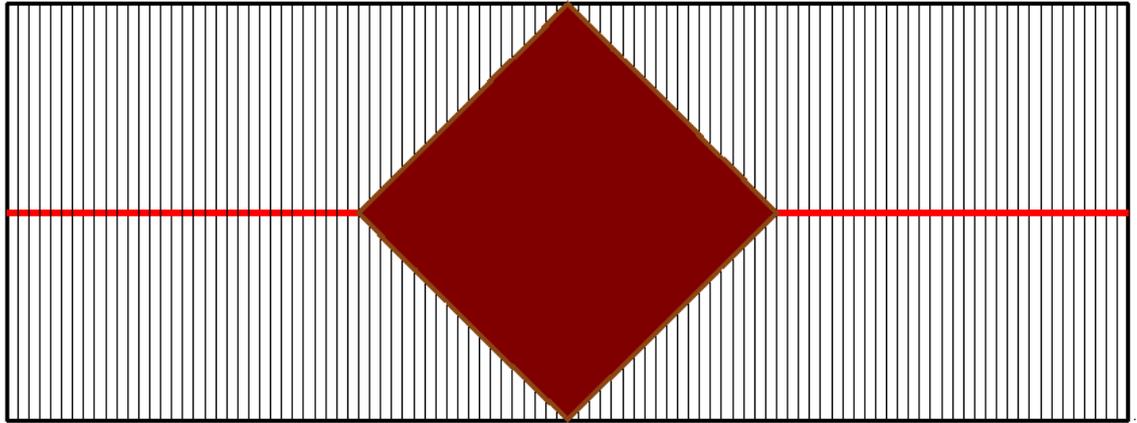


Fig. 4.31 (a)

ottenendo uno **scudo**.

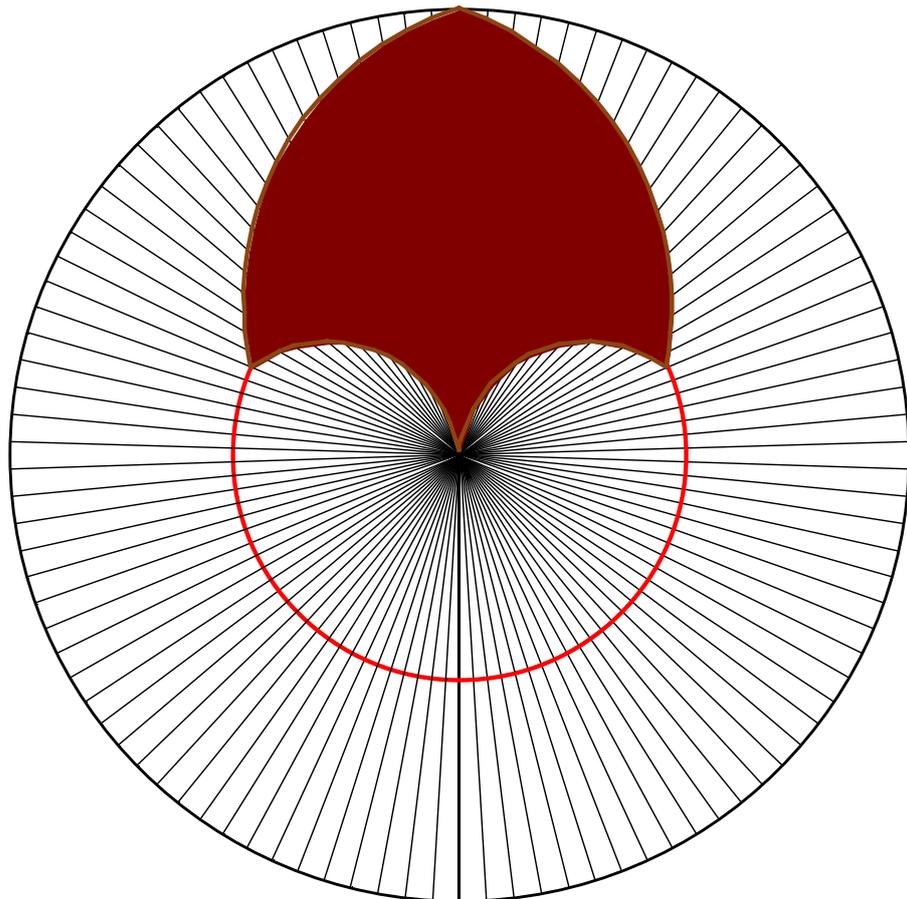


Fig. 4.31 (b)

Dall'avvolgimento radiale di un cerchio attorno alla **linea orizzontale**

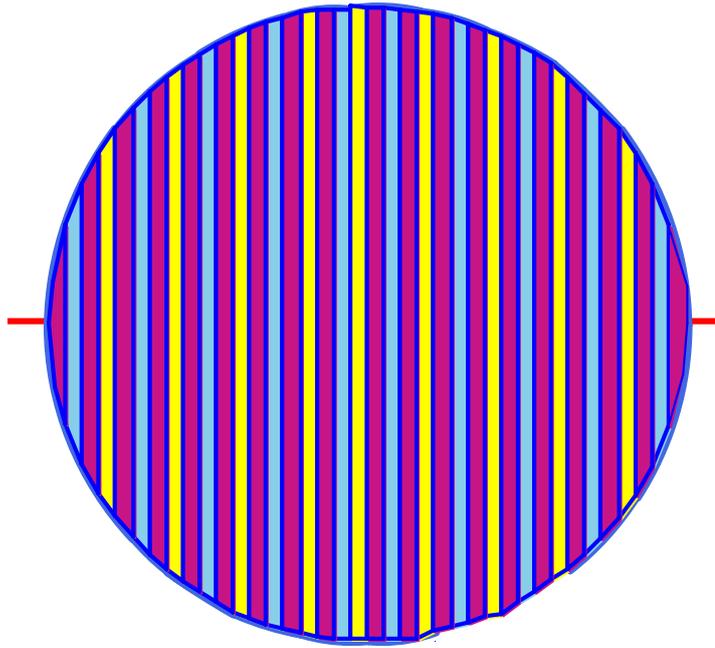


Fig. 4.32 (a)

si ottiene una figura che sembra un **petalo**.

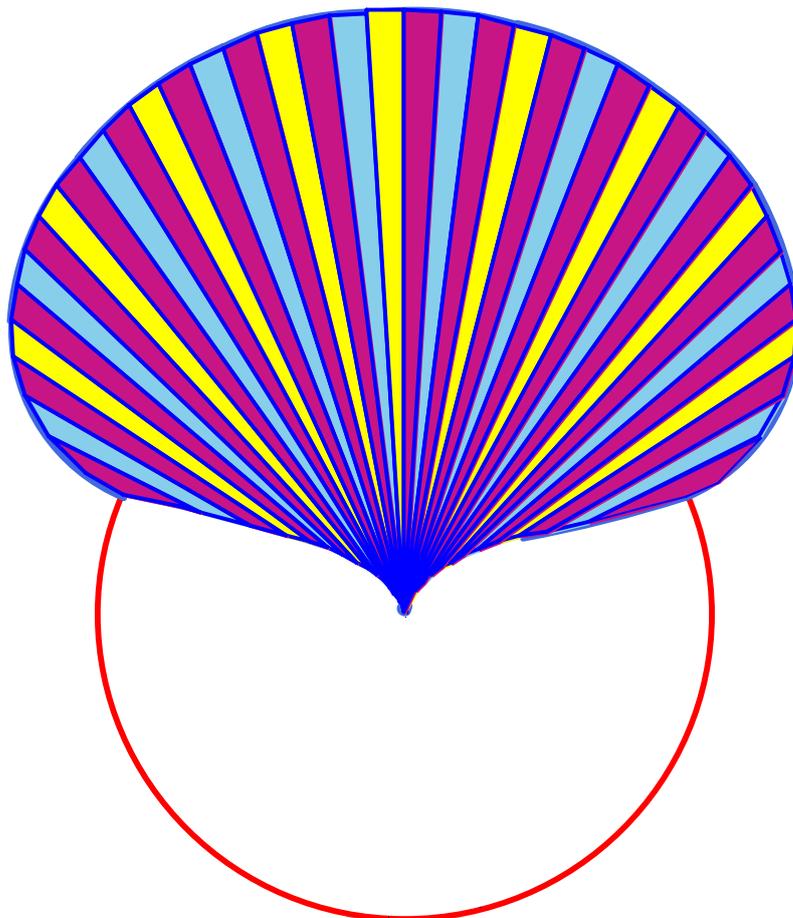


Fig. 4.32 (b)

Si noti che in questa trasformazione l'equazione in coordinate cartesiane del cerchio  $1 - \sqrt{1 - x^2} \leq y(x) \leq 1 + \sqrt{1 - x^2}$ , con  $-1 \leq x \leq 1$ , diviene nel **petalo** in coordinate polari:  $1 - \sqrt{1 - \alpha^2} \leq \rho(\alpha) \leq 1 + \sqrt{1 - \alpha^2}$ , con  $\alpha$  in radianti e  $-1 \leq \alpha \leq 1$ .

Infine mettendo insieme dei petali si possono creare dei fiori, come ad esempio il **trifoglio** (Fig. 4.33) e il **quadrifoglio** (Fig. 4.34).

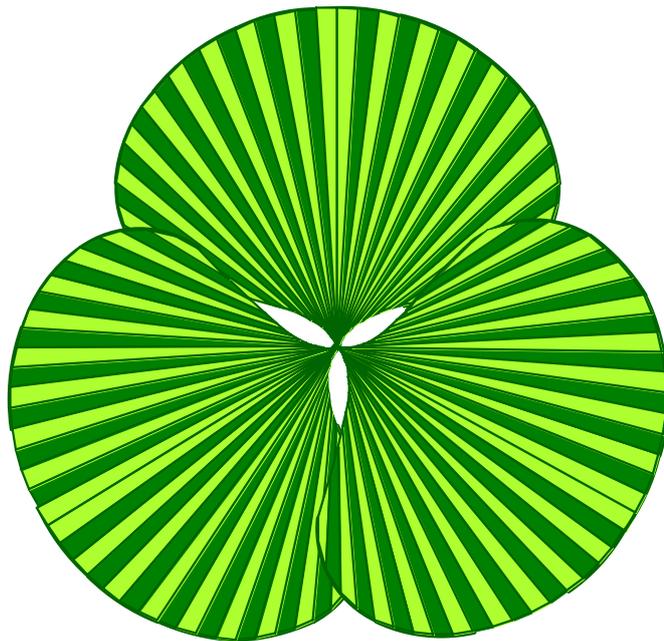


Fig. 4.33

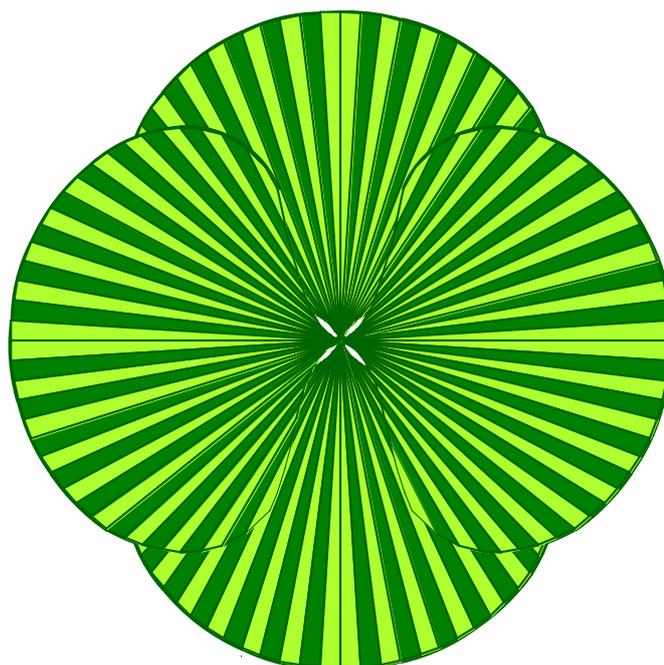


Fig. 4.34

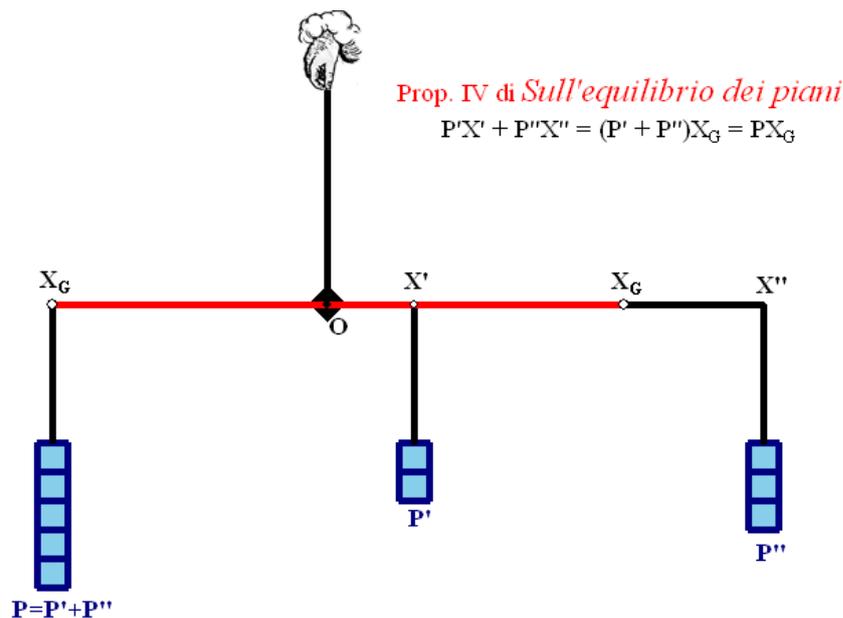
Introduciamo adesso la formula che lega in generale l'area delle due superfici: quella di partenza e quella ottenuta dopo l'avvolgimento.

**TEOREMA**

**In una radialità risulta:**  $A' = A \frac{OG}{OR}$ ,

dove  $A$  è l'area della superficie  $S$  che si vuole avvolgere,  $A'$  è l'area della trasformata radiale di  $S$ ,  $O$  è il centro del cerchio radiale e  $OR$  è il suo raggio, e infine  $G$  è il baricentro di  $S$ .

Per la dimostrazione ci servirà anche una semplice proprietà del baricentro che risale anch'essa ad Archimede<sup>49</sup>:



<sup>49</sup> Sull'equilibrio dei piani, prop. IV: *Se due pesi uguali non hanno lo stesso centro di gravità, il centro di gravità presi entrambi è nel punto medio della linea che unisce i loro centri di gravità.*

La dimostrazione di Archimede è condotta scomponendo i pesi iniziali, ciascuno dotato di un proprio baricentro, in pesi-unità, e allineando questi ultimi lungo la leva in modo che facciano equilibrio col proprio baricentro e poi trovando la risultante della distribuzione rispetto al fulcro della leva.

La vera e propria dimostrazione del teorema costa di pochi passaggi.

Si consideri barca a vela (Fig. 4.35 (a)), che dopo la radialità “sembra” venir gonfiata dal vento (Fig. 4.35 (b))

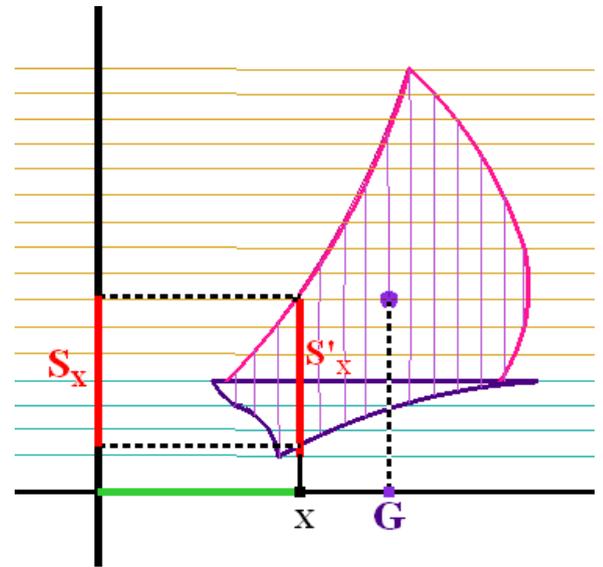


Fig. 4.35 (a)

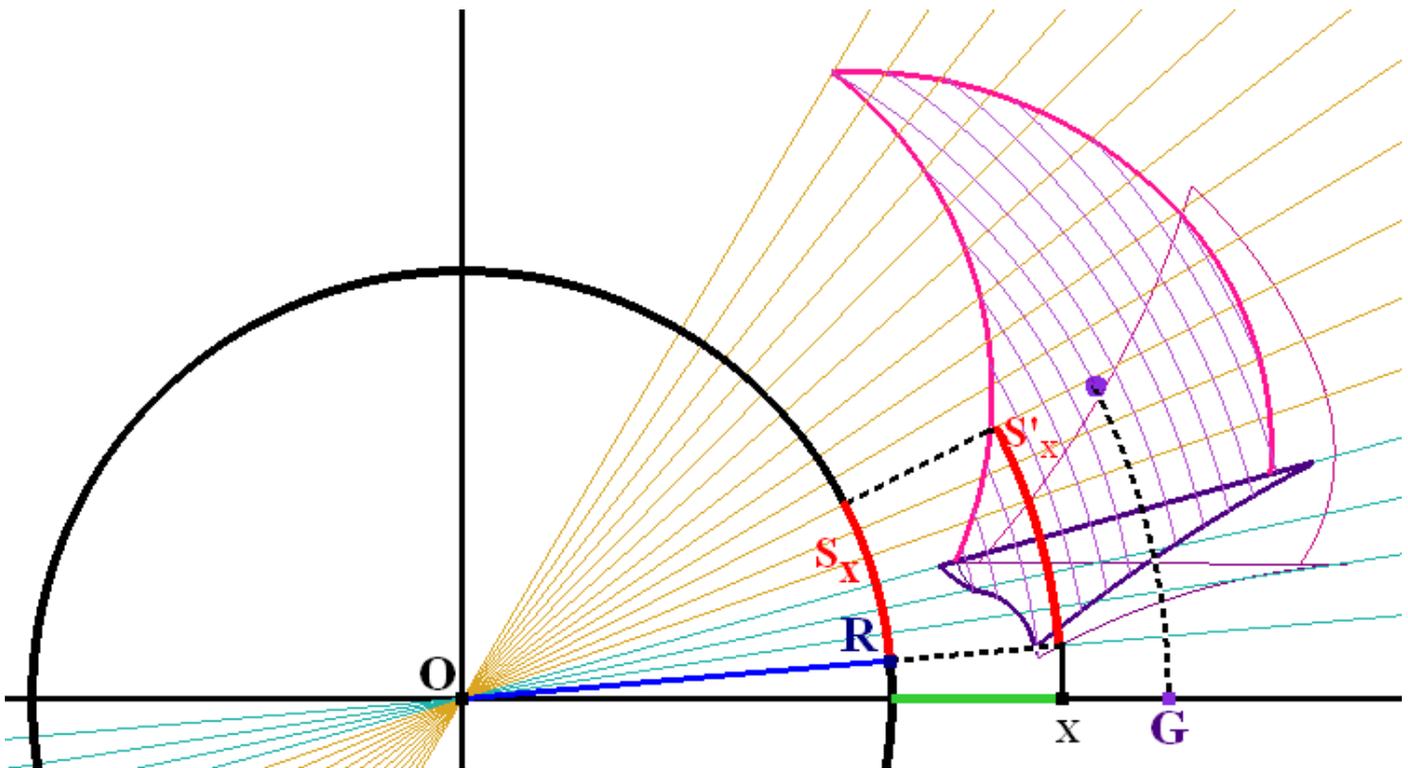


Fig. 4.35 (b)

Dalle figure si vede che:

$$S'_x = \frac{S_x \cdot OX}{OR} = \frac{1}{OR} (OX \cdot S_x),$$

sommando su  $x$  e applicando la proprietà della leva, si conclude

$$A' = \frac{1}{3} \cdot A \cdot \frac{OG}{OR}$$

**AREA DELLA SPIRALE DI ARCHIMEDE**  
(Nuova soluzione)

Attraverso la radialità si dimostra che l'area della parte azzurra di spirale

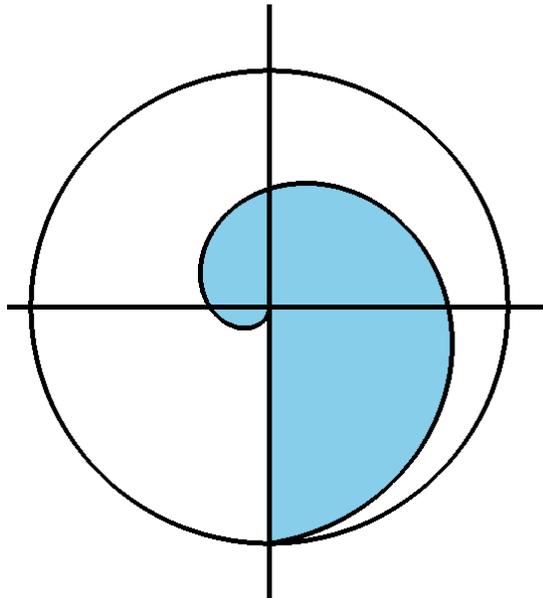


Fig. 4.26

compresa fra la prima rotazione della spirale e la retta ruotante è uguale a  $\frac{1}{3}$  del primo cerchio.

Si consideri il seguente rettangolo (Fig. 4.36 (a)),

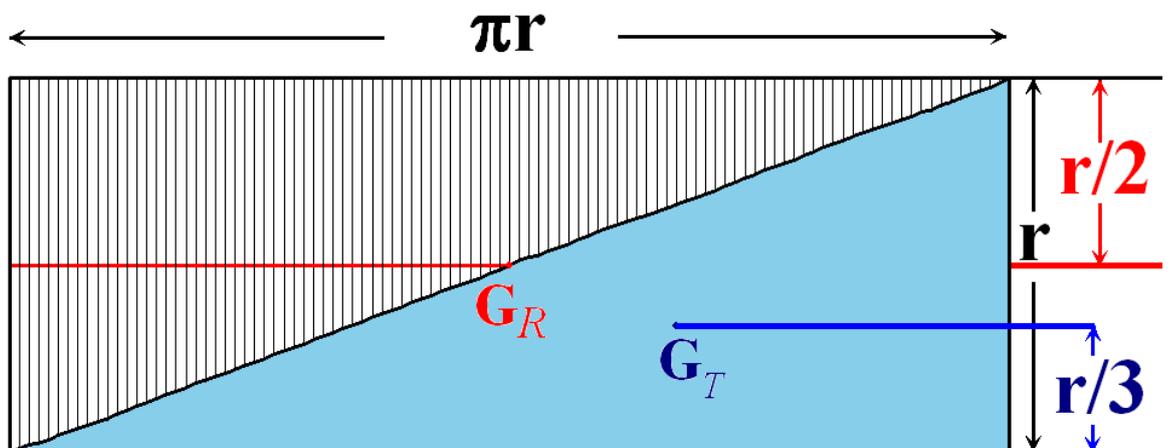


Fig. 4.36 (a)

in cui il baricentro del rettangolo  $G_R$  è a distanza  $\frac{r}{2}$  dalle sue basi e il baricentro  $G_T$  del **triangolo azzurro** (metà del rettangolo) è a distanza  $\frac{r}{3}$  dalla sua base. Si avvolga il rettangolo attorno alla **linea orizzontale centrale** (Fig. 4.36 (a)),

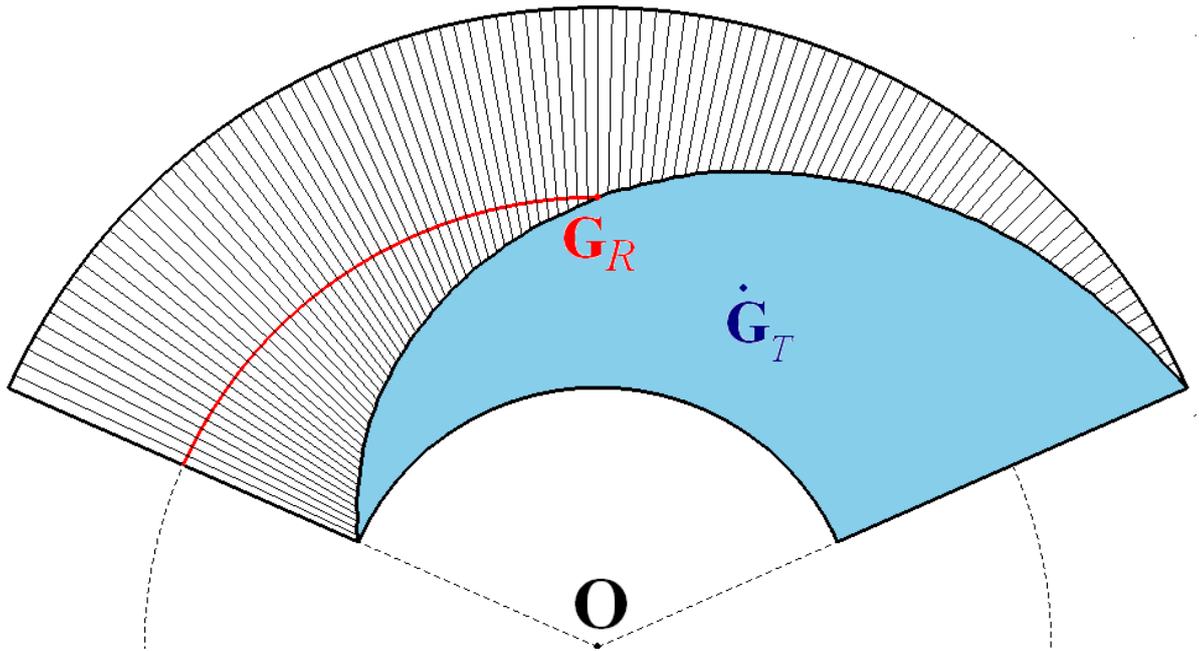


Fig. 4.36 (b)

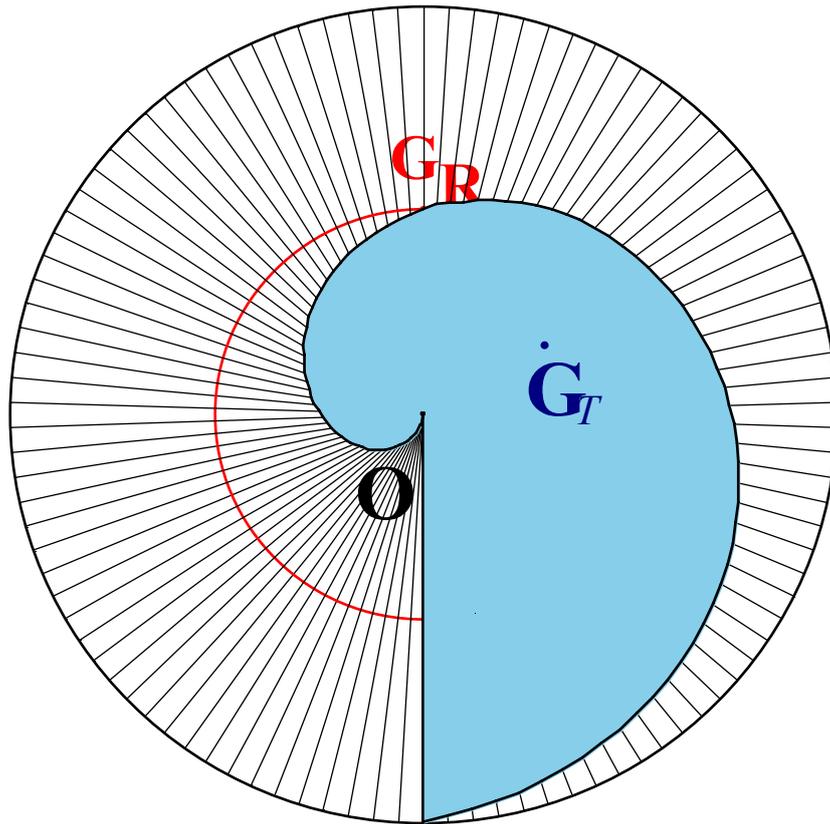


Fig. 4.36 (c)

ottenendo così la parte di spirale di cui vogliamo calcolare l'area.  
 Infine, utilizzando il teorema precedente segue subito che:

$$A_{\tau} = \frac{1}{2} \pi r^2 \quad \text{e} \quad A_{Spirale} = A_{\tau} \cdot \frac{OG_T}{OG_R}$$

dove  $OG_T = \frac{r}{3}$  e  $OG_R = \frac{r}{2}$ .

Quindi,

$$A_{Spirale} = \frac{1}{2} \pi r^2 \cdot \frac{\frac{r}{3}}{\frac{r}{2}} = \frac{\pi r^2}{3} = \frac{1}{3} A_{Cerchio}.$$

## **CALCOLO DI ALTRE AREE**

In generale dopo una trasformazione radiale, per calcolare l'area di una figura basta misurare OG ed OR. In alcuni casi questa misura risulta abbastanza semplice, in altri è necessario individuare la posizione del baricentro. Seguono due esempi.

### **AREA DELL'”ARTIGLIO”**

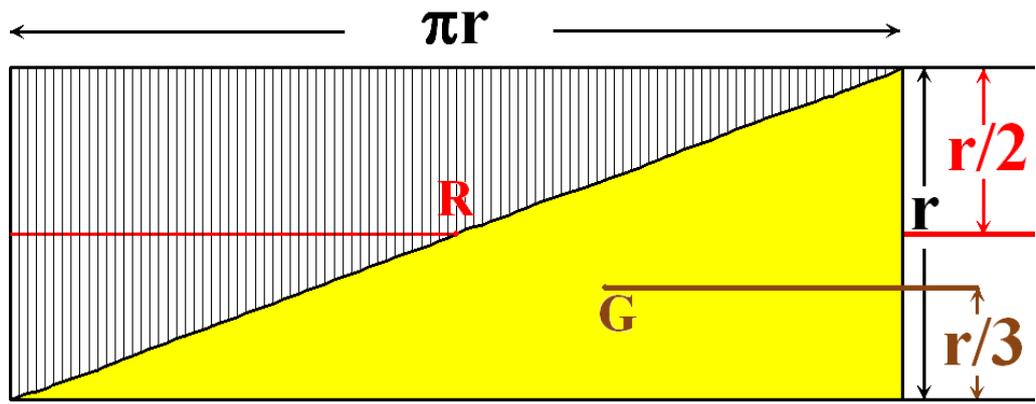


Fig. 4.37 (a)

$$A_{\tau} = \frac{1}{2} \pi r^2$$

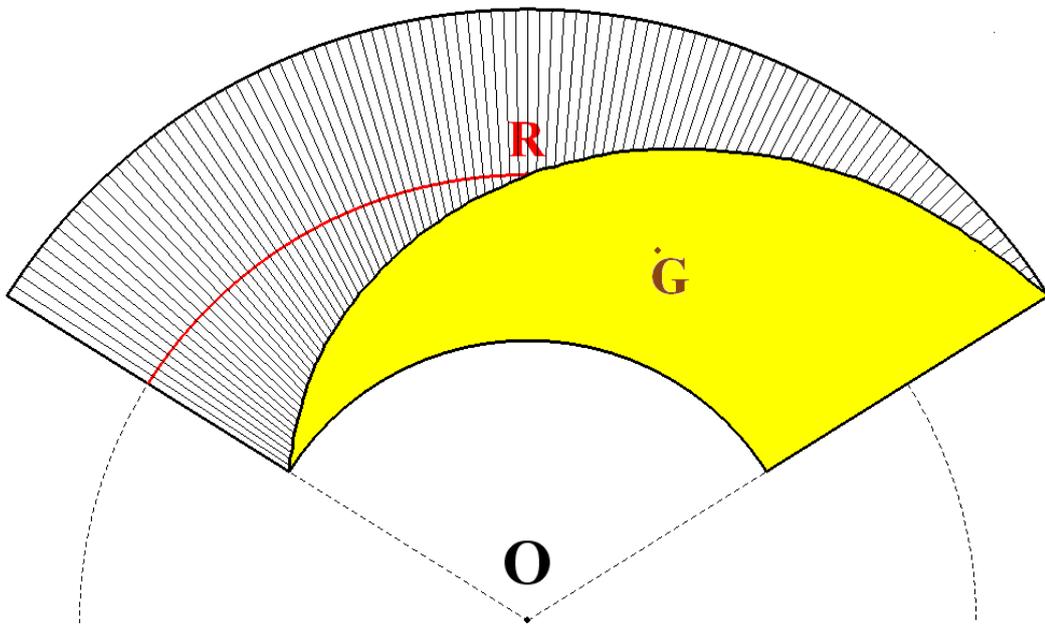


Fig. 4.37 (b)

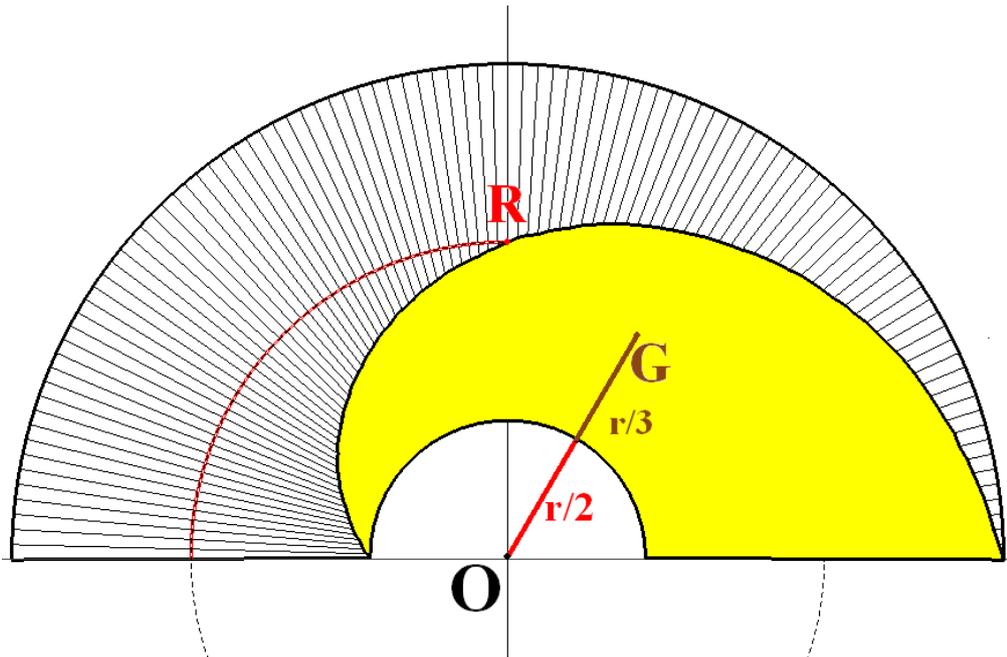


Fig. 4.37 (c)

$$A_{Artiglio} = A_{\tau} \cdot \frac{OG}{OR}$$

dove  $OR = r$  e  $OG = \frac{r}{2} + \frac{r}{3} = \frac{5}{6}r$ .

Quindi, 
$$A_{Artiglio} = \frac{1}{2} \pi r^2 \cdot \frac{\frac{5}{6}r}{r} = \frac{5}{12} \pi r^2 = \frac{5}{12} A_{Cerchio}.$$

## AREA DELLA CARDIOIDE

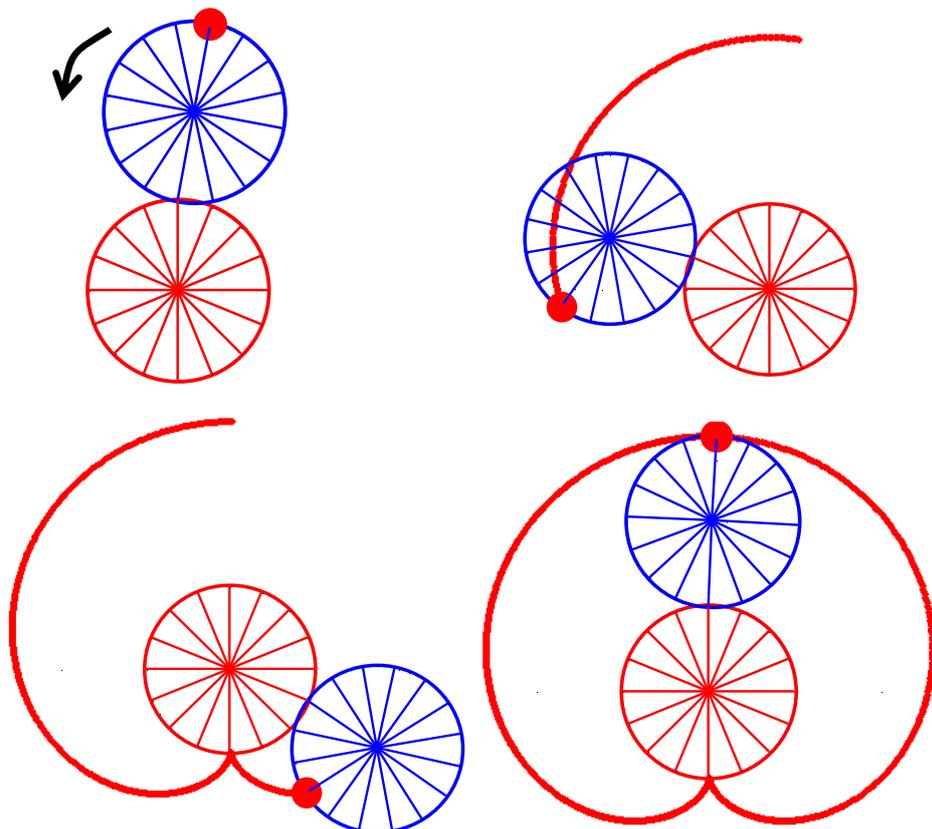
La cardioide è quella curva che tutti possono vedere formarsi all'interno di recipienti conici e cilindrici illuminati dall'alto.



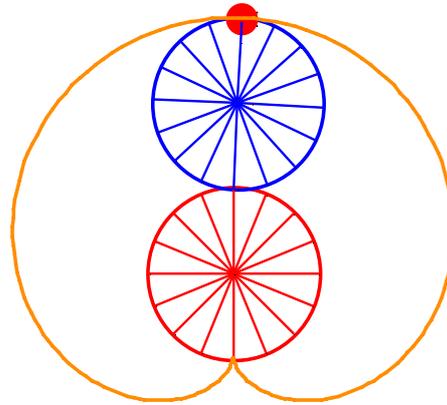
Muovendo il contenitore appaiono varie curve generate dalla riflessione della luce, alcune intrecciate ed altre non intrecciate. Tra questa la più bella è proprio la *cardioide*, formata dall'involuppo di raggi di luce che entrano obliquamente nel recipiente ove compare.

La cardioide è una curva ben nota, e può essere generata in vari modi:

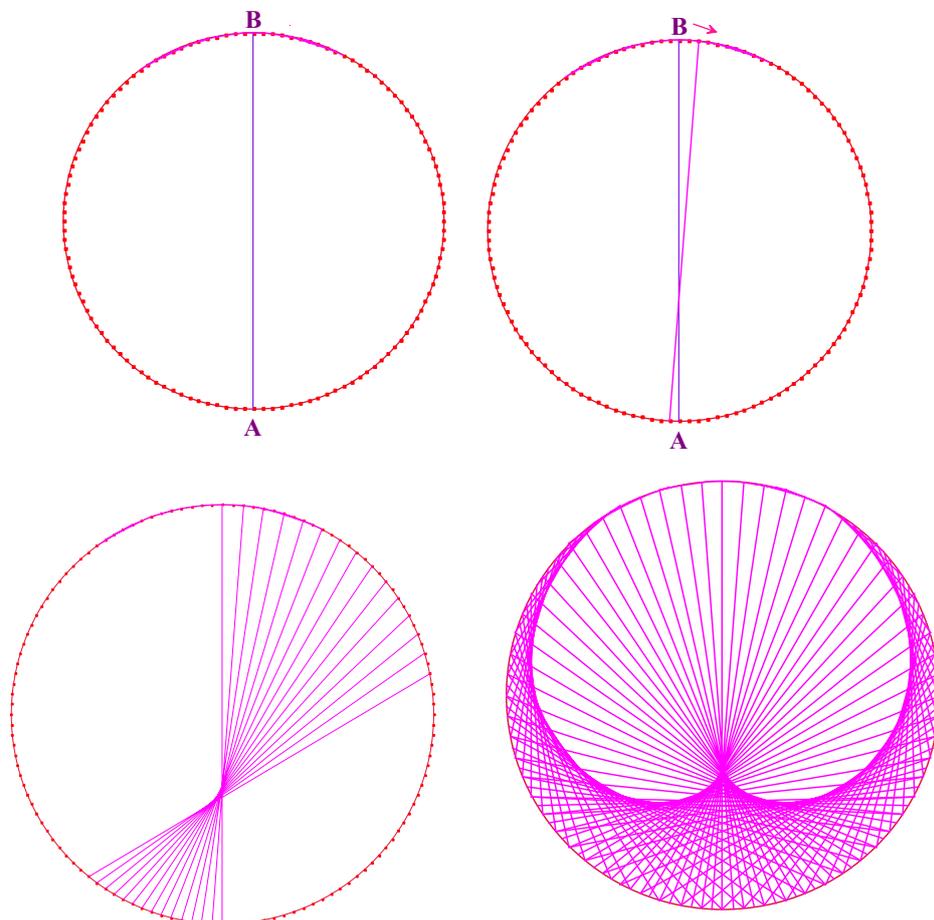
1. facendo rotolare una **circonferenza** attorno ad un'altra **circonferenza** con lo stesso raggio;



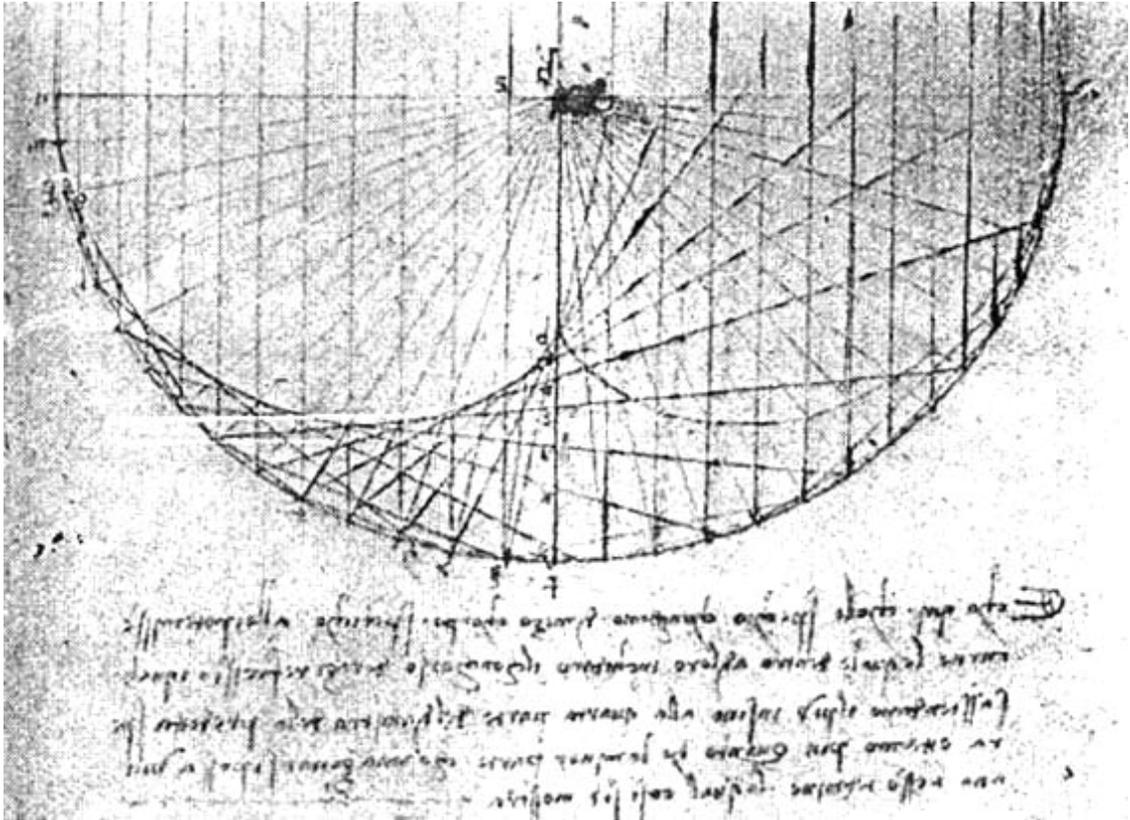
2. come luogo dei punti del piano del **punto rosso** al variare del centro della **circonferenza blu**;



3. dividendo una circonferenza in parti uguali con dei punti, e unendo i punti secondo questa sequenza:
- unire A con il suo punto diametralmente opposto B;
  - scelto un verso di rotazione unire il punto immediatamente successivo ad A con il punto individuato dopo B, saltandone uno;
  - procedere fino ad aver coperto tutti i punti.



La cardioide era già nota a **Giordano di Nemore**, vissuto nel 1200, probabilmente era nota anche agli antichi, come conoide del cerchio e compare anche negli *Studi sulle caustiche di riflessione* (Codice Arundel, 1510-1515) di **Leonardo Da vinci**.

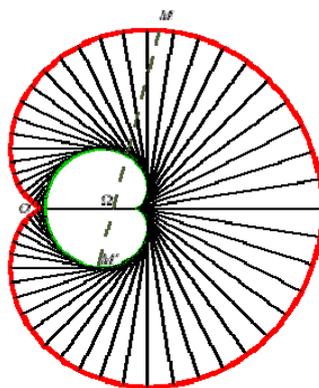


La curva è associata al nome di **Étienne Pascal** (1588-1651), scienziato e magistrato francese che, morta la moglie, si dedicò completamente all'educazione dei figli. Da una tale educazione trasse profitto suo figlio Blaise 1623-1662 grande filosofo e matematico.

Fu studiata anche da **Robervall** nel 1650, da **Rømer** nel 1674 e da **Vaumesle** nel 1678. Nel 1708. **La Hire** architetto e matematico ne calcolò la lunghezza ma il nome, proveniente dal greco *kardia* = cuore, fu introdotto nel 1741 da **Castillon** nelle *Philosophical Transactions of the Royal Society*.

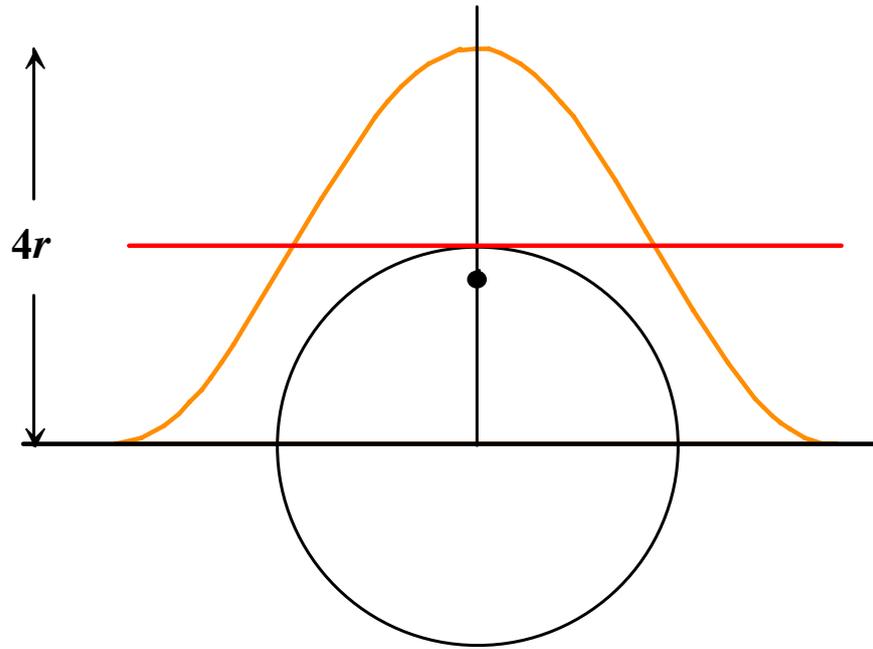
Una curiosità. La cardioide detiene il record del numero delle adherenze alle varie famiglie di curve. Infatti, la cardioide può essere vista anche come:

- una **concoide** del cerchio rispetto ad un suo punto (quindi un caso particolare della lumaca di Pascal);
- un'**epicicloide** (curva generata da un punto di una figura che rotola su di un'altra);
- la **podaria** di un cerchio (il luogo geometrico formato dalle proiezioni del cerchio sulle rette tangenti alla curva);
- una **caustica** di riflessione (l'involuppo dei raggi riflessi da uno specchio). Ed in particolare quando la cuspidè è presa come punto, è una nefroide;
- se la cuspidè della cardioide è presa come il centro di inversione, l'inversa della cardioide è una parabola;
- la sua evolvente è ancora una cardioide.



Si passi a calcolare l'area della cardioide tramite la radialità.

Iniziamo con l'osservare che la cardioide in coordinate polari è espressa dall'equazione  $\rho = 2r \sin \alpha + 2r$ , che interpretata in coordinate cartesiane con  $y = 2r \sin x + 2r$  rappresenta una **sinusoide** dilatata in verticale secondo il fattore  $2r$  e traslata verso l'alto secondo il vettore verticale di modulo  $2r$ . Questa **sinusoide** avrà altezza  $4r$ .



Si avvolga la **linea orizzontale centrale** che divide a metà l'altezza della **sinusoide arancione** (Fig. 4.38 (a)), attorno ad un cerchio di raggio  $2r$ , ottenendo una cardioide (Fig. 4.38 (b)).

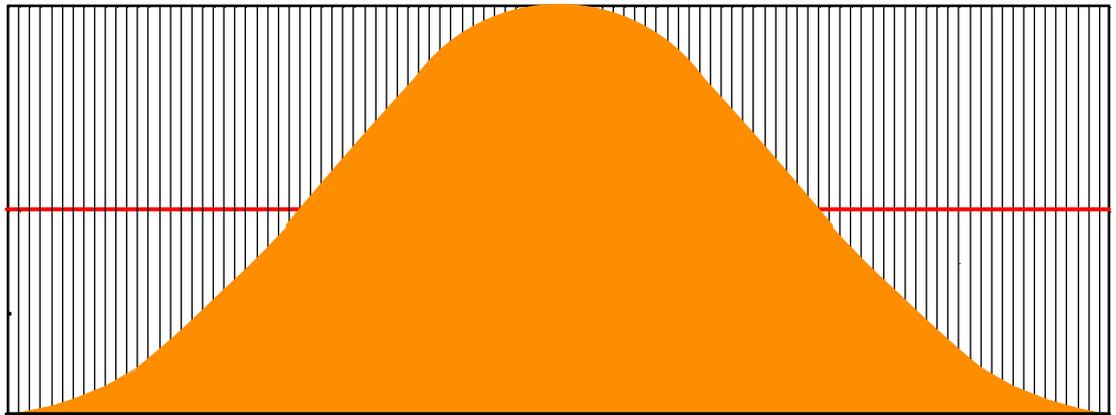


Fig. 4.38 (a)

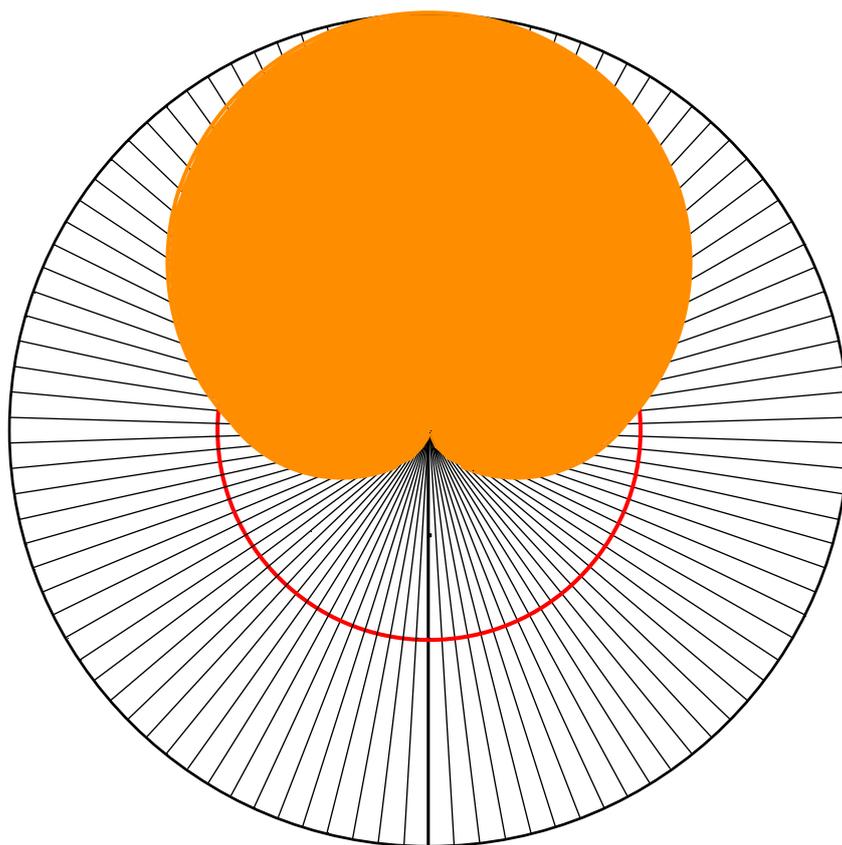


Fig. 4.38 (b)

Per arrivare al nostro scopo sarà necessario dimostrare che:

- il baricentro di  $y = \text{sen}x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$  si trova a  $\frac{\pi}{8}$  dalla sua altezza;
- il baricentro della **sinusoide arancione** si trova a  $\frac{3}{8}$  della sua altezza.

Si noti che il cerchio in Fig. 4.39

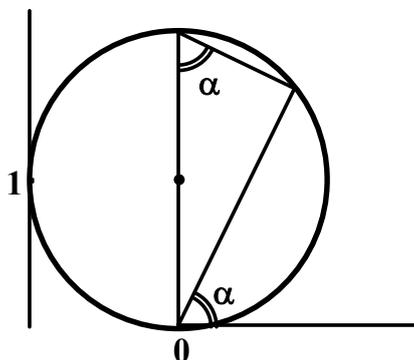


Fig. 4.39

ha equazione, in coordinate polari,  $\rho = \text{sen}\alpha$ , con  $0 \leq \alpha \leq \pi$ .

La stessa equazione, in coordinate cartesiane, si rappresenta con:

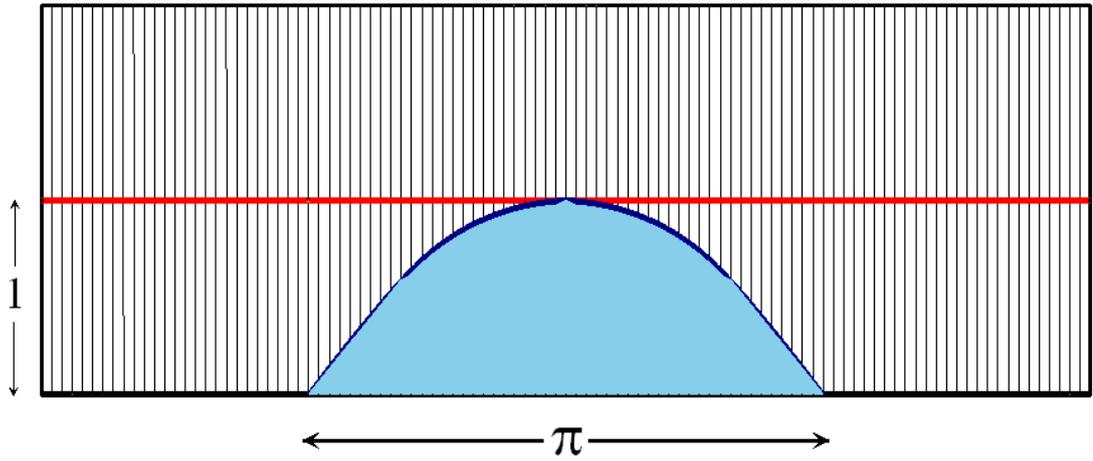


Fig. 4.40 (a)

**TEOREMA.** Il baricentro della **sinusoide** è a distanza  $\frac{\pi}{8}$  dalla sua base.

Si avvolga la **sinusoide** intorno al **cerchio** di raggio unitario, ottenendo il cerchio in Fig. 4.39 di raggio  $\frac{1}{2}$ .

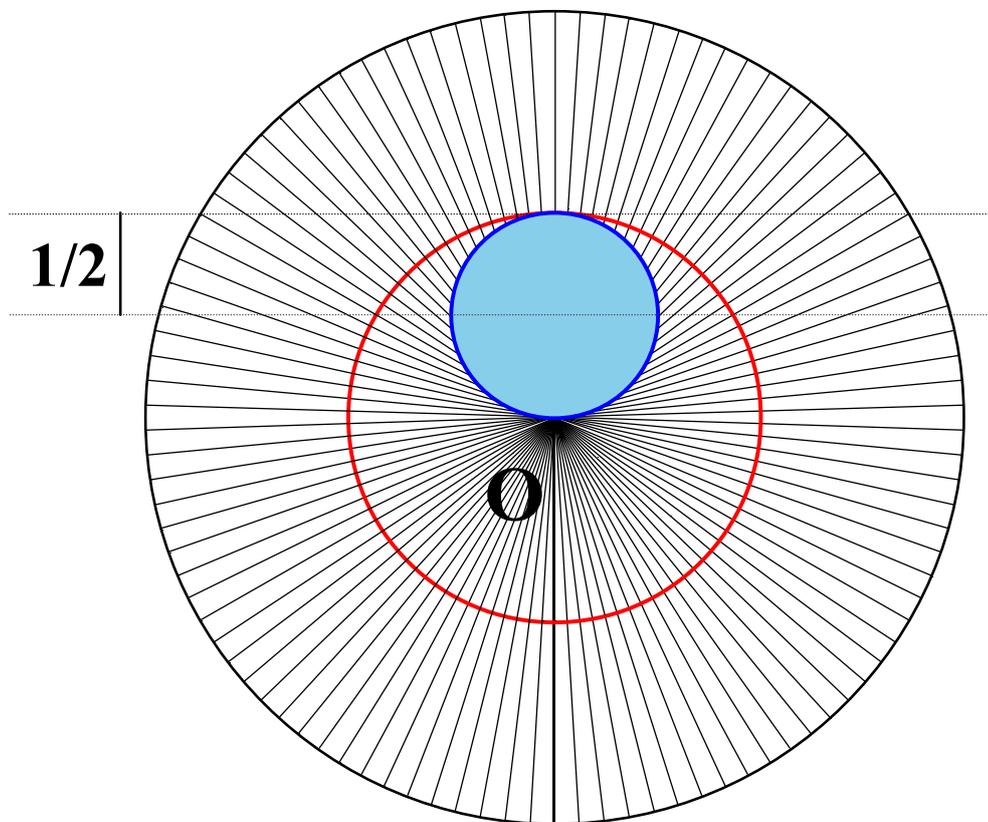


Fig. 4.40 (b)

Applicando a queste figure la formula fra le aree della radialità, definita precedentemente si ottiene:

$$A_{\text{Cerchio}} = A_{\text{Sinusoide}} \cdot \frac{OG}{OR},$$

ricordando che  $A_{\text{Sinusoide}} = b \cdot h \cdot \frac{2}{\pi} = \pi \cdot 1 \cdot \frac{2}{\pi} = 2$ ,  $A_{\text{Cerchio}} = \frac{\pi}{4}$  e

$OR = 1$  si ricava  $OG$  dalla formula precedente:

$$\frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{OG}{1} \Rightarrow OG = \frac{\pi}{8}.$$

E in generale  $OG = \frac{\pi}{8} h$ , dove  $h$  è l'altezza della sinusoide.

**TEOREMA.** Il baricentro della **sinusoide** si trova a  $\frac{3}{8}$  della sua altezza.

La **sinusoide** in Fig. 4.41 è la **sinusoide arancione** di altezza  $4r$  e base  $4\pi r$  analizzata in Fig. 4.38 (a).

Si ponga la **metà superiore** della **sinusoide** ai lati di quella inferiore, ottenendo un rettangolo  $\mathcal{R}$  di area  $8\pi r^2$  e baricentro al centro (esattamente nel punto  $-r$ ).

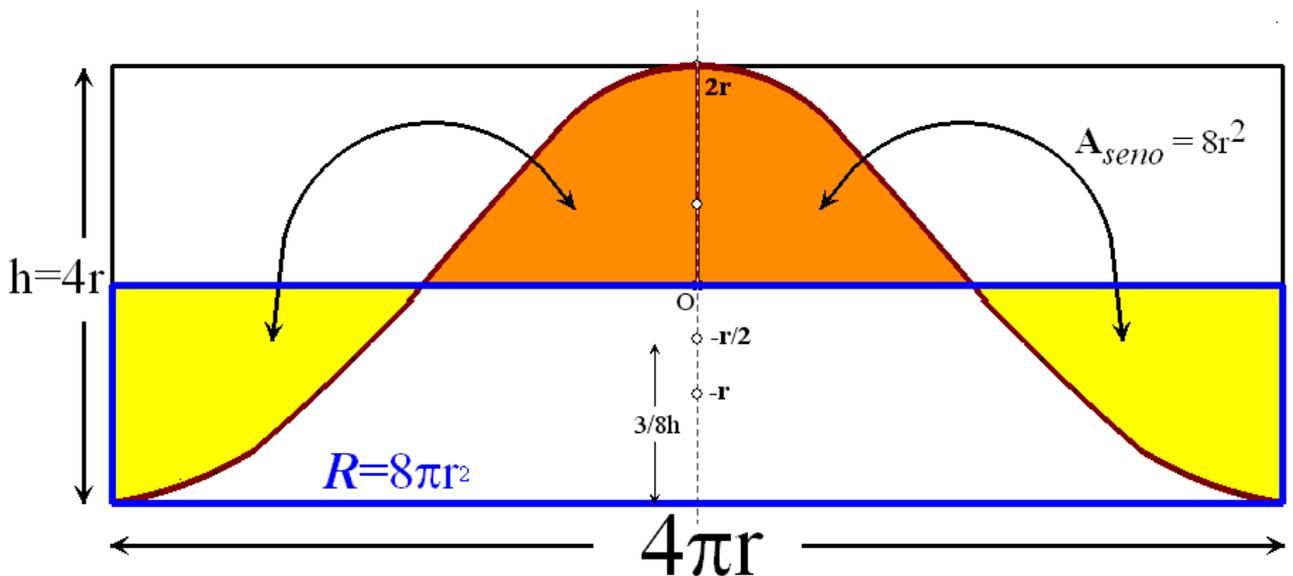


Fig. 4.41

Invertendo il ragionamento otteniamo la **sinusoide** togliendo dal rettangolo  $\mathcal{R}$  le **sinusoidi gialle** e aggiungendole in alto:

$$\text{Sinusoide} = \mathcal{R} - \text{Sinusoide} + \text{Sinusoide}.$$

Grazie alla *condizione di equilibrio di Archimede* ricaviamo  $\mathbf{OG}$ :

$$\text{Sinusoide} \cdot \mathbf{OG} = \mathcal{R} \cdot \mathbf{G}_{\mathcal{R}} - \text{Sinusoide} \cdot \mathbf{G}_S + \text{Sinusoide} \cdot \mathbf{G}_S$$

$$8\pi r^2 \cdot \mathbf{OG} = 8\pi r^2 \cdot (-r) - 8r^2 \left( -\frac{\pi}{8} \cdot 2r \right) + 8r^2 \left( +\frac{\pi}{8} \cdot 2r \right)$$

da cui

$$\mathbf{OG} = -r + \frac{r}{4} + \frac{r}{4} = -\frac{r}{2} = \frac{3}{8}h.$$

Ora si può ottenere la cardioide con un avvolgimento radiale della **sinusoide arancione**:

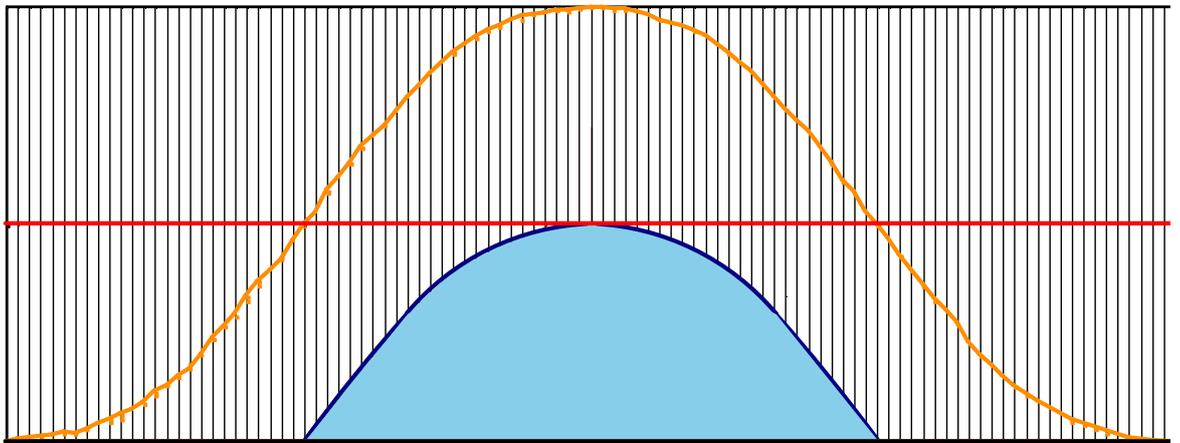


Fig. 4.42 (a)

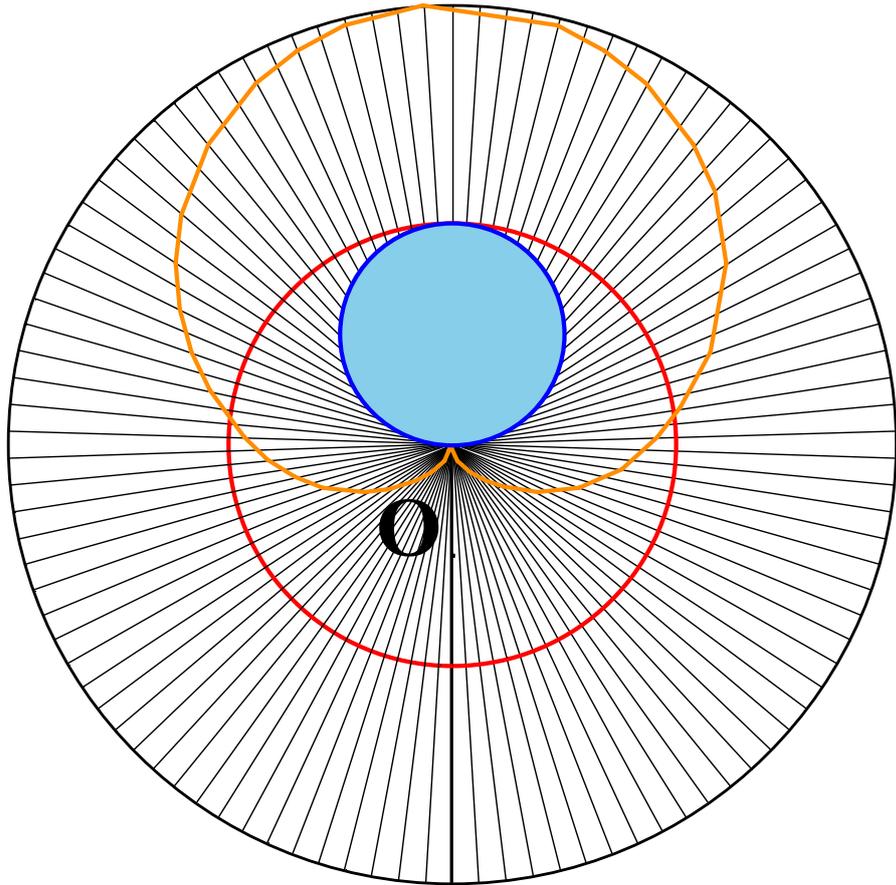


Fig. 4.42 (b)

**TEOREMA.** L'area della **cardioide** è sei volte maggiore di quella del cerchio che l'ha generata.

$$A_{Cardioide} = A_{Sinusoide} \cdot \frac{OG}{OR} = \frac{8\pi r^2 \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot 4r\right)}{2r} = 6\pi r^2 = 6 A_{Cerchio}.$$

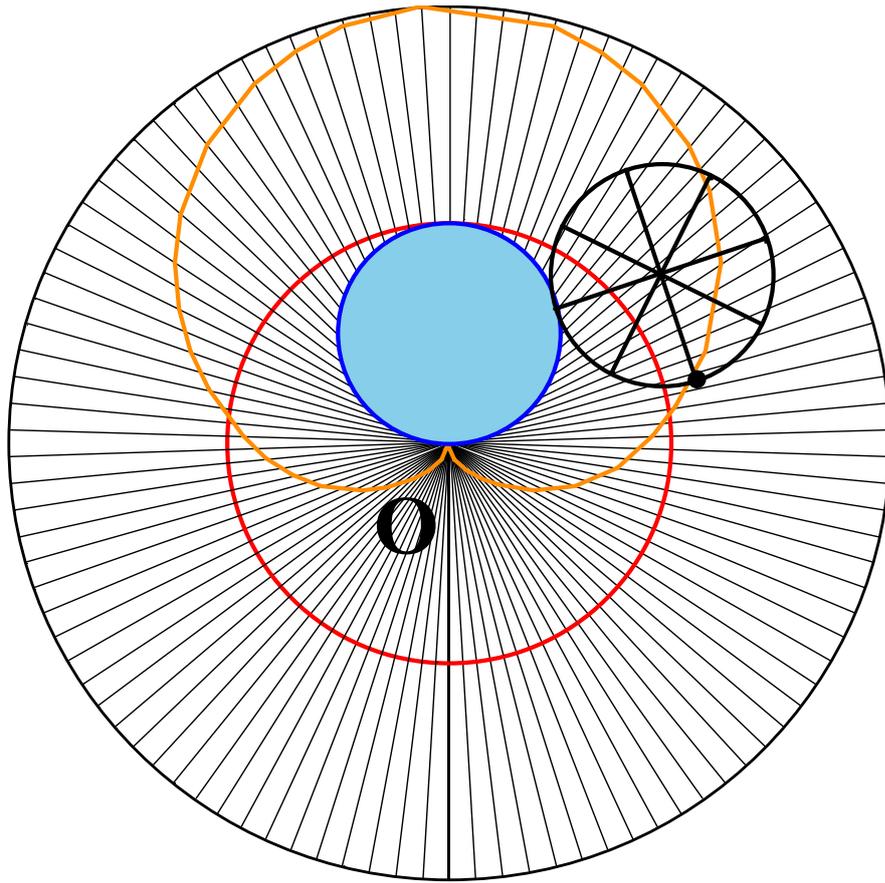


Fig. 4.42 (c)

## AREA DEL SOLIDO IPERBOLICO ACUTISSIMO

L'ultimo esempio che proponiamo riguarda un problema che potrebbe essere considerato in "tipico quesito archimedeo" anche se non fu lui a proporlo.

Il calcolo del volume del solido iperbolico ottenuto da Torricelli (1608 – 1647) riscosse la grande ammirazione dei suoi contemporanei, e tutt'oggi risulta ancora molto interessante. Questo solido di rotazione infinitamente lungo, ottenuto dalla rotazione di un'iperbole equilatera intorno ad un suo asintoto, è stato chiamato da Torricelli **solido iperbolico acutissimo**, e la cosa curiosa sta nel fatto che esso ha l'area della superficie infinita, ma il volume finito. Questo fu considerato per molto tempo un paradosso "incredibile" da molti, incluso lo stesso Torricelli, che cercò diverse spiegazioni alternative.

È inoltre, quanto meno stimolante, descrivere questo problema con il seguente esempio parecchio singolare: è un secchio che è possibile riempire di vernice, ma impossibile da pitturare all'interno.

La dimostrazione data da Torricelli è duplice: la prima fa uso del metodo degli indivisibili, ma compare anche una dimostrazione con il metodo di dimostrazione degli antichi geometri greci, ovvero il metodo di esaustione.

Proponiamo una dimostrazione di questo risultato suddividendo il solido in un numero infinito di sezioni uguali tra loro.

**AREA INFINITA.** Consideriamo il ramo di iperbole equilatera di equazione  $y = \frac{1}{x}$ , per  $x > 0$ ,

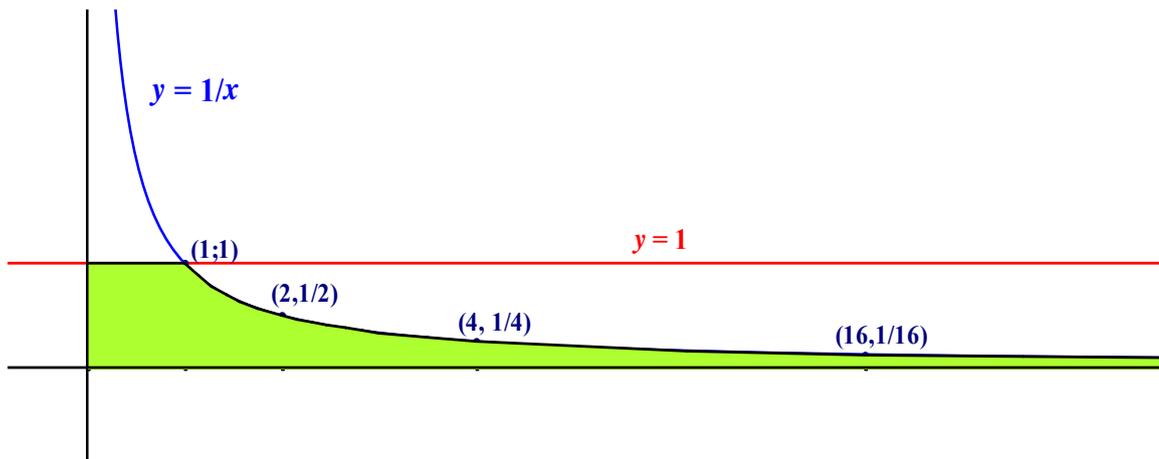


Fig. 4.43 (a)

e il luogo dei vertici dei rettangoli di area unitaria.

Consideriamo solo quelli che hanno per base una potenza di 2, e per altezza:  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ , e per evitare sovrapposizioni consideriamo solo le metà superiori, di area  $\frac{1}{2}$ , di questi rettangoli.

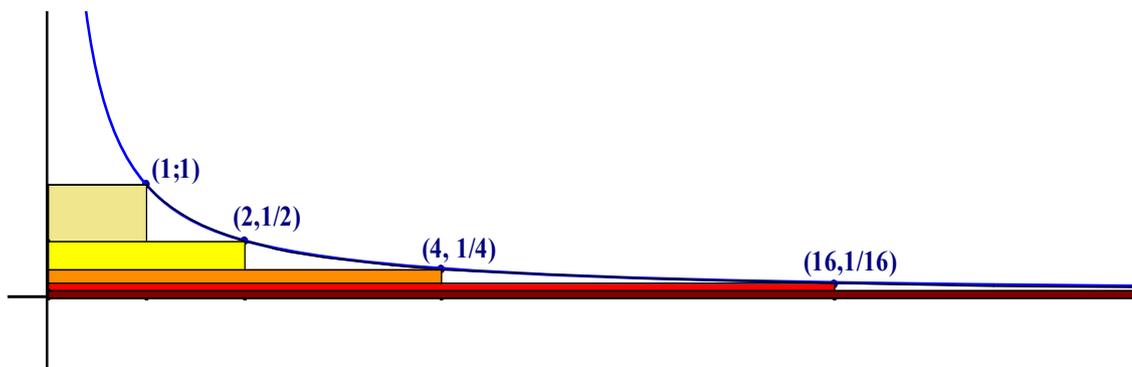


Fig. 4.43 (b)

Quindi, gli infiniti punti  $\left(2^n, \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$  che determinano gli infiniti rettangoli di area  $\frac{1}{2}$ , formano una “scaletta” di area infinita e mostrano che anche la **superficie sotto l'iperbole**, formata dalla somma di tutti i rettangoli compresi tra la retta  $y = 1$  e l'iperbole  $y = 1/x$ , è infinita. Ne segue che anche l'area di superficie del solido di rotazione che ha come sezione il **poligono verde** è infinita.

**VOLUME FINITO.** Si consideri ora il **poligono verde**, e lo si faccia ruotare intorno all'asse  $x$ , ottenendo un solido infinito.

Si consideri questo solido infinito come formato da infinite lamine cilindriche concentriche.

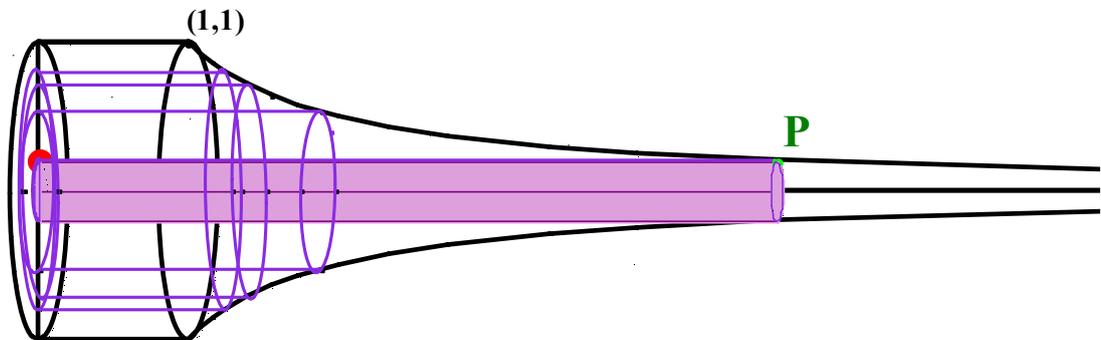


Fig. 4.44 (a)

Al variare di **P**, di coordinate  $\left(x, \frac{1}{x}\right)$ , sul ramo superiore dell'iperbole si vengono quindi a formare dei cilindri, ciascuno dei quali ha raggio  $y = \frac{1}{x}$ , altezza  $x$  e quindi superficie laterale pari a  $2\pi \cdot \frac{1}{x} \cdot x = 2\pi$ , che è anche l'area di un **cerchio C** di raggio  $\sqrt{2}$ .

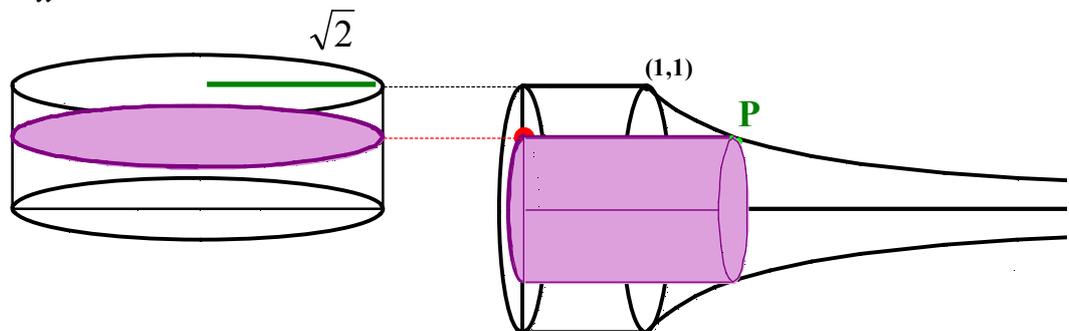


Fig. 4.44 (b)

Così, considerando per ogni lamina un cerchio uguale a **C**, si può concludere che il solido infinito ha lo stesso volume del cilindro che ha per base il **cerchio C** e altezza unitaria:

$$\mathbf{Vol.}_{\text{Solido acutissimo}} = 2\pi \cdot 1 = 2\pi .$$

## APPENDICE 1. SOMMA DEI QUADRATI DEGLI INTERI

**Proposizione X** da *Sulle Spirali*. Se  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  sono  $n$  linee che formano una progressione aritmetica crescente in modo che la differenza comune è uguale ad  $A_1$ , il minor termine, allora

$$(n+1)A_n^2 + A_1(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 3(A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2).^{50}$$

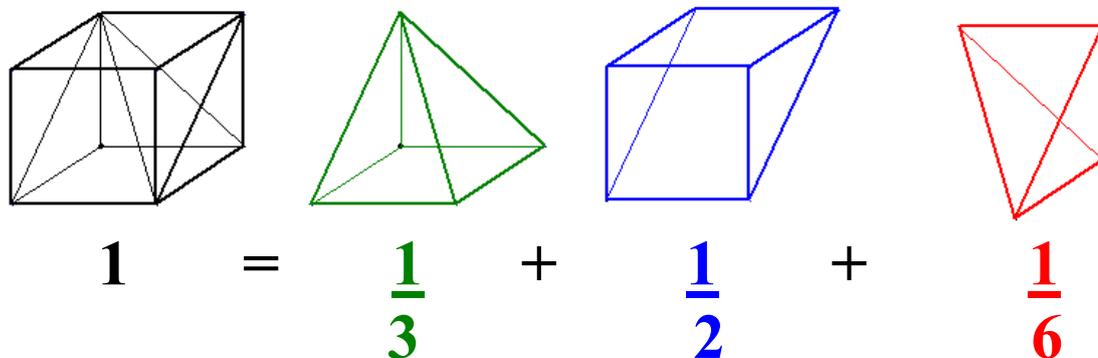
Le dimostrazioni archimedee di questo risultato e del Corollario successivo sono molto lunghe e complesse, e non abbiamo ritenuto utile al nostro fine riportarle. Ne proponiamo però una più semplice<sup>51</sup>.

Questo risultato si può esprimere in modo equivalente come segue:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}.$$

per  $n = 1$  si ha:  $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6},$

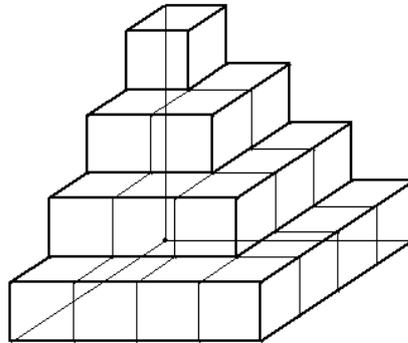
ed è semplice visualizzare questo calcolo come segue: un cubo di lato unitario (quindi di volume 1) è formato da una **piramide** a base quadrata che è la sua terza parte, da un'altra **piramide** che ha per base il piano obliquo che unisce due spigoli opposti, e che è la metà del cubo di partenza e da una terza **piramide** che è la sua sesta parte.



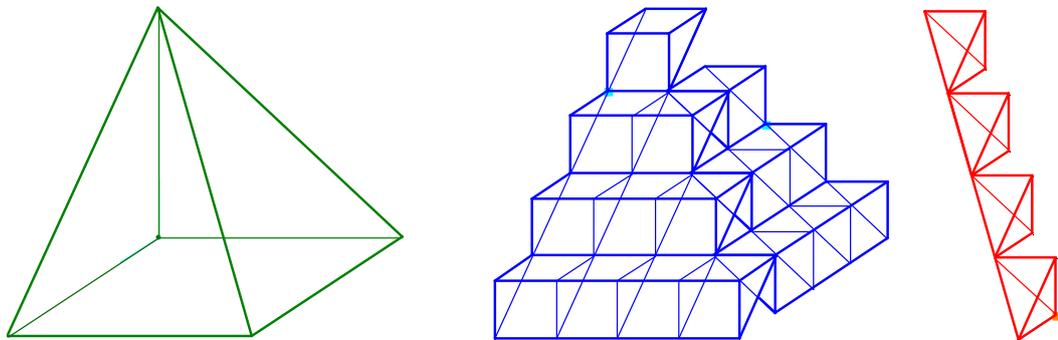
<sup>50</sup> Heath T., *The Works of Archimedes*, Dover Publications, New York, 2002, p. 162.

<sup>51</sup> Barra M., Knowing how to prove, in *Proceedings of the XXXVII*, CIEAEM (Leiden, 1985), 1986, pp. 206-215.

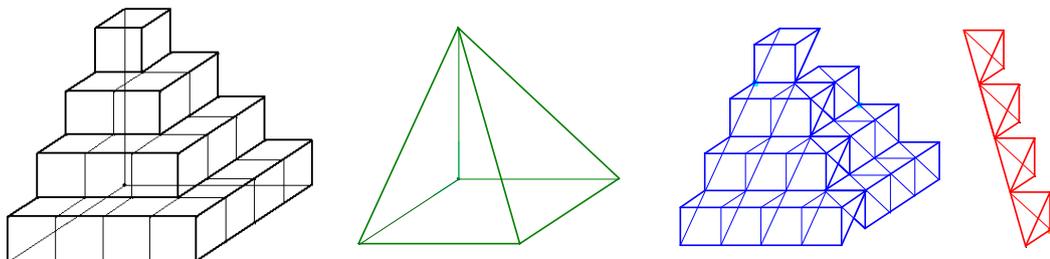
Per un  $n$  generico basta considerare la seguente piramide che descrive benissimo la somma dei quadrati  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ .



Questa è formata da una **piramide “liscia”** a base quadrata formata da tutte le piramidine dello stesso tipo di ogni cubetto, una **piramide “a gradini”** composta da piramidine aventi per base il piano obliquo che unisce due spigoli opposti di ogni cubetto e un ultimo **gradino** composto dalle seste parti di ogni cubetto,



quindi:



$$1+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n}{3} + \frac{n}{2} + \frac{n}{6} .$$

**Corollario 1.** *Segue dalla proposizione che*

$$n \cdot A_n^2 < 3(A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_n^2)$$

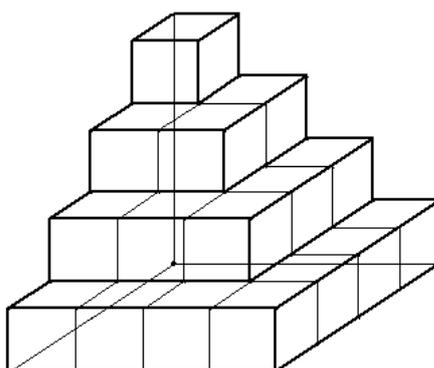
$$n \cdot A_n^2 > 3(A_1^2 + A_2^2 + \dots + A_{n-1}^2).^{52}$$

Questo risultato si può esprimere in modo equivalente come segue:

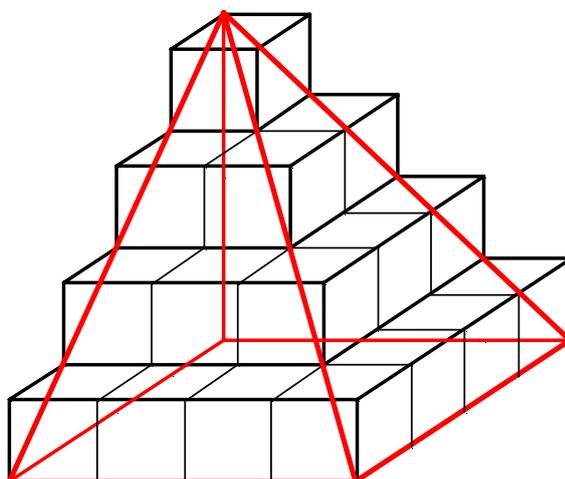
$$(1) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \geq \frac{n^3}{3},$$

$$(2) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \leq \frac{(n+1)^3}{3}.$$

Per la dimostrazione basta riconsiderare la piramide precedente come rappresentazione della somma di quadrati,

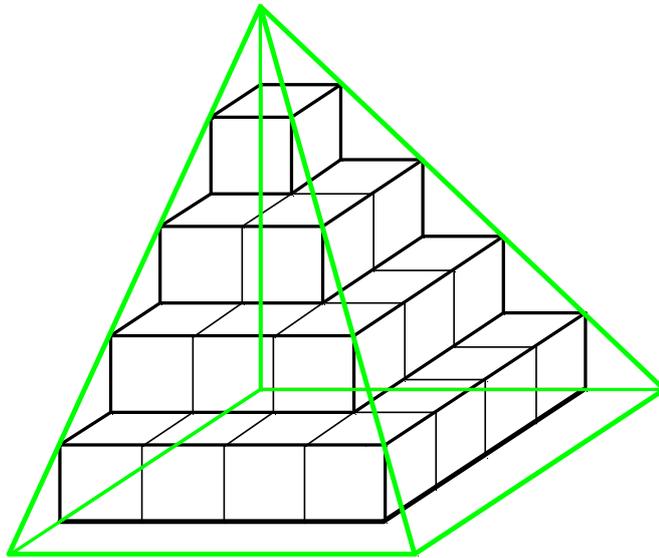


e notare che da un lato contiene la **piramide rossa** di dimensioni  $\frac{n^3}{3}$ ,



<sup>52</sup> Heath T., *The Works of Archimedes*, Dover Publications, New York, 2002, p. 162.

e dall'altra è contenuta dalla **piramide verde** di dimensioni  $\frac{(n+1)^3}{3}$ .



## APPENDICE 2. ELENCO DEI SITI CHE UTILIZZANO CABRI GÉOMÈTRE E CABRI JAVA

### *Siti in Francese*

- <http://www.cabri.net/> (disponibile anche in inglese)

È il sito ufficiale di Cabri-géomètre, anche se, dopo la fondazione della società CabriLog - nel 2000 - da questo sito sono state tolte le informazioni commerciali. Rimangono tuttavia le informazioni accademiche riguardanti AbraCAdaBRI e CabriJava, oltre a molti link a siti e a libri su Cabri nel mondo e una storia di Cabri.

- <http://www.cabrilog.com/> (disponibile anche in inglese)

È il sito della società che attualmente sviluppa e commercializza Cabri Géomètre. Vi si trovano le informazioni su come si può acquistare il software nei vari paesi del mondo, un elenco dettagliato di siti su Cabri nel mondo, pagine riguardanti libri sul software pubblicati nelle varie lingue, oltre ad esempi di utilizzazione del software. In questo sito si possono scaricare anche vari materiali: versioni demo di Cabri Géomètre e di Cabri 3D e i manuali nelle varie lingue.

- <http://www.cabri.net/abracadabri>

In questo sito ci sono decine di illustrazioni, centinaia di figure e di macro, alcuni menu di Cabri che riguardano molti argomenti di matematica: le coniche, geometria dello spazio, geometrie non euclidee, geometria affine, ecc.. Il sito è curato da Yves Martin che ha creato questo magnifico sito con decine e decine di pagine Web dedicate a molti argomenti di geometria, presentati in modo approfondito e nello stesso tempo con simpatiche vignette di Serge Cecconi.

- <http://www.cabri.net/cabrijava> (disponibile anche in inglese).

È il sito ufficiale, curato da Gilles Kuntz, del Progetto CabriJava presso l'IMAG di Grenoble. Da questo sito si può prelevare l'applet CabriJava. In esso ci sono molti esempi di applet. Altre applet si possono

trovare anche nel sito dedicato agli utilizzatori di CabriJava: <http://cabrijava.free.fr/>. Si possono inoltre visitare le pagine dedicate a CabriWeb, un'applicazione Java, creata da Gilles Kuntz, che permette di trasformare automaticamente, senza conoscere il linguaggio HTML, una figura di Cabri in un applet:

<http://www.cabri.net/cabrijava/CabriWeb.html>

Invece, in questa pagina ci sono tutte le informazioni necessarie per usare l'applet: <http://www.cabri.net/cabrijava/index-f.html>.

Si può anche scaricare un manuale d'uso (in inglese oppure in francese) con molti esempi di applet create con CabriJava.

- <http://www.cabri.net/cabriole/>

CabriOLE è un bollettino degli utilizzatori di Cabri Géomètre, pubblicato per nove numeri dal 1992 al 1995, a cura dell'IREM - Institut de Recherche sur l'Enseignement de Mathématiques di Grenoble. In questo sito si trovano tutti i numeri in formato elettronico.

- <http://pages.infinit.net/cabri>

E' un sito che contiene molti materiali interessanti e facilmente "spendibili" in classe a livello di scuola secondaria superiore. Sono anche presentati diversi articoli sull'insegnamento della matematica con Cabri.

- [http://www.ac-reunion.fr/pedagogie/covincep/Frames/F\\_Cabri/M\\_Pedago.htm](http://www.ac-reunion.fr/pedagogie/covincep/Frames/F_Cabri/M_Pedago.htm)

Magnifico sito creato da Eric Hakenholz, uno dei fondatori della rivista (cartacea) abraCAdaBRI (che ora esiste solo in formato elettronico). Nel sito si trovano attività concrete realizzate in classe, in laboratorio oppure come approfondimento, a livello di scuola media e scuola media superiore. Molti file e figure si possono scaricare liberamente da questo sito.

- <http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/enseignement/tp/optique/index.html>

Questo sito mette assieme una collezione notevole di figure animate di ottica, realizzate con Cabri. Le figure sono state presentate ad allievi delle “classi preparatorie” del Liceo Clemenceau di Nantes e a studenti universitari della Facoltà di Scienze di Nantes. Tutte le figure possono essere scaricate.

Si trovano molte figure riguardanti un corso universitario di ottica (alcune di queste possono essere utilizzate anche nella scuola secondaria):

- Ottica geometrica (riflessione e specchi; rifrazione, diottri, ...);
- Lenti sottili;
- Fuochi e misura;
- Strumenti ottici;
- Ottica ondulatoria;
- Interferometri;
- Reticoli di diffrazione;

L'interesse principale delle figure, ovviamente, è quello di essere dinamiche.

- <http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/cortial/bibliohtml/biblgene.html>

Sito molto bello adatto al liceo, con alcune figure adatte anche alla scuola media. Il sito si presenta come un complemento al sito precedente, inizialmente creato da Jacques Charrier per il laboratorio di fisica (Travaux Pratiques de Physique) all'Università di Nantes. La maggior parte sono figure riprese dal sito precedente, ma ne vengono proposte anche altre in una forma più strutturata. Le figure possono essere usate per delle presentazioni e simulazioni di fisica in classe.

- <http://www.cabri.net/nathalie/ti92/ti92.htm>

In questo sito c'è il resoconto di un'esperienza didattica condotta in classe sperimentale, una “Première S” (all'incirca corrispondente alla quarta classe di un liceo scientifico sperimentale in Italia) con l'uso di Cabri sulla calcolatrice TI-92. Dal sito sono scaricabili molti file relativi al lavoro fatto in classe.

- <http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/index.html>

Sito dedicato alla fisica e all'astronomia, ma che contiene bellissime applicazioni della geometria. Il sito è adatto alla scuola secondaria superiore e all'università, ma non mancano figure utilizzabili anche nella scuola media.

- <http://users.skynet.be/cabri>

Sito di notevole interesse didattico, dedicato all'insegnamento della matematica con Cabri in classi che corrispondono alla nostra scuola media e al biennio della scuola secondaria superiore. È possibile scaricare dal sito interessanti animazioni sul teorema di Pitagora e su altri temi. Molto interessante la sezione riguardante le “immagini mentali”: <http://users.skynet.be/cabri/cabri/imagemen.htm>.

- <http://www.cabri.net/sysdynam/index.html>

Con l'aiuto del software Cabri Géomètre in questo sito vengono visualizzate nel piano certe proprietà qualitative dei sistemi differenziali dinamici lineari, a coefficienti costanti.

- <http://www.cabri.net/CabriGraphes>

Si tratta del software precursore di Cabri-géomètre, che serviva per la rappresentazione dei grafi.

- <http://www.ac-amiens.fr/academie/pedagogie/maths/123Maths>

Nel sito è possibile trovare decine di attività accompagnate da una serie di esercizi on-line a un livello corrispondente alla nostra scuola media e al biennio di scuola media superiore.

- <http://www.lyca.ch/pfrache/>

Il sito è dedicato agli utilizzatori di Cabri a livello di scuola media superiore, con dei lavori realizzati con Cabri nelle classi liceali dall'autore (cinque anni di studio per la maturità). Contiene anche una sezione dedicata a *Cabri 3D*.

### ***Siti in Inglese***

- <http://www.ti.com/calc/docs/cabri.htm>.

È la pagina dedicata a Cabri nel sito ufficiale della Texas Instruments, società che distribuisce Cabri Géomètre in America e in altri Paesi e che ha inserito Cabri in alcune sue calcolatrici (TI-92 Plus, TI-89, Voyage 200, TI-83 Plus, TI-84).

Nelle calcolatrici TI-83 Plus e TI-83 Plus SE si può installare CabriJunior. Informazioni si possono trovare nel sito:

<http://education.ti.com/Cabrijr> e anche in questo sito:

<http://www.cabri.com/CabriJr>.

- <http://mathforum.org/dynamic/cabri.links.html>

Sito particolarmente interessante, che presenta i principali sistemi di geometria dinamica. In questa pagina ci sono dei link molto utili su Cabri-géomètre.

- <http://mcs.open.ac.uk/tc12/nonE/nonE.html>

Da questo sito si può scaricare un menu di Cabri dedicato alla geometria non euclidea iperbolica (modello del disco di Poincaré del piano iperbolico) e molti altri materiali interessanti sull'insegnamento della matematica con le nuove tecnologie.

- <http://s13a.math.aca.mmu.ac.uk/Geometry/Geometry.html>

Queste pagine contengono immagini, collegamenti a file di figure di Cabri-Géomètre e molti applet creati usando Cabri e l'applicazione CabriJava.

- <http://www.picciotto.org/math-ed/func-diag/applets>

Questa pagina contiene dei link ad alcuni applet costruiti con CabriJava, per aiutare l'allievo nello studio di funzioni tramite grafici animati e interattivi. Nel sito ci sono anche grafici di funzione interattivi per discutere con gli allievi in classe sul dominio, il codominio, il tasso di variazione di una funzione. Le figure interattive possono essere usate a livello di liceo, come introduzione all'analisi matematica.

### ***Siti in Italiano***

- <http://italia2004.cabriworld.com> (con pagine in inglese)

È il sito dedicato al 3° Congresso internazionale su Cabri Géomètre, organizzato a Roma dal 9 al 12 settembre 2004 dal Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate dell'Università degli Studi "La Sapienza" di Roma. Il convegno è dedicato all'insegnamento/apprendimento della geometria con l'uso del software di geometria dinamica.

- <http://www.fardicono.it>

Sito dell'IRRE Emilia Romagna con pagine dedicate a Cabri-géomètre. È il sito di geometria più ricco in Italia e contiene molto materiale utile per l'insegnamento della matematica.

In particolare è possibile scaricare tutti i 34 numeri del Bollettino CABRIRRSAE nei suoi primi 10 anni di vita (dal 1993 ad oggi) e i Quaderni di CABRIRRSAE in formato PDF. Nella seguente pagina si trova l'elenco dei Bollettini

<http://www.fardicono.it/cabrirrsae/rivista.html>, e quello dei Quaderni <http://www.fardicono.it/cabrirrsae/quaderni.html>.

- <http://kidmir.bo.cnr.it/help/mailman/utente.html>

Cabrinews è una lista di discussione promossa (1997) dall'IRRE-ER nell'ambito di un progetto di rivalutazione dell'insegnamento della

geometria in vari ordini di scuola. Il gruppo di discussione ha i seguenti obiettivi:

- scambiare informazioni e materiali fra gli utilizzatori e gli sperimentatori del software matematico;
- informare su attività didattiche e culturali inerenti l'insegnamento della geometria (convegni, pubblicazioni, software, video...);
- diffondere materiali sulla geometria prelevati da altre liste di interesse matematico.

- <http://www.museo.unimo.it/theatrum>(disponibile anche in inglese)

È un sito dedicato alle macchine matematiche, molto approfondito dal punto di vista storico, con belle animazioni sulle coniche e molte altre curve. Contiene anche delle animazioni costruite con Cabri Géomètre e CabriJava. La mostra è ospitata nei locali dell'Università di Modena. Vi si trova anche la mostra virtuale "Theatrum machinarum".

- <http://web02.polito.it/iniziati/polymath>

Il "Progetto Polymath" intende offrire l'occasione di un incontro e di un confronto per una nuova matematica nella scuola. Vuole contribuire a diffondere un'immagine della matematica meno fredda e meno antipatica di quella che si trova fra gli studenti e in generale nell'opinione pubblica. In questo sito, dedicato alla matematica, è possibile trovare la presentazione di argomenti di matematica con l'aiuto di Cabri.

- <http://www.cartesionline.it/>

Un sito realizzato dalla Texas Instruments Educational Division in cui si presentano le potenzialità delle calcolatrici simboliche e grafiche quali strumenti di supporto all'insegnamento della matematica. Nel sito si trovano un elenco di problemi risolti con l'aiuto della calcolatrice. Ad ogni problema corrisponde la soluzione mediante la calcolatrice più appropriata. Questo per mostrare le potenzialità delle

calcolatrici simboliche e grafiche negli esercizi di calcolo. La seconda sezione contiene l'intero svolgimento di alcune unità didattiche, relative al programma degli ultimi due anni del Liceo Scientifico e delle Scuole Medie Superiori ad indirizzo tecnico-scientifico, e che prevedono l'uso delle calcolatrici. Ogni modulo delle due sezioni descritte può essere scaricato nel formato PDF di Adobe Acrobat, così da permetterne una facile stampa o consultazione off-line. Non mancano, come è ormai consuetudine in tutti i siti informativi, un ampio elenco di indirizzi Web dedicati alla didattica della Matematica e di altre discipline scientifiche e forum di discussione.

### ***Siti in Spagnolo***

- <http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/>

Il sito contiene un'ottima rubrica di problemi sul triangolo on-line. Tutte le figure sono presentate in forma dinamica, usando CabriJava, e ogni problema è arricchito con informazioni complementari, una bibliografia e un elenco di pagine Web, che possono aiutare il risolutore a trovare collegamenti e approfondimenti.

- <http://roble.cnice.mecd.es/~jarran2/enlaces/CabriII.htm>

In questa pagina vengono segnalati vari siti in lingua spagnola (o castigliano) e in catalano su Cabri Géomètre.

### ***Siti in Giapponese (con pagine tradotte in inglese)***

- [http://www.mowmowmow.com/math/cabri/index\\_e.htm](http://www.mowmowmow.com/math/cabri/index_e.htm)

Questo è il sito del prof. Mow, insegnante di matematica in una scuola superiore giapponese. Il sottotitolo del sito è "Let's enjoy Geometric World!". Nel sito ci sono centinaia di bellissime figure realizzate con Cabri che si possono scaricare liberamente.

- <http://www.ies.co.jp/math/indexeng.html>

Sito giapponese che contiene molti materiali di matematica adatti alla scuola superiore; ci sono pagine adatte anche alla scuola media. La società, fondata da tre docenti di matematica nel 1996, commercializza il software Cabri Géomètre in Giappone.

Nel sito si possono trovare molti applet creati con Cabri e CabriJava al seguente indirizzo

<http://www.ies.co.jp/math/cabri/cabrijava/indexeng.html> .

### ***Siti in Portoghese***

- <http://www.cabri.com.br/>

Il sito è patrocinato dal “Centro das Ciências Exatas e Tecnologia” della “Pontificia Universidade Católica” di San Paolo in Brasile. Si tratta di un ottimo sito, progettato in modo molto chiaro, creato per gli insegnanti, all’interno del quale è possibile trovare tutto il necessario per cominciare a lavorare con il software in classe. Nel sito si trova anche la possibilità di iscriversi a una lista di discussione su Cabri e di consultare un “Boletim Cabri”, un bollettino su Cabri e l’insegnamento con la tecnologia.

## BIBLIOGRAFIA

- ACCASCINA G., TOMASI L., Intervista a Jean-Marie Laborde, l'ideatore di Cabri Géomètre, "CABRIRRSAE" *Bollettino degli utilizzatori di Cabri Géomètre*, Ottobre 2003, n° 37.
- ACCASCINA, G., BATINI, M., DEL VECCHIO, F., MARGIOTTA, G., PIETROPOLI, E., VALENTI D., Problem posing e problem solving con Cabri, *Progetto Alice*, n° 14, 2004, 217-242.
- ATIYAH M. F., *Siamo tutti matematici*, Di Renzo Editore, Roma 2007.
- BAGNI G. T., Il metodo di esaurimento nella storia dell'analisi infinitesimale, *Periodico di Matematiche* VII, 4, 1/2 1997, 15-33.
- BARON M. E., *The origins of the infinitesimal calculus*, Pergamon, 1969.
- BARONCELLI G., BUCCIANINI M. E PORTA M., *E. J. Dijksterhuis, Archimede. Con un saggio bibliografico di Wilbur R. Knorr*, Ponte delle Grazie, Firenze, 1989.
- BARRA M. ET ALII, Movimento, percezione e dimostrazione. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, *Progetto Alice*, Vol.29A-B, n° 4, 2006, 313-346.
- BARRA M., Avviamento alla dimostrazione e all'uso di simboli attraverso termini concreti. Trasformazioni dei poliedri platonici in poliedri archimedei, *Progetto Alice*, Vol. 7, n° 7, 2006, 209 - 240.
- BARRA M., Cabri e i suoi aspetti dinamici per calcolare in modo nuovo le misure della sfera, il volume del cono, le sezioni del cilindro e le aree della senoide e della "cordiforme". Applicazioni alla cartografia, *Progetto Alice*, Vol. 5, n° 14, 2004, 271 – 304.

- BARRA M., Knowing how to prove, in *Proceedings of the XXXVII, CIEAEM* (Leiden,1985),1986, 206-215, e in *Proceedings of the IV-ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathematiques* (Orleans,1986), 175-183.
- BARRA M., Una nuova trasformazione non lineare resa possibile dalle proprietà dinamiche di Cabri: gli avvolgimenti radiali. Baricentro della sinusoide, area del cerchio, della spirale di Archimede, della Cardioide e di altre curve, determinati in modo nuovo. Fiori matematici, *Progetto Alice*, Vol. 5, n° 14, 2004, 305 - 330.
- BARTOCCI C., *Geometria e caso: scritti di matematica e fisica di Henri Poincaré*, Bollati Boringhieri, Torino, 1995.
- BONAVOGLIA P., Il ritorno all'infinitesimo, *Progetto Alice*, Vol. 5, n° 14, 2004, 345 – 365.
- BORTOLOTTI E., *L'Opera geometrica di Evangelista Torricelli*, Monatsh. Math. Phys. 48, 1939, 457-486.
- BOYER C. B., *Storia della matematica*, Oscar Saggi Mondadori, Milano, 1980.
- CASTELNUOVO E., 1982, *Didattica della matematica*, La Nuova Italia, Firenze, 1982.
- CASTELNUOVO E., *L' officina matematica. Ragionare con i materiali*, La Meridiana, Molfetta, 2008.
- CASTELNUOVO G., *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, Zanichelli, Bologna, 1962.
- CELENTANO A., CRESPIA E., Sull'insegnamento dell'analisi infinitesimale nella scuola: considerazioni e proposte, *Progetto Alice*, Vol. 5, n° 14, 2004, 367 – 387.

- CRESCI L., *Le curve celebri. Invito alla storia della matematica attraverso le curve piane più affascinanti*, Franco Muzzio Editore, Roma, 2006.
- CRESPINI E., CabriJava: Analisi di costruzioni interattive, *Progetto Alice*, Vol. 5, n° 14, 2004, 389 - 406.
- DE FINETTI B., Contro la matematica per deficienti, *Periodico di matematiche*, n°1-2 maggio, Zanichelli, Bologna, 1965.
- DE FINETTI B., *Matematica Logico Intuitiva*, Edizioni Cremonese, Roma, 1959.
- FICHERA G., *Il calcolo infinitesimale alle soglie del duemila*, Rend. Suppl. Acc.Lincei, s. 9, v. 4, 1993, 69-86.
- FRAJESE A., MACCIONI L., *Gli elementi di Euclide*, Utet, Torino, 1970.
- FRAJESE A., *Opere di Archimede*, Editrice torinese, Torino, 1974.
- GIUSTI E., *Bonaventura Cavalieri and the theory of indivisibles*, Edizioni Cremonese, Firenze, 1980.
- HADAMARD J., *La psicologia dell'invenzione in campo matematico*, a cura di B.Sassoli, Cortina, 1993.
- HEATH T., *A Hystory of Greek Mathematics*, Dover Publications, New York, 1981.
- HEATH T., *The Works of Archimedes*, Dover Publications, New York, 2002.
- HEIBERG J. L., *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii, iterum edidit*, Vol I, II, III, Lipsiae, 1910.
- LOMBARDO RADICE L., *La matematica da Pitagora a Newton*, Editori riuniti, Roma, 1992.
- LORIA G., *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, Hoepli, Milano, 1914.
- NAPOLITANI PIER DANIELE, "Le scienze", *Archimede*, Ottobre 2001, anno IV, n° 22.

- NETZ R. E NOEL W., *Il codice perduto di Archimede. La storia di un libro ritrovato e dei suoi segreti matematici*, BUR saggi, 2008.
- RUFINI E., *Il “metodo” di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell’antichità*, Casa editrice di Alberto Stock, Roma, 1926.
- The Archimedes Palimpsest. Thursday 29 October 1998*, Christie’s, New York, 1998.
- VER EECKE P., *Les coniques d’Apollonius de Perge*, Desclee, De Brouwer et Cie, Bruges, 1923.
- ZEUTHEN H. G., *Histoire des mathematiques dans l’antiquite et le moyen Age*, a cura di J. Mascart Gauthier-Villars, Paris, 1902.

## SITOGRAFIA

- <http://www.cs.drexel.edu/~crrres/Archimedes/contents.html>
- <http://www.mcs.drexel.edu/~crrres/Archimedes/contents.html>
- <http://www.thewalters.org/archimedes/frame.html>
- <http://www.archimedespalimpsest.org/>
- <http://www.history.mcs.st-and.ac.uk/>
- [www.fardicono.it](http://www.fardicono.it)
- <http://education.ti.com/>
- <http://www.arkeomania.com/macchinearchimede.html>
- <http://www.mondogreco.net/archimede.htm>
- <http://www.medioevoitalia.com/italia/index>
- <http://www.galleriaroma.it/Siracusa/Monumenti/Monumenti%20Greci/Latomie.htm>
- <http://www.matmedia.it>
- <http://www.ibolli.it/>
- <http://www.astrofilisiciliani.org>
- <http://brunelleschi.imss.fi.it/museum/isim.asp?c=500164>