

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO – BICOCCA  
Facoltà di Scienze della Formazione  
Corso di Laurea in Scienze della Formazione Primaria

**DECORAZIONI, SEGNALI STRADALI E POLIGONI:  
LA SIMMETRIA A SCUOLA E INTORNO A NOI**

Relatore: Dott.ssa Marina CAZZOLA

Correlatore: Dott.ssa Claudia VASILOTTA

Tesi di Laurea di:

Sara MAINARDI

Matr. 067173

Anno Accademico 2007-2008

## **INDICE**

INTRODUZIONE	p. 3
PRIMA PARTE	
Riferimenti psicopedagogici	p. 5
Riferimenti didattici	p. 13
Didattica della matematica	p. 25
Riferimenti matematici	p. 33
SECONDA PARTE	
Il contesto scolastico	p. 41
Le mie scelte	p. 47
Il progetto	p. 52
Conclusioni	p. 80
RINGRAZIAMENTI	p. 84
ALLEGATI	p. 85
BIBLIOGRAFIA	p. 120

## **INTRODUZIONE**

*“La capacità di studiare, comprendere e impadronirsi degli argomenti in ambito matematico è simile, sotto certi aspetti, al saper nuotare o andare in bicicletta, due abilità che non possono essere raggiunte stando fermi”*

(H. S. M. Coxeter)

È possibile imparare la matematica in movimento, attivando non solo la propria mente ma anche le mani, gli occhi, l'intero corpo? Quali vantaggi offre in matematica il lavoro di gruppo rispetto a quello individuale?

Cosa c'è di matematico in una decorazione, una bandiera o un fiore?

Cosa accomuna il segnale di divieto di fermata al quadrato?

Sono solo alcuni degli interrogativi ai quali la presente relazione finale cerca di dare una risposta teorica e pratica.

Questo lavoro è nato infatti dal desiderio di mettere a frutto gli anni di studio universitario in un progetto che coniugasse l'apporto teorico ricevuto in ambito accademico al vissuto quotidiano di una normale realtà scolastica. Ho avuto la possibilità di concretizzare le mie idee in un percorso sulla simmetria proposto ad una classe quarta di una scuola primaria di Milano.

Oltre agli obiettivi specifici di apprendimento, rientra tra gli scopi del progetto la sperimentazione di una modalità di insegnamento della matematica che coinvolga in modo attivo i bambini e che li porti verso una nuova visione della disciplina. Nelle attività che ho proposto ho sempre cercato infatti di mostrare agli alunni numerosi esempi di come la matematica non sia confinata nei libri di scuola ma pervada i diversi ambiti della realtà che ci circonda. Ritengo infatti che la capacità di cogliere i “segnali matematici” presenti nel mondo intorno a noi debba essere coltivata e incentivata fin dalla scuola primaria e il mio progetto ha voluto concorrere verso questo obiettivo generale.

La prima parte del seguente lavoro ripercorre brevemente le conclusioni alle quali, nell'attuale panorama psicopedagogico e didattico, sono giunti differenti autori e correnti di pensiero. In particolare mi sono soffermata su quei contributi che hanno maggiormente influito la mia formazione, costituendo un punto di riferimento nelle fasi di progettazione, proposta e verifica del percorso sulla simmetria.

Nella seconda parte invece presento in modo più specifico il mio progetto, esaminando il contesto nel quale ho operato, raccontando come si sono svolte le diverse attività e motivando le scelte fatte. Infine propongo una valutazione generale del percorso.

## **PRIMA PARTE**

### **Riferimenti psicopedagogici**

Nel mio corso di studi ho avuto modo di conoscere e approfondire il pensiero di numerosi autori e l'apporto che differenti orientamenti teorici hanno offerto allo sviluppo delle discipline psicopedagogiche e didattiche. Attraverso le attività laboratoriali e di tirocinio ho inoltre potuto confrontare gli apprendimenti teorici con la pratica operativa, rendendomi conto di quali contributi costituiscano il bagaglio culturale indispensabile ad ogni insegnante.

La breve trattazione che segue, pertanto, ha come unico obiettivo la messa in risalto di quegli elementi che, più di altri, hanno costituito un importante punto di partenza e un costante riferimento nel lavoro di progettazione e proposta del mio percorso didattico, senza aver la pretesa di descrivere in modo esaustivo il contributo che gli studiosi citati hanno portato allo sviluppo delle discipline psicopedagogiche.<sup>1</sup>

Jean Piaget (1896 – 1980) nella sua teoria sullo sviluppo cognitivo descrive come opera la nostra mente nell'attività di conoscenza e come essa si modifica nel suo svilupparsi.

Egli distingue gli aspetti funzionali invariati dalle strutture cognitive varianti.

All'interno dei primi troviamo la tendenza all'organizzazione, cioè l'idea che la nostra mente costruisca da sé delle strutture cognitive unitarie (schemi e operazioni) che le permettono di agire efficacemente sulla realtà. Vi è inoltre la tendenza all'adattamento che si realizza attraverso l'equilibrio tra due processi complementari: l'assimilazione (un aspetto della realtà esterna viene incorporato nella struttura mentale del

---

<sup>1</sup> Per la parte seguente, si vedano i riferimenti bibliografici CACCIAMANI 2002, pp. 18-42, CARUGATI-SELLERI 2001, pp. 50-57, 62-70 e 86-102, FONZI 2001, pp. 20-28 e 36-41.

soggetto, senza che questa ne sia modificata) e l'accomodamento (per poter incorporare i dati dell'esperienza, il soggetto deve modificare la propria struttura cognitiva, adattandola alle loro caratteristiche).

Le strutture cognitive sono modificate dal soggetto nel corso del suo sviluppo secondo una sequenza che Piaget identifica in una precisa successione di periodi:

- periodo sensomotorio (dalla nascita fino a 18-24 mesi), durante il quale l'intelligenza si organizza in forma pratica;
- periodo preoperatorio (fino a 7/8 anni), caratterizzato dalla comparsa e dallo sviluppo dell'attività rappresentativa (es. gioco simbolico);
- periodo operatorio concreto (fino a 11/12 anni), in cui il bambino è in grado di eseguire operazioni mentali a partire dall'esperienza concreta;
- periodo operatorio formale (dai 12 anni), durante il quale il soggetto sa operare con idee e conoscenze astratte.

Anche se attualmente questa impostazione teorica è stata superata, ritengo che alcuni elementi presenti in essa possano ancora costituire un importante punto di riferimento. Innanzi tutto la consapevolezza che lo sviluppo di nuovi processi cognitivi nasca dal contrasto tra i dati della realtà esterna e le strutture mentali del soggetto, in particolare nel processo di accomodamento, fornisce importanti indicazioni metodologiche all'insegnante.

Inoltre, la successione degli stadi di sviluppo cognitivo, pur essendo stata ampiamente criticata per l'inflessibilità che le ha dato Piaget, ha il merito di identificare in modo chiaro e sintetico il livello di strutturazione mentale dei soggetti. Se presa in modo non rigido né deterministico, può offrire indicazioni sulle modalità e sequenzialità con cui presentare agli alunni i diversi argomenti di studio.

Il pensiero di Lev S. Vygotskij (1896 – 1934) è spesso presentato in antitesi a quello di Piaget. Lo studioso russo ha infatti dato avvio alla prospettiva di studi storicoculturali, affermando l'esistenza di uno

stretto legame tra lo sviluppo cognitivo e la cultura di appartenenza del singolo, contrapponendosi in questo modo a quanto affermato da Piaget a proposito dell'universalità degli stadi di sviluppo dell'intelligenza.

Vygotskij sostiene che le funzioni mentali superiori, tra le quali l'attenzione volontaria, il pensiero, la memoria logica, hanno origine nelle relazioni sociali. Egli ritiene quindi che si possono osservare le funzioni mentali che si stanno sviluppando nel bambino là dove esse si costruiscono e cioè nelle attività di collaborazione.

Da questa consapevolezza hanno preso avvio i suoi studi, all'interno dei quali assume un ruolo di fondamentale importanza, il concetto di Zona di Sviluppo Prossimale, definita come la distanza fra il livello di sviluppo attuale, stabilito dal tipo di abilità mostrata da un soggetto che affronta individualmente un compito, e il livello di sviluppo di cui il soggetto dà prova quando affronta un compito del medesimo tipo, con l'assistenza di un adulto o di un coetaneo più abile.

Vygotskij, parlando dell'insegnamento, ha sostenuto che questo è utile solo quando si colloca oltre il livello di sviluppo attuale del bambino, conducendolo ad intraprendere attività che lo spingano a superare se stesso. Ritengo quindi che il primo obiettivo educativo che un docente si debba porre sia quello di individuare una possibile zona di sviluppo prossimale che permetta all'alunno di passare da un livello cognitivo al successivo, quindi creare occasioni perché questa si possa realizzare.

Sono stati alcuni psicologi seguaci di Vygotskij a coniare il termine *scaffolding*, indicando le modalità che l'adulto dovrebbe utilizzare per promuovere lo sviluppo cognitivo del bambino attraverso la metafora dell'impalcatura, che costituisce un supporto nel momento in cui si avvia la costruzione di un edificio, ma che viene tolta una volta che questo è completo. Lo *scaffolding* prevede il coinvolgimento del bambino, la riduzione della difficoltà, il mantenere orientata l'attività verso l'obiettivo, il segnalare caratteristiche specifiche del compito, il controllare la frustrazione del bambino. Si tratta di una prima modalità

operativa alla quale l'insegnante può fare riferimento e che ha costituito la base per lo sviluppo di numerose metodologie didattiche.

È stato Jerome Bruner (nato nel 1915) a comprendere per primo l'importanza di entrambi i contributi sopra citati e a provare ad integrarli. Nella sua teoria si trovano infatti alcuni elementi riferibili all'approccio di Piaget basato sulle strutture cognitive che si sviluppano per stadi e altri legati alla prospettiva storicoculturale di Vygotskij.

Bruner ipotizza l'esistenza di tre modalità di rappresentazione della conoscenza:

- il sistema attivo, in cui la conoscenza è organizzata in sequenze d'azioni e quindi il pensiero e l'apprendimento sono basati sulla sperimentazione pratica;
- il sistema iconico, in cui la conoscenza è organizzata attraverso immagini e quindi il pensiero e l'apprendimento sono legati all'osservazione e alla percezione visiva e uditiva;
- il sistema simbolico, in cui la conoscenza è organizzata mediante simboli e quindi il pensiero e l'apprendimento sono centrati sul linguaggio che consente di comprendere e comunicare il rapporto tra significati e simboli.

Secondo Bruner i tre sistemi sono legati e interdipendenti, per cui le capacità del livello simbolico presuppongono lo sviluppo di quelle a livello attivo e iconico. Tuttavia tali forme possono essere compresenti nei diversi momenti della vita del bambino e dell'adulto. È quest'ultima considerazione che allontana il pensiero di questo Autore dalla teoria degli stadi di sviluppo di Piaget.

Bruner sostiene poi che sia la cultura a favorire il passaggio da un sistema di conoscenza ad un altro, modellando il pensiero attraverso gli strumenti che mette a disposizione, che sono considerati come degli "amplificatori" culturali del sistema sensoriale e motorio dell'individuo. Utilizzati come protesi, aumentano quindi il potere d'azione del soggetto

sulla realtà. È attraverso la costruzione e l'utilizzo degli strumenti che il pensiero viene plasmato nelle forme attiva, iconica o simbolica.

Grazie a queste conoscenze l'insegnante è portato a considerare le discipline non solo per il loro aspetto contenutistico, ma prima di tutto come sistemi di simboli e di strumenti che consentono all'individuo di amplificare le proprie capacità intellettive. Sarà inoltre consapevole del fatto che per ogni capacità o conoscenza esiste un'adeguata versione che può essere proposta a qualsiasi età, se si rispettano i vincoli cognitivi dello sviluppo dell'individuo, permettendogli di utilizzare i sistemi di rappresentazione a lui più congeniali in quel momento.

In uno degli studi più recenti, Bruner stesso ha indicato quattro criteri fondamentali per costruire ambienti in cui l'apprendimento sia significativo:

- la capacità d'azione, intesa come la possibilità che il soggetto apprendente assuma il controllo della propria capacità mentale;
- la riflessione, per cui è necessario che l'individuo dia un senso personale a ciò che sta imparando, collocandolo in contesti reali;
- la collaborazione, per cui l'attività cognitiva è il risultato dell'interazione tra i diversi membri impegnati nell'insegnamento e nell'apprendimento;
- la cultura, che rappresenta lo stile di vita e di pensiero condiviso, frutto della costruzione e della negoziazione della conoscenza.

Il contributo di Howard Gardner (nato nel 1943) si basa sulla Teoria delle Intelligenze Multiple. Egli ha inizialmente formulato una nuova definizione di intelligenza, intesa come la capacità di risolvere problemi o creare prodotti che sono apprezzati all'interno di uno o più contesti culturali.

Gardner ha in seguito sostenuto che tutti gli esseri umani dispongono di almeno otto modi di conoscere il mondo, cioè di otto tipi diversi di intelligenza. A differenziare gli individui sono i modi in cui questi vengono combinati tra loro per portare a termine i vari compiti.

Rilevante in campo educativo è il fatto che ad ogni tipo di intelligenza corrisponde una differente modalità di apprendere:

- intelligenza cinestesica: l'apprendimento è favorito dalle attività che richiedono la mediazione del corpo e del movimento;
- intelligenza interpersonale: l'apprendimento è favorito dall'interazione con gli altri e dalle attività cooperative;
- intelligenza intrapersonale: l'apprendimento è favorito nelle attività individuali, riflessive e metacognitive;
- intelligenza logico-matematica: l'apprendimento è favorito da attività in cui è previsto l'uso di numeri e schemi;
- intelligenza musicale: l'apprendimento è favorito dall'uso di ritmo, melodia e canto;
- intelligenza naturalista: l'apprendimento è favorito da attività all'aperto e dall'interazione con materiali della natura e dell'ambiente;
- intelligenza linguistica: l'apprendimento è favorito da attività centrate sul linguaggio e sulle parole;
- intelligenza spaziale: l'apprendimento è favorito dall'utilizzo di materiali visivi come mappe, disegni e modelli tridimensionali.

Sulla base di queste considerazioni l'istruzione non dovrebbe privilegiare solo alcune modalità cognitive, come invece è accaduto per molto tempo, ma promuovere i diversi tipi di intelligenza attraverso attività che ne vadano a favorire lo sviluppo.

È all'interno dell'approccio socio costruttivista che ho però ritrovato i più importanti appoggi teorici.

Attraverso diverse ricerche, avviate a partire dagli anni '70, gli studiosi che si riconoscevano in questa prospettiva teorica hanno indagato nei dettagli le dinamiche che permettono di comprendere come gli individui costruiscono i propri strumenti cognitivi grazie alle interazioni sociali.

I primi risultati ai quali sono pervenuti sono riassunti nella Teoria del Conflitto Sociocognitivo, secondo la quale:

- i soggetti sono in grado di costruire strumenti cognitivi, che ancora non padroneggiano a livello individuale, coordinando le proprie azioni con quelle dei partner, anch'essi incapaci di risolvere da soli il compito assegnato;
- i soggetti che hanno partecipato a questo tipo di interazioni sociali diventano capaci di eseguire da soli compiti di difficoltà analoga: questo significa che hanno effettivamente costruito una più elaborata capacità di risolvere i compiti e che sono in grado di padroneggiarla;
- operazioni cognitive che vengono costruite in questi contesti hanno un carattere di stabilità e sono trasferibili ad altre situazioni e a materiali diversi.

Due difficoltà rilevanti possono essere connesse all'attivazione di situazioni di conflitto sociocognitivo. La prima è legata al far percepire e riconoscere la differenza tra la propria risposta e quella dell'altro di fronte ad un compito dato. Questo ostacolo si verifica soprattutto quando a confrontarsi sono dei bambini, ancora pienamente assorbiti dal proprio egocentrismo cognitivo. L'altra difficoltà è invece connessa alla regolazione del conflitto comunicativo. In ogni confronto sono infatti in gioco anche le modalità relazionali, che possono ostacolare il buon esito del conflitto qualora uno dei partner risponda basandosi sulle regole sociali della compiacenza, del conformismo o dell'accettazione acritica dell'altrui soluzione.

Ulteriori studi hanno approfondito i meccanismi attraverso i quali avviene la costruzione delle abilità cognitive. Sperimentalmente è stato dimostrato che la condizione più efficace, per risolvere in modo positivo problemi complessi, nei quali sono in gioco più variabili, è dare la possibilità agli studenti di lavorare insieme, sia nella fase di scoperta, sia in quella di applicazione delle soluzioni, invitandoli esplicitamente alla messa in comune e alla discussione delle diverse proposte. Le collaborazioni più efficaci sono inoltre quelle in cui, tra individui allo stesso livello, si instaura un'interazione conflittuale e al contempo

cooperativa. In questi casi anche nei test individuali, svolti dopo il lavoro collettivo e nei quali è richiesta la messa in gioco del medesimo ragionamento applicato a contenuti differenti, i soggetti ottengono dei buoni risultati.

Questa scoperta porta ad ipotizzare che siano all'opera due processi complementari. Da una parte infatti il dialogo cognitivo con se stessi sembra prendere avvio dal dialogo con l'altro. Dall'altra, la messa in discussione delle proprie opinioni sembra sviluppare un'intensificazione dell'attività di ricerca delle giustificazioni alla base del proprio ragionamento.

Quindi i partner si aiutano reciprocamente non solo nella costruzione di nuove abilità cognitive ma anche nella ricerca della procedura migliore per raggiungere l'obiettivo prefissato.

Ritengo che per un insegnante conoscere i risultati ai quali questi studi sono pervenuti fornisca una solida base sulla quale strutturare le attività collaborative. La scelta di far lavorare gli alunni in gruppo non diventa quindi solo una delle alternative possibili, ma è legata alla consapevolezza dei vantaggi che questa metodologia offre allo sviluppo cognitivo dell'apprendente.

## **Riferimenti didattici**

Dopo aver ripercorso brevemente il contributo che gli autori citati hanno portato alle discipline psicopedagogiche e alla mia formazione, intendo evidenziare, nel presente capitolo, quegli elementi di didattica generale che hanno arricchito la base teorica di partenza nella progettazione del percorso sulla simmetria.<sup>1</sup>

### **Le scuole attive**

Il mio intervento si è voluto collocare all'interno della didattica attiva, alla base della quale si trova la convinzione che debba essere il bambino al centro dell'azione formativa e che esista una forte connessione tra la qualità della relazione educativa e la dimensione emotiva e cognitiva dell'apprendimento. L'origine di questa impostazione teorica è nel movimento delle Scuole Attive, che racchiude al suo interno una molteplicità di esperienze, sviluppatasi in Europa nei primi anni del Novecento, la maggior parte delle quali si sono strutturate prima come pratica operativa e solo in seguito sono state rielaborate in una veste più teorica, contribuendo così allo sviluppo di un ampio dibattito sui vari aspetti della didattica. Ad accomunare le diverse scuole attive è la presenza di una rinnovata attenzione riservata all'utilizzo di spazi e materiali e alla relazione insegnante-alunni e l'uso di nuove metodologie di insegnamento.

Come ricorda Gabriella Seveso, gli esponenti delle scuole attive cominciarono a modificare l'uso consueto dei materiali scolastici, "la strutturazione di spazi e di arredi diveniva, così, subordinata ad un'attenta comprensione dei bisogni o degli interessi del bambino e

---

<sup>1</sup> Per la parte seguente, si vedano i riferimenti bibliografici: CAPURSO 2004, pp. 62-72 e 109-112, DE VECCHI 1999, pp. 17-58, GENOVESE - KANIZSA 1991, pp. 401-417, GIOVANNINI 1998, pp. 158-170, NEGRI 2005, pp. 59-69 e 85-95, NIGRIS 2003, pp. A34-A63, A126-A145 e B.4 8-B.4 52, STACCIOLI 1998, pp.11-33.

funzionale ad un ruolo educativo dell'adulto più simile alla regia e alla guida che non basato sulla spiegazione e l'interrogazione".<sup>2</sup>

La convinzione comune che il processo di insegnamento dovesse essere basato sull'attività concreta e sull'espressione creativa degli alunni ha portato alla creazione dei diversi metodi adottati nelle Scuole Attive, all'interno dei quali sono ricorrenti le pratiche di rispetto degli interessi dei bambini, di sperimentazione in ambito laboratoriale, di progetti più o meno individualizzati e di lavoro manuale svolto in gruppo.

Jhon Dewey è stato il primo a strutturare in modo organico le proprie considerazioni sull'uso delle metodologie attive a scuola. Ad esse attribuisce non solo il merito di seguire il naturale sviluppo del bambino, nel quale il lato attivo precede quello passivo, ma anche una positiva connotazione politica, in quanto le metodologie attive hanno il pregio di portare i futuri cittadini a muoversi all'interno della società con maggiore autonomia e consapevolezza, aprendo quindi la strada alla democrazia.

### **La didattica costruttivista**

L'esperienza delle Scuole Attive, unita ai contributi di Piaget, Vygotskij, Bruner e Gardner, è alla base dell'approccio costruttivista alla didattica. Secondo questa corrente di pensiero il bambino è attivo costruttore della propria conoscenza, all'interno di un contesto sociale interattivo che gli offre gli strumenti necessari e che dà senso ai processi mentali in atto, permettendo al soggetto di interiorizzarli in modo duraturo e significativo.

Questa prospettiva si apre verso un'idea più complessa di didattica, nella convinzione che non esistano metodi o metodologie validi per tutti i soggetti, i tempi e i luoghi in cui si realizza l'esperienza educativa, ma che spetti all'insegnante il compito di predisporre esperienze idonee a stimolare la curiosità, l'interesse e la partecipazione degli allievi,

---

<sup>2</sup> SEVESO G. "La storia della didattica nel pensiero pedagogico" p. A46, in NIGRIS 2003.

fornendo loro gli ausili culturali, disciplinari e materiali necessari affinché sia acquisita la porzione di sapere proposta o siano sviluppati determinati processi cognitivi. Si delinea quindi un nuovo ruolo per il docente: quello di regista e coordinatore dei processi interattivi e comunicativi, grazie ai quali avvengono le continue riorganizzazioni cognitive degli apprendenti.

Si fa inoltre strada l'idea di una didattica euristica, che favorisca la ricerca, la costruzione autonoma del sapere e l'acquisizione della conoscenza attraverso il confronto e l'integrazione fra il mondo esperienziale degli allievi e le proposte strutturate dall'insegnante. Questo nella convinzione che un apprendimento efficace e duraturo debba partire dalle conoscenze già possedute dal bambino, per arrivare gradualmente, ma con una maggior consapevolezza, ad un sapere scientifico.

Gli spunti teorici sopra citati hanno stimolato riflessioni e ricerche in diversi ambiti della didattica. Di seguito cercherò di analizzare in modo un po' più approfondito quegli aspetti che, a partire dalla mia esperienza, ritengo rivestano un ruolo importante nella pratica educativa: la motivazione, il contesto, la comunicazione insegnante-alunni, il ruolo dell'insegnante. Passerò quindi ad illustrare quelle che sono le metodologie didattiche oggi maggiormente usate, cercando di evidenziare in quali occasioni è preferibile il loro utilizzo, le potenzialità e i limiti di ciascuna.

### **La motivazione**

Quello della motivazione ad apprendere è un problema oggetto di studio e di dibattito sia per ciò che riguarda gli alunni della scuola primaria, sia, sempre di più, in riferimento agli studenti più grandi, per i quali si intreccia a quello della dispersione e dell'abbandono scolastico.

Secondo Gérard De Vecchi<sup>3</sup>, si tratta di un falso problema, poiché ne va a coprire uno più profondo: quello della mancanza di senso. Per l'autore troppo spesso infatti agli alunni non viene fatto percepire il significato profondo delle situazioni che essi vivono in ambito scolastico. Compito principale dell'insegnante è allora quello di arricchire di senso il lavoro quotidiano dei bambini, in modo tale che questi possano aver chiaro lo scopo da raggiungere (cosa si vuole fare) e le ragioni che spingono verso quell'obiettivo (perché lo si vuole fare).

Nel progettare le attività didattiche il docente è chiamato a rispondere ai bisogni dei propri alunni, che però non sono sempre espressi esplicitamente o in modo chiaro. Risulta quindi utile basare le proposte didattiche sugli interessi mostrati dagli alunni e sulle loro richieste.

Tuttavia non sempre ciò che si insegna a scuola risponde ad un'aspettativa dei bambini. L'insegnante è allora chiamato a supportare la creazione di un rapporto tra il sapere e la persona-alunno, in grado di dare senso all'esperienza scolastica. Questo è possibile quando il bambino si rende conto che quelle conoscenze gli saranno utili nella vita (anche al di fuori della scuola), perché lo toccano dal punto di vista affettivo, simbolico.

Si può allora pensare di inserire le attività proposte all'interno di un progetto personale, che presupponga un ruolo attivo degli alunni nella ideazione e nella messa in atto dello stesso. Si tratta di un modo per responsabilizzarli e renderli protagonisti del loro apprendimento e della loro crescita.

Importante diventa la situazione di partenza di ogni nuova attività. L'insegnante è chiamato a creare una ragione di sorpresa, che stimoli la curiosità degli alunni e che faccia nascere in loro il desiderio di saperne di più. Si rivelano particolarmente stimolanti gli avvenimenti che si discostano dalla quotidianità, mostrando qualcosa di sorprendente o contraddittorio, così come le situazioni di *impasse* che portano i

---

<sup>3</sup> si veda DE VECCHI, 1999.

bambini a scontrarsi con una realtà inaspettata. Compito del docente è allora quello di far sì che i propri alunni si trovino in situazioni di questo tipo, accrescendo la propria capacità di vedere in modo nuovo la realtà che ci circonda, per poter sfruttare ogni stimolo che essa mette a nostra disposizione.

Trovandosi ad apprendere in situazioni che hanno senso, gli alunni saranno anche portati a produrre senso, cioè a costruire un sapere che interessa davvero e che sarà pienamente fatto loro.

### **Il contesto**

Una didattica che vuole dare senso a ciò che propone agli alunni non può non prestare attenzione al contesto in cui avviene il processo di insegnamento-apprendimento. Con questo termine si indicano sia lo spazio, i materiali e il tempo scolastici, sia le caratteristiche normative e relazionali che contraddistinguono il rapporto insegnante-allievi.

Se, come ritiene Gianfranco Staccioli, “si impara solo se a scuola si sta bene”<sup>4</sup>, è allora necessario impegnarsi affinché nel contesto di apprendimento siano corrisposte le esigenze vitali di ciascuno.

L’ambiente non è mai neutro, ma trasmette, a chi vi è immerso, dei messaggi più o meno espliciti. I docenti hanno allora il compito di agire sulla strutturazione degli spazi affinché ciò che questi comunicano sia pensato e voluto, non casuale. La scuola, l’aula, i laboratori dovrebbero diventare sempre più luoghi abitati dagli alunni, che devono trovare uno spazio accogliente e al contempo stimolante, che incentivi la loro curiosità e la ricerca verso l’acquisizione di nuove conoscenze.

Il ritmo della giornata scolastica e l’organizzazione delle routine devono salvaguardare il benessere psicofisico degli allievi e lasciare il tempo necessario allo sviluppo di situazioni di apprendimento che possono rivelarsi anche complesse e lunghe.

---

<sup>4</sup> si veda STACCIOLI 1998, p. 12.

La scelta dei materiali richiede una progettualità e nasce dalla consapevolezza della necessità dei bambini, che attraversano il periodo di sviluppo del pensiero denominato da Piaget “operatorio concreto”, di ancorare i nuovi apprendimenti all’esperienza pratica.

L’organizzazione di spazi, tempi e materiali deve essere il più possibile flessibile, in modo da rimanere aperta alla valorizzazione delle risorse individuali e collettive, ai cambiamenti che imprevisti e ostacoli possono provocare e che possono rivelarsi inaspettate occasioni di apprendimento.

### **La comunicazione insegnante-alunni**

La relazione tra insegnanti e alunni è costituzionalmente asimmetrica, a causa delle diversità dei ruoli ricoperti dai partecipanti. È necessario però che questo non diventi un ostacolo, prima di tutto emotivo, all’apprendimento del bambino.

Cosciente che, come affermato nel secondo assioma della Pragmatica della Comunicazione, ogni messaggio contiene un aspetto relativo al contenuto e uno riguardante la relazione, è necessario che ogni insegnante presti particolare attenzione al tipo di comunicazione che instaura con i propri alunni.

Diversi autori hanno fornito indicazioni agli insegnanti a proposito dell’atteggiamento comunicativo da tenere con gli alunni. Ritengo particolarmente interessante il contributo di Carl Rogers che trae dalla propria esperienza terapeutica alcune indicazioni utili anche in ambito scolastico. Egli sostiene infatti che l’insegnante debba rispettare tre aspetti principali nella relazione educativa: l’empatia, l’accettazione non giudicante, la congruenza.

Il primo termine rimanda all’atteggiamento di chi “si mette nei panni degli altri”, per capire, in un atto comunicativo, ciò che va al di là del contenuto formale del messaggio e riguarda più la sfera emotiva di chi lo ha formulato. Secondo l’Autore, l’atteggiamento empatico è l’unico che porta ad una reale relazione con l’altro. In campo educativo una

simile predisposizione da parte dell'insegnante apre verso una maggior comprensione dei messaggi inviati dagli alunni, che non sono sempre interamente comprensibili qualora se ne consideri solo la parte contenutistica, senza indagare oltre.

Accettare ogni alunno senza giudicarlo significa accoglierlo interamente come persona. Il bambino che si sente accettato mostrerà maggior sicurezza nell'esplorare l'ambiente, stabilire relazioni significative con gli altri e ricercare nuove conoscenze, perché agirà senza paura di essere condannato o rifiutato. Accettare non significa però condividere ogni comportamento. Il docente dovrà essere in grado di mantenere sempre il suo ruolo di formatore, correggendo l'alunno là dove se ne mostrerà l'esigenza. In una relazione basata sulla gratuita accoglienza reciproca anche le correzioni più gravi non andranno ad intaccare la consapevolezza del valore del bambino in quanto persona e quindi la sua autostima.

La congruenza è infine la capacità dell'insegnante di mandare un messaggio coerente attraverso i diversi canali che sono a sua disposizione. Questo presuppone che il docente conosca e sia in grado di controllare il proprio linguaggio verbale e non verbale. La comunicazione si svolgerà in modo sempre più fluido, qualora l'insegnante riesca ad essere sincero, dando il giusto spazio anche all'ammissione di difetti e debolezze, proprie e altrui, in modo da accrescere la fiducia reciproca.

### **Il ruolo dell'insegnante**

Nel momento in cui sceglie di privilegiare una didattica attiva alle metodologie più convenzionali, un insegnante sa che anche il proprio ruolo all'interno della classe non dovrà essere quello tradizionale. Egli infatti non sarà più considerato l'unico detentore del sapere, con il compito di trasmettere la propria conoscenza ai discenti, ma si troverà a svolgere la funzione di facilitatore dell'apprendimento, preparando, stimolando, mediando e coordinando il lavoro di costruzione degli

alunni. Davanti ai bambini ricoprirà la posizione di esperto, cioè di colui che ha un'ampia esperienza, che condivide con loro, ma che è ancora in costante ricerca, per questo può essere preso come modello di riferimento.

Il ruolo che l'insegnante è chiamato a coprire in classe varia a seconda di come sceglie di operare. Per questo, nella breve analisi delle metodologie didattiche che segue, cercherò di sottolineare anche quali sono i compiti che di volta in volta spettano al docente.

### **Le metodologie didattiche**

La lezione è la metodologia d'insegnamento più conosciuta e ancora oggi molto utilizzata. Normalmente è intesa come una sorta di esposizione o conferenza svolta interamente da parte di un oratore (l'insegnante) e diretta verso un pubblico di ascoltatori passivi (gli alunni). Intesa in questo modo la lezione è stata oggetto di numerose critiche, nate dalla constatazione che la comunicazione si svolge in modo unilaterale, risulta spesso monotona, ininterrotta e usa esclusivamente il canale verbale. Mancando ogni forma di interazione, viene meno il controllo degli effetti prodotti dall'intervento del docente sugli alunni.

La didattica attiva, tuttavia, non bandisce completamente la lezione dal panorama delle metodologie utilizzabili. Ne incoraggia invece un utilizzo non univoco e mirato. La lezione permette infatti di presentare informazioni, fonti non disponibili o un contenuto che richiede una sistematizzazione non ancora accessibile agli alunni perché complessa, può far nascere nuovi interessi conoscitivi, costituire un incipit alla discussione o fornire la sintesi di dati o informazioni raccolte. All'insegnante spetterà il compito di scegliere di utilizzare la lezione quando intende raggiungere uno degli obiettivi sopra elencati e, in ogni caso, sarà chiamato a improntare l'attività più come una spiegazione dialogata che come una conferenza, dando spazio agli interventi e alle domande degli alunni e prestando attenzione ai *feed-back* che essi

mandano, per adeguare il proprio stile comunicativo. Sarà inoltre chiamato all'utilizzo di tutto ciò che può stimolare e mantenere viva l'attenzione dei bambini: l'uso di differenti canali (verbale e non verbale), di svariati supporti (immagini, video, grafici), di rimandi continui all'esperienza concreta degli alunni o di rilanci verso attività che si svolgeranno in futuro, nei confronti delle quali è necessario creare una certa aspettativa.

La discussione collettiva è una metodologia che permette di confrontare tra loro in modo immediato diverse idee o proposte. Svolta a scuola facilita gli alunni nella costruzione collettiva della conoscenza, procedimento che si rivela molto efficace, secondo quanto evidenziato dagli autori citati nel capitolo precedente. Per dare buoni risultati, una discussione deve partire da una situazione-stimolo, come può essere un'esperienza vissuta insieme dagli alunni o una situazione problematica di cui si cerca insieme la soluzione. È inoltre necessario che emergano opinioni differenti e confrontabili, dalle quali partire nel processo di recupero delle conoscenze pregresse e di negoziazione dei nuovi saperi.

L'insegnante ha il compito di predisporre o riconoscere le possibili situazioni-stimolo sulle quali impennare la discussione, quindi di creare un contesto idoneo al suo sviluppo: lo spazio dovrà permettere la partecipazione di tutti (ogni alunno dovrà poter vedere e sentire gli altri), i tempi dovranno essere flessibili e lunghi, il clima relazionale accogliente, non giudicante e volto al mantenimento di un atteggiamento euristico, aperto a più soluzioni e alternative.

L'insegnante dovrà poi porsi come mediatore della comunicazione, favorendo l'intervento di ognuno e indirizzando la conversazione verso uno sviluppo costruttivo e non conflittuale. Numerose sono le tecniche alle quali può attingere, qui mi limito ad elencarne alcune: formulazione di domande aperte o di approfondimento, ripresa di un contenuto

interessante, rilancio a specchio, breve sintesi di quanto già detto, gestione volontaria delle pause e dei silenzi.

La divisione degli alunni in gruppi per molto tempo è stata associata ai momenti di attività meno impegnativa o di svago all'interno della giornata scolastica. Solo in seguito alla diffusione delle teorie che evidenziano gli effetti positivi che la collaborazione tra pari ha nella costruzione della conoscenza, si è sviluppata una maggiore consapevolezza a proposito dell'utilizzo del lavoro di gruppo a scuola. Caratteristiche principali della metodologia del *cooperative learning* sono la costruzione di un clima di "interdipendenza positiva" e di "responsabilità condivisa della leadership"<sup>5</sup> cioè di un contesto in cui ogni alunno è consapevole che il successo o il fallimento individuale dipendono da quello dell'intero gruppo e si sente quindi responsabile, nello svolgimento del proprio compito, del risultato positivo o negativo della collettività. Così valorizzati, sono incentivati l'impegno e la partecipazione di ognuno.

L'insegnante durante il lavoro di gruppo delega la propria autorità agli alunni stessi che sono chiamati ad organizzarsi in autonomia. Compito del docente sarà allora quello di preparare l'attività, gli spazi e i materiali necessari, di pensare ai criteri in base ai quali suddividere gli alunni. Durante lo svolgimento del lavoro dovrà supervisionare le interazioni nei gruppi, intervenendo solo qualora sia richiesto dai bambini o lo ritenga strettamente necessario, senza tuttavia sostituirsi agli alunni nella risoluzione del compito loro affidato.

Perché la scelta di far lavorare gli alunni in gruppo abbia senso, deve essere predisposta un'attività che porti allo sviluppo di un conflitto socio-cognitivo, nella quale ognuno abbia la possibilità di mettere in gioco le proprie competenze, soprattutto quelle convenzionalmente non

---

<sup>5</sup> si veda NEGRI 2005, pp. 86-87.

richieste in ambito scolastico. Solo a queste condizioni la costruzione della conoscenza sarà davvero un'opera collettiva.

Attraverso il lavoro di gruppo, adeguatamente proposto e reiterato nel tempo, vengono anche promossi lo sviluppo delle intelligenze multiple e del pensiero critico e creativo e sono favorite la socializzazione e l'autostima personale.

Una forma particolare di lavoro di gruppo è il *tutoring*. Si tratta di una metodologia che prevede la divisione degli alunni in coppie, all'interno delle quali uno dei partner (il *tutor*) è più competente del compagno (il *tutee*) rispetto al compito da svolgere. All'alunno più esperto, spesso anche più grande, è affidato il compito di spiegare all'altro bambino come risolvere una determinata situazione-problema predisposta dall'insegnante.

Questa metodologia si basa sullo sfruttamento intenzionale e sistematico della Zona di Sviluppo Prossimale identificata da Vygotskij. Il *tutoring* agisce in modo positivo sia a livello sociale (sviluppo del senso di autostima ed autoefficacia nei *tutor*, apprendimento di comportamenti adeguati da parte dei *tutee*), sia a livello cognitivo (consolidamento delle conoscenze già acquisite nei *tutor*, possibilità di un insegnamento personalizzato e vicino alle proprie caratteristiche cognitive per i *tutee*).

All'insegnante spetta il compito di predisporre il contesto, la divisione delle coppie e il compito da svolgere, quindi di monitorare l'andamento degli incontri tra gli alunni.

Ulteriori metodologie utilizzate all'interno della didattica attiva sono:

- il *brainstorming*, che prevede la messa in comune di tutte le idee degli alunni a proposito di un tema/concetto dato come stimolo; favorisce il coinvolgimento di tutti e lo sviluppo del pensiero creativo; può essere utilizzato all'inizio di un nuovo percorso per far emergere le preconoscenze sull'argomento in questione;

- la risoluzione di una situazione-problema complessa e rilevante per gli alunni, attraverso la formulazione di ipotesi e la loro verifica<sup>6</sup>;
- le varie tecniche di simulazione e *role play*, che richiedono ai bambini di immedesimarsi e drammatizzare determinati personaggi o situazioni, al fine di far sperimentare abilità, comportamenti ed esperienze emotive non familiari, così da accrescere l'autoconsapevolezza e la riflessione su di sé e gli altri.

---

<sup>6</sup> tratterò in modo più approfondito questa metodologia nel prossimo capitolo, a proposito del suo utilizzo in ambito matematico.

## Didattica della matematica

In questo capitolo, cercherò di mettere in rilievo quelli che sono stati individuati come punti salienti del processo di insegnamento-apprendimento della matematica e che mi sono serviti come guida nelle fasi di progettazione e di attuazione del mio percorso didattico<sup>1</sup>.

Come per ogni disciplina, i docenti di matematica nel progettare un'attività si trovano a dover affrontare due fondamentali questioni: cosa insegnare e come farlo. Si tratta quindi di compiere una scelta di contenuto e una di metodo.

Ad influenzare queste decisioni concorrono le opinioni che l'insegnante ha sviluppato a proposito della disciplina in questione e le convinzioni diffuse nel contesto istituzionale e sociale in cui si trova ad operare.

Infatti “appare evidente che una concezione della matematica come campo dinamico, in continua espansione, come attività di ricerca e scoperta, possa muovere comportamenti diversi rispetto a una concezione strumentalistica in cui la matematica è considerata un insieme di formule e procedure da applicare; immagini diverse della disciplina influenzano, inoltre, l'individuazione e il potenziamento delle capacità ritenute necessarie affinché l'alunno possa affrontare lo studio di tale disciplina”.<sup>2</sup>

Se si domandasse ai matematici “che cos'è la matematica?” si otterrebbero risposte nelle quali è presente un'idea della disciplina basata sull'attività pratica, sul “fare” matematica<sup>3</sup>. Il lavoro del matematico consiste spesso in attività di collaborazione, in cui si è chiamati a “perdere tempo” intorno ad un problema, rispetto al quale non si sa neppure se esista una soluzione, utilizzando tutti i mezzi e le

---

<sup>1</sup> Per la parte seguente si vedano i riferimenti bibliografici: BOLONDI 2005, pp. 1-33, BRUINI 1976, pp. 5-15, CAPONI et al. 2006, pp. 7-40, CAZZOLA 2007, pp. 3-42, CORNOLODI et al. 1995, pp. 7-21, D'AMORE-FRABBONI 2005, pp. 81-105 e 127-134, FREUDENTHAL 1994, pp. 5-18 e 71-160, HMELO-SILVER 2004.

<sup>2</sup> Si veda CAPONI et al. 2006, p. 20.

<sup>3</sup> Si veda CAZZOLA 2007.

conoscenze a disposizione in modo nuovo e creativo, fino ad ottenere un risultato soddisfacente, generalizzabile e comunicabile alla comunità scientifica. Si tratta quindi di una disciplina sperimentale, in evoluzione, non di un rigido insieme di numeri e regole.

È allora da considerare come un dato molto interessante quello che emerge da alcune ricerche<sup>4</sup> nelle quali risulta che gli studenti sono generalmente convinti che la matematica sia una disciplina essenzialmente astratta, centrata su formule e procedure da memorizzare e applicare meccanicamente.

Molti ritengono inoltre che questa disciplina investa abilità intellettive centrali, per cui chi riesce bene in matematica è considerato più intelligente rispetto a chi ha dei buoni risultati in un'altra materia, così come chi sperimenta un insuccesso in matematica lo vive come un evento definitivo e irreversibile. È poi diffusa la credenza che alla buona riuscita in matematica concorrano fondamentalmente l'abilità innata e la conoscenza delle regole, che vanno usate al momento corretto, senza necessariamente averle capite. Riguardo alle attività matematiche, gli studenti sono convinti che vadano svolte sempre individualmente, che i problemi abbiano una sola risposta corretta, alla quale si giunge di solito attraverso un unico processo risolutivo, che richiede quasi sempre l'applicazione dell'ultima regola studiata. Infine ritengono che la matematica imparata a scuola non abbia nulla a che vedere con la vita reale.

Lo sviluppo di queste convinzioni è fortemente influenzato dall'incontro che in ambito scolastico gli studenti hanno avuto con la disciplina.

I risultati sopra riportati lanciano quindi una sfida agli insegnanti che sono chiamati a modificare il tradizionale insegnamento della matematica a scuola in modo da promuovere la creazione di un'idea della disciplina più vicina a quella sostenuta dai matematici.

---

<sup>4</sup> Ho preso in considerazione i risultati delle ricerche riportate in CAZZOLA 2007, pp.4-5, CAPONI et al. 2006, pp.11-14 e CORNOLDI et al. 1995, pp. 9-11.

Questa sfida è stata raccolta dall'approccio costruttivista alla didattica che ha considerato il processo di insegnamento-apprendimento della matematica in modo nuovo, delineando alcune linee guida per l'intervento dei docenti.

L'alunno, considerato in generale attivo costruttore della propria conoscenza, apprende in matematica attraverso un processo di reinvenzione<sup>5</sup>, intesa come appropriazione dinamica delle idee, delle strutture e dei procedimenti propri della disciplina.

Questo processo deve avvenire all'interno di un contesto che sia stimolante e che conduca l'alunno alla scoperta della diffusa presenza della matematica nella realtà che lo circonda. In questo modo, difficilmente il bambino svilupperà un'idea della disciplina come qualcosa di astratto e lontano dalla sua quotidianità.

Importante è il materiale che viene messo a disposizione degli alunni, che deve essere adeguatamente predisposto, in modo tale da permettere ai bambini di svolgere manualmente quelle stesse operazioni matematiche che poi la mente compirà a livello concettuale. Allo scopo di favorire a tutti una reale comprensione dell'argomento matematico affrontato è utile disporre di materiale variegato e flessibile, che possa andare incontro ai differenti tipi di intelligenza presenti nei bambini.

È possibile far percepire agli alunni che la matematica è una disciplina dinamica facendo vivere loro il processo, tipico della disciplina, di continua messa in discussione, ricostruzione e sistematizzazione della conoscenza.

Per fare questo è possibile appoggiarsi al naturale processo di costruzione della conoscenza, per il quale infatti ogni bambino si forma una certa immagine di un concetto, che viene rinforzata nel tempo da

---

<sup>5</sup> L'idea di apprendimento in matematica come "reinvenzione" da parte del discente è da attribuire al matematico Hans Freudenthal, il quale sostiene che l'alunno debba essere inserito in un contesto "ricco", in grado di attirare il suo interesse e stimolarlo verso la costruzione di procedure conoscitive e di algoritmi di calcolo. Questi oggetti mentali vengono re-inventati e quindi posseduti a lungo termine, diventando patrimonio mentale del discente, che sarà in grado di ricostruirli, qualora se ne dimenticasse. Si veda FREUDENTHAL 1994.

prove ed esperienze ripetute. Può però succedere che questa immagine, scontrandosi con una nuova situazione, si riveli inadeguata e debba quindi essere riformulata, adattandola alle nuove acquisizioni.

L'insegnante di matematica, che si trova costantemente di fronte a questo tipo di ampliamento della conoscenza nei suoi alunni, ha il compito di intervenire in modo efficace all'interno di questa situazione. Innanzitutto dovrà cercare di individuare le immagini che il bambino si è creato e che sono scorrette, non complete o inadeguate. Egli però non dovrà considerarle come degli errori da eliminare, ma piuttosto come delle *misconcezioni*<sup>6</sup>, cioè come delle concezioni momentanee, non corrette, ma in attesa di una sistemazione cognitiva più elaborata e critica. Il compito del docente sarà quindi quello di creare delle situazioni che stimolino nell'alunno la messa in discussione di queste misconcezioni, perché inadeguate a essere applicate nel nuovo ambito proposto. Nel bambino si creerà così un conflitto cognitivo che lo porterà alla ridefinizione dell'immagine del concetto formulata in precedenza. L'insegnante deve quindi concedere lo spazio affinché la nuova immagine abbia la possibilità di consolidarsi e sperimentare la propria validità, fino a quando non si scontrerà con elementi nuovi che porteranno a un'ulteriore messa in discussione della stessa.

Per far sì che i concetti appresi entrino a far parte del patrimonio conoscitivo dell'alunno, è necessario che egli li utilizzi in situazioni nuove. Risulta quindi importante sviluppare competenze di tipo strategico che sostengano e dirigano i processi cognitivi verso l'interiorizzazione e l'uso consapevole delle conoscenze matematiche acquisite e favoriscano la risoluzione di situazioni problematiche.

In matematica l'attenzione al problema come strumento didattico si inserisce all'interno della più generale teoria del *Problem-Based Learning* (PBL) ovvero della didattica per problemi, applicabile in ogni disciplina.

---

<sup>6</sup> Per una trattazione più approfondita di questo tema si veda D'AMORE-FRABBONI 2005, pp. 88-98

In base al PBL ogni attività dovrebbe essere svolta a partire da un problema che sia significativo per gli alunni, quindi intrigante, complesso, per quanto possibile legato a situazioni reali, aperto a molteplici modalità risolutive e multidisciplinare. Gli studenti sono chiamati a lavorare in piccoli gruppi, in quanto per giungere ad una soluzione dovranno collaborare efficacemente, mettendo in comune conoscenze e competenze personali. L'insegnante svolgerà il ruolo di facilitatore, supervisionando lo svolgimento dell'attività in modo tale che gli alunni abbiano a propria disposizione tutto il tempo necessario e intervenendo secondo le modalità dello *scaffolding*. Una volta raggiunta una soluzione convincente, ogni gruppo dovrà dividerla e motivarla ai compagni.

I principali obiettivi che l'uso del PBL ha raggiunto in alcuni contesti sperimentali sono stati così riassunti da Cindy E. Hmelo-Silver: *"It is designed to help students:*

- 1) *construct an extensive and flexible knowledge base;*
- 2) *develop effective problem-solving skills;*
- 3) *develop self-directed, lifelong learning skills;*
- 4) *become effective collaborators; and*
- 5) *become intrinsically motivated to learn."*<sup>7</sup>

I problemi che tradizionalmente sono proposti in ambito matematico e di cui sono ricchi i sussidiari della scuola primaria non corrispondono a quelli sopra descritti. Nella maggior parte dei casi si tratta di "un esercizio di calcolo, superficialmente ricoperto da un contesto"<sup>8</sup>, per la risoluzione del quale il bambino, che lavora quasi sempre individualmente, può dimenticarsi presto del testo, perché

---

<sup>7</sup> "Esso è progettato per aiutare gli studenti a:

- 1) costruire una conoscenza di base estesa e flessibile;
- 2) sviluppare efficaci abilità di problem-solving;
- 3) sviluppare abilità di apprendimento autogestito per tutta la vita;
- 4) diventare efficaci collaboratori; e
- 5) diventare intrinsecamente motivati all'apprendimento."

da HMELO-SILVER 2004, p. 240.

<sup>8</sup> da BOLONDI 2005, p. 11.

questo diventa superfluo una volta individuati i numeri necessari e l'operazione da risolvere.

Nella vita esterna alla scuola però sono quasi inesistenti le occasioni in cui il bambino si trova ad affrontare attività di questo tipo, spesso invece avrà a che fare con situazioni in cui la matematica è presente all'interno di un contesto ricco e a volte complesso. Per questo si rivela utile proporre agli alunni anche reali situazioni di *problem-solving*<sup>9</sup>. I problemi che il docente è quindi chiamato a presentare dovranno toccare argomenti chiave della formazione del pensiero matematico, ma anche offrire agli alunni l'opportunità per imparare ad analizzare situazioni complesse, selezionare i dati ed individuarne la funzione all'interno di un contesto, elaborare strategie di risoluzione e saperle modificare nel corso del lavoro.

I compiti del docente, che propone una didattica di questo tipo, sono molteplici. Egli deve predisporre il problema e il contesto necessario allo svolgimento dell'attività, quindi leggere il testo insieme agli alunni per assicurarci che sia stato compreso e che vengano messi in risalto i passaggi più importanti. Durante il lavoro dei bambini dovrà porsi nell'atteggiamento dell'esperto che osserva le interazioni, pronto ad intervenire con domande di stimolo o di supporto qualora ne colga la necessità. Al termine dell'attività di gruppo, il docente dovrà agevolare la condivisione dei risultati e il confronto delle modalità di risoluzione adottate, favorendo la generalizzazione delle strategie.

Gli alunni che sono impiegati in attività di *problem-solving* hanno la possibilità di sperimentarsi in una situazione che ripercorre le tappe di lavoro dei "matematici" veri. Questo fatto non solo ha il pregio di mettere in contatto i bambini con la reale natura della disciplina, ma, se

---

<sup>9</sup> L'espressione *problem solving* è stata utilizzata in letteratura con significati diversi e a volte contraddittori. L'uso che io ne farò si riferisce alla metodologia che pone al centro dell'attività didattica la risoluzione di problemi complessi e significativi. Per un approfondimento di questa problematica si veda A.H. SCHOENFELD, "Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense-making in mathematics" in D. GROUWS (Ed.), "Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning", pp.334-370, MacMillan, 1992.

adeguatamente valorizzato dall'insegnante, offre anche notevoli stimoli dal punto di vista emotivo - motivazionale.

I bambini hanno la possibilità di sviluppare le competenze matematiche, mettendo alla prova la propria conoscenza in situazioni nuove e complesse. Le attività di *problem-solving* offrono però anche l'occasione per ampliare competenze e abilità in altri campi. Oltre a quelli sintetizzati da Hmelo-Silver, è stato rilevato un grande contributo del *problem-solving* nello sviluppo delle abilità metacognitive. In particolare, il primo compito richiesto agli alunni è quello di comprendere il problema, cioè di identificare, a partire dal testo, quali sono gli elementi noti, quali quelli sconosciuti e che cosa esattamente viene richiesto. Questa operazione preliminare è resa più semplice dal recupero nella memoria di uno schema che si riferisca a quel tipo di problema e che possa essere preso come modello di riferimento per le procedure di risoluzione. Ciò richiede che l'alunno abbia non solo sviluppato una buona capacità di classificazione, ma anche che ne sia cosciente e che sia in grado di destreggiarsi all'interno di quanto catalogato. Segue poi la fase di pianificazione iniziale della risoluzione. I buoni risolutori sono quelli che inizialmente stendono un piano generale e limitato, ma che sono in grado di aggiornarlo e completarlo mentre procedono nella soluzione. Durante la risoluzione del problema inoltre l'alunno deve mettere in atto dei processi di controllo su quanto sta operando che si rivelano efficaci se attuati, anche in numero limitato, ma nei momenti opportuni<sup>10</sup>.

Il raggiungimento delle abilità metacognitive che fanno di un bambino un buon risolutore è un obiettivo molto alto, che comunque il docente deve porsi. Egli potrà infatti consolidare lo sviluppo di queste competenze attraverso la condivisione finale e la riflessione collettiva sulle strategie adottate all'interno di ogni gruppo durante la risoluzione del problema.

---

<sup>10</sup> per un approfondimento del legame tra metacognizione e matematica, si vedano i testi CAPONI et al. 2006 e CORNOLDI et al. 1995.

All'interno della didattica per problemi, una modalità di lavoro in matematica, facilmente attuabile nelle scuole e della quale io ho fatto ampio uso nel mio progetto, è quella laboratoriale. Si tratta di proporre agli alunni, sempre divisi in piccoli gruppi, una serie di problemi di difficoltà crescente per la risoluzione dei quali sarà fondamentale l'impiego di materiale specifico appositamente preparato. In aggiunta a quelli già elencati, i vantaggi che questa metodologia offre sono legati alla sperimentazione pratica e attiva, grazie alla quale i bambini si sentono davvero chiamati a "fare" esperienza di matematica.<sup>11</sup>

---

<sup>11</sup> Il Centro Matematita, presso il Dipartimento di Matematica "F. Enriques" dell'Università degli Studi di Milano propone laboratori di matematica di questo tipo agli studenti della scuola dell'obbligo. Io ho avuto la possibilità di condurne alcuni rivolti alle classi della scuola primaria. Per approfondirne la conoscenza, si visiti il sito:  
[http://specchi.mat.unimi.it/users/specchi/notizie\\_labs.htm](http://specchi.mat.unimi.it/users/specchi/notizie_labs.htm)

## Riferimenti matematici

Con l'obiettivo di chiarire i contenuti matematici basilari dai quali sono partita per la progettazione del mio percorso, in questo capitolo propongo una breve spiegazione del concetto di simmetria<sup>1</sup>.

Posti davanti ad immagini come quelle riportate qui sotto<sup>2</sup>, ognuno di noi sa affermare, con una discreta sicurezza, se in esse c'è simmetria. Compito molto più complesso risulta però rispondere alla domanda esplicita: che cos'è la simmetria?



“Tutte le figure che al nostro occhio appaiono simmetriche hanno una caratteristica comune: sono costituite dalla ripetizione di un “modulo” secondo certe “regole”, che in generale sono diverse da figura a figura.”<sup>3</sup> Le regole che vengono prese in considerazione in matematica sono le isometrie. Una volta identificato il modulo, cioè l'unità minima che si ripete, e applicando più volte una certa isometria, si genererà l'intera figura simmetrica. Se applicata alla figura totale invece l'isometria la rimanderà in se stessa.

---

<sup>1</sup> Per la parte seguente si vedano i riferimenti bibliografici: AA VV. 2004, pp. 81-103, BELLINGERI et al. 2001, pp. 33-53, CAZZOLA 2007, pp. 24-33.

<sup>2</sup> Le immagini sono state tratte dal cd *Matemilano - percorsi matematici in città*.

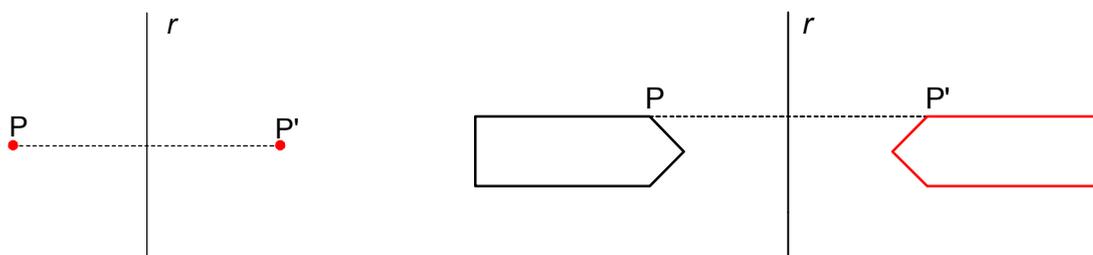
<sup>3</sup> BELLINGERI et al. 2001, p.34.

## Isometrie

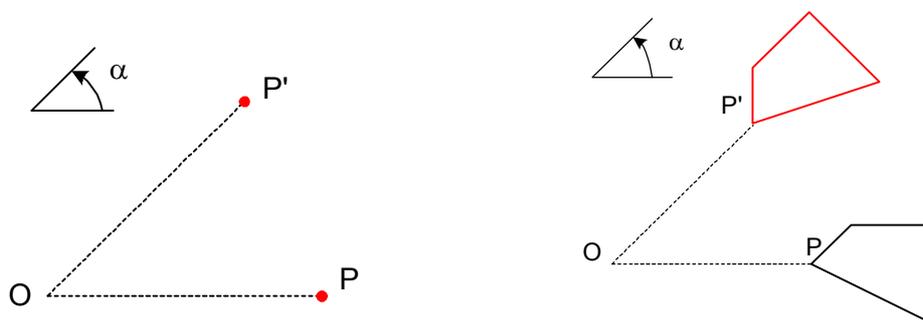
Per comprendere meglio quanto appena affermato, risulta necessario chiarire il concetto di isometria. In matematica sono considerate isometrie quelle particolari trasformazioni geometriche del piano che lasciano invariate le distanze. Si tratta di trasformazioni che coinvolgono tutti i punti del piano e quindi ogni figura presente in esso.

In particolare esistono 4 tipi di isometrie:

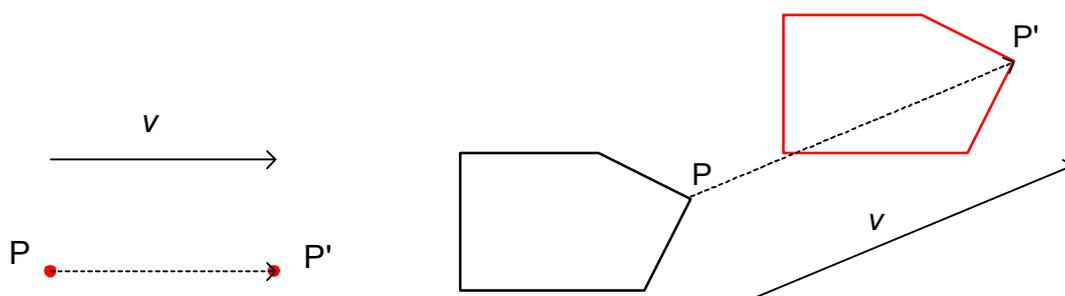
- la *riflessione* è una trasformazione geometrica del piano che, fissata una retta  $r$  (chiamata *asse di riflessione*), manda ogni punto  $P$  del piano in quel punto  $P'$ , appartenente alla perpendicolare a  $r$  tracciata da  $P$ , tale che la distanza del punto  $P$  dall'asse di riflessione sia uguale alla distanza del punto  $P'$  dallo stesso asse, come illustrato nella figura qui sotto;



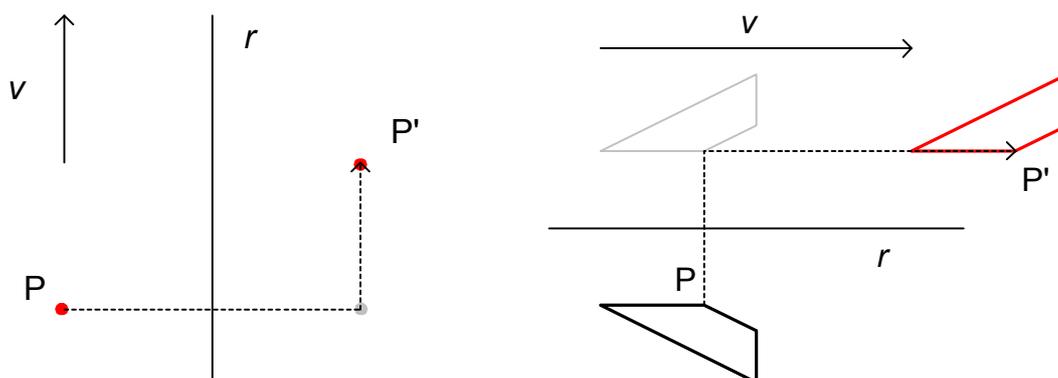
- la *rotazione* è una trasformazione geometrica del piano che, fissato un punto  $O$  (chiamato *centro di rotazione*) e un angolo  $\alpha$ , manda ogni punto  $P$  del piano nel punto  $P'$ , in modo tale che la distanza di  $O$  da  $P$  sia uguale alla distanza di  $O$  da  $P'$  e che l'angolo  $POP'$  sia uguale a  $\alpha$ , come illustrato nella figura qui sotto;



- la *traslazione* è una trasformazione geometrica del piano che, fissato un vettore  $v$ , manda ogni punto  $P$  del piano nel punto  $P'$ , in modo tale che il vettore  $PP'$  abbia la stessa direzione, lo stesso verso e la stessa lunghezza del vettore  $v$ , come illustrato nella figura qui sotto;



- la *glissoriflessione* è una trasformazione geometrica del piano che, fissata una retta  $r$  (detta *asse della glissoriflessione*) e un vettore  $v$  parallelo a questa retta, si ottiene facendo una riflessione rispetto ad  $r$  e una traslazione rispetto a  $v$ , non importa in quale ordine, come illustrato nella figura qui sotto.



### Figure simmetriche

Si possono costruire figure simmetriche applicando ad un modulo una o più delle quattro isometrie. Gli esempi che seguono illustrano come avviene questo processo.

Si prenda in considerazione l'immagine 1<sup>4</sup>. Nella figura più a sinistra è stato colorato solo il modulo di partenza. Per ottenere l'immagine completa è stata applicata 6 volte una rotazione di  $60^\circ$  intorno al centro  $O$ . Inoltre se la medesima isometria viene applicata all'intera figura, questa viene mandata in se stessa.

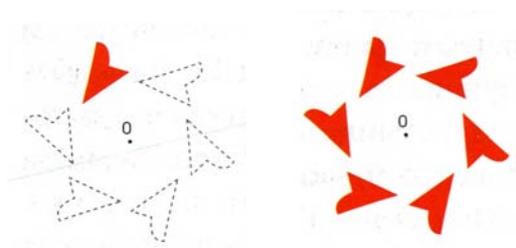


immagine 1

Nell'immagine 2 invece, per ottenere la figura più a destra, il modulo è stato ripetutamente riflesso rispetto alle rette  $r$ ,  $s$ ,  $h$ ,  $k$ , oppure si può ipotizzare che esso sia prima stato riflesso rispetto alla retta  $r$ , quindi si applicata successivamente quattro volte la rotazione di  $90^\circ$  e di centro  $O$ . Le riflessioni rispetto agli assi  $r$ ,  $s$ ,  $h$ ,  $k$  e la rotazione di  $90^\circ$  sono le isometrie che mandano la figura completa in se stessa.

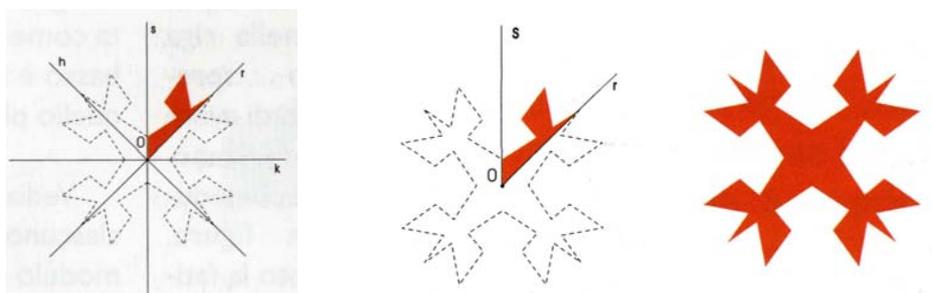
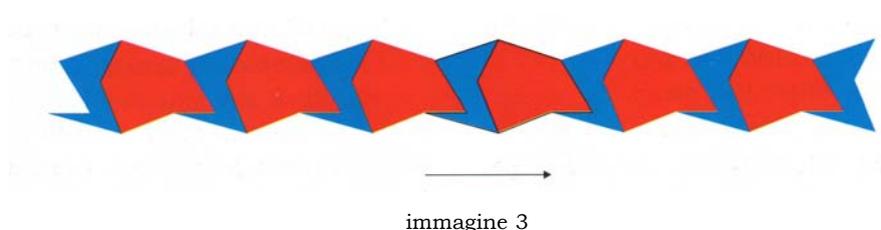


immagine 2

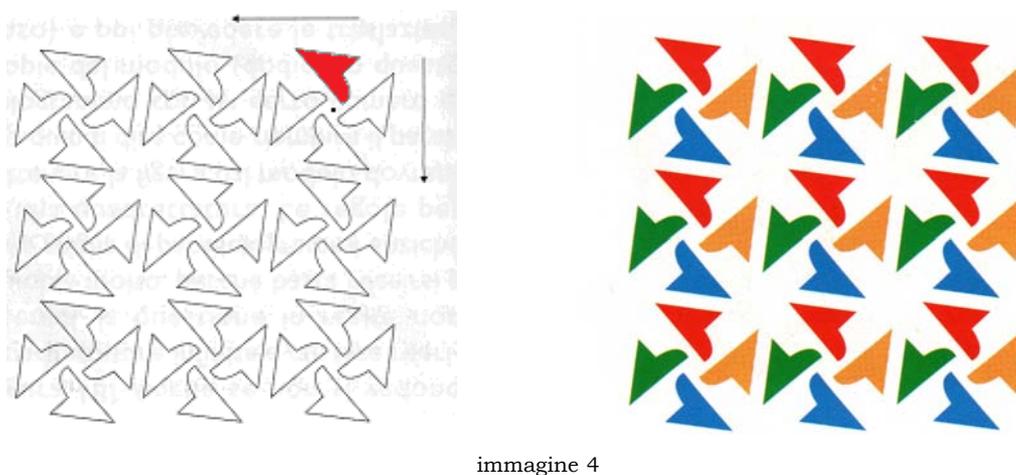
Esistono anche figure simmetriche illimitate, di cui ogni raffigurazione ne rappresenta solo una parte, che risulta però sufficiente per far comprendere come è stata costruita.

<sup>4</sup> le immagini 1, 2, 3 e 4 sono state tratte da BELLINGERI et. al. 2001, pp. 34, 36, 39 e 43.

Ad esempio nell'immagine 3 è riportata una figura simmetrica in cui al modulo, costituito da un poligono rosso insieme ad uno blu, viene ripetutamente applicata la traslazione indicata dal vettore. Questa trasformazione può essere iterata all'infinito senza mai tornare al punto di partenza, costruendo così una figura illimitata, di cui quella riportata qui sotto non è che una rappresentazione parziale.



Un altro esempio di figura simmetrica infinita è quello riportato nell'immagine 4. In questo caso al modulo sono state applicate prima 4 rotazioni successive di  $90^\circ$  intorno al punto segnato, quindi la figura così ottenuta è stata colorata e ripetutamente traslata secondo i vettori indicati.



Una delle attività tipiche della matematica è quella di “mettere ordine”, cioè di raggruppare in una stessa categoria oggetti che presentano caratteristiche comuni. Le figure possono essere classificate a seconda del loro *gruppo di simmetria*, cioè dell'insieme di tutte le

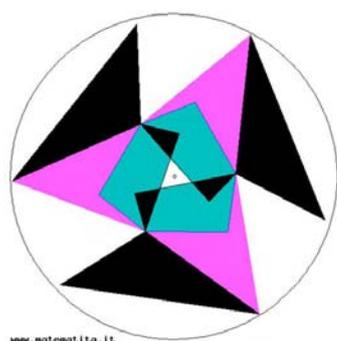
isometrie che le lasciano fisse, di cui tre sono particolarmente interessanti: rosoni, fregi e mosaici.

## Rosoni

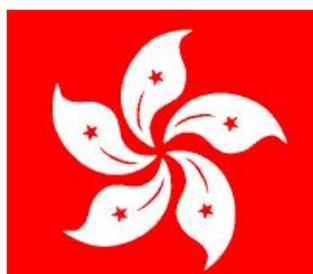
In matematica si chiamano rosoni quelle figure piane il cui gruppo di simmetria contiene un numero finito di trasformazioni.

In particolare sono *rosonei ciclici* quelle figure il cui gruppo di simmetria contiene solo rotazioni, sono *rosonei diedrali* invece quelle figure che sono fissate da uno stesso numero di rotazioni e di riflessioni.

Oltre a quello riportato nell'immagine 1, sono rosoni ciclici il fiore giallo di pagina 33 e le figure<sup>5</sup> riportate qui sotto<sup>6</sup>.



(C3)



bandiera di Hong Kong (C5)



centurione (C6)

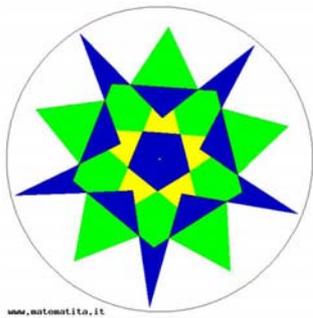
Sono rosoni diedrali il simbolo della farmacia riportato a pagina 33, la figura dell'immagine 2 e quelle riportate nella pagina seguente<sup>7</sup>.

---

<sup>5</sup> Tutte le immagini che seguono sono state tratte dal sito [www.matematita.it](http://www.matematita.it) / immagini per la matematica.

<sup>6</sup> La sigla riportata sotto ad ogni immagine segnala che si tratta di rosoni ciclici (C) e indica il numero di rotazioni che è necessario applicare al modulo per costruire l'intera figura.

<sup>7</sup> La sigla riportata sotto ad ogni immagine segnala che si tratta di rosoni diedrali (D) e indica il numero di rotazioni o riflessioni che è necessario applicare al modulo per costruire l'intera figura.



(D5)



trifoglio (D3)



sottopiatto (D8)

## Fregi

In matematica si chiamano fregi quelle figure piane illimitate il cui gruppo di simmetria contiene anche delle traslazioni tutte multiple di una traslazione base e quindi tutte in un'unica direzione.

Oltre a quello riportato nell'immagine 3 e alla decorazione in ferro battuto di pagina 33, sono rappresentazioni di fregi quelle riportate qui sotto.



orme



decorazione di una borsa del Mozambico

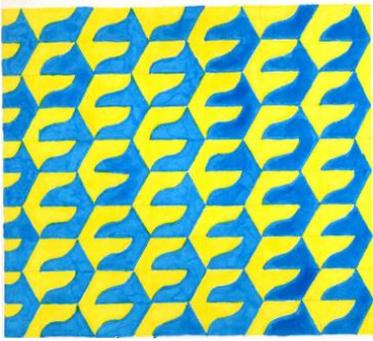


colonna con tre fregi

## Mosaici

In matematica si chiamano mosaici quelle figure piane illimitate il cui gruppo di simmetria è discreto e contiene anche delle traslazioni in almeno due direzioni differenti.

Sono rappresentazioni finite di mosaici la pavimentazione riportata a pagina 33, l'immagine 4 e le figure riportate nella pagina seguente.



disegno



suola di una ciabatta



tombino

## **SECONDA PARTE**

### **Il contesto scolastico**

Ho proposto il progetto sulla simmetria in una classe quarta di scuola primaria, tra marzo e maggio 2008, durante la mia esperienza di tirocinio.

#### **La scuola**

L'Istituto Comprensivo Statale "Riccardo Massa" è composto da tre plessi di scuola primaria e uno di scuola secondaria di primo grado. Io sono stata accolta presso la sede centrale di via Brocchi 5, situata in una zona semiperiferica a nord-est di Milano.

L'Istituto è caratterizzato da una forte identità culturale e progettuale, dovuta, tra l'altro, alla continuità storica favorita dalla permanenza della stessa dirigente scolastica da quasi 20 anni.

"Pensare la scuola come apertura al mondo attraverso l'apertura di un mondo, da riempire ed occupare con il proprio corpo e la propria mente"<sup>1</sup>. Queste parole del pedagogo al quale la scuola è intestata sono punto di riferimento dell'agire educativo, illustrato nel Piano dell'Offerta Formativa.

La definizione degli obiettivi che l'istituzione collegialmente si pone nasce dall'analisi dei bisogni dei bambini e dalla volontà di promuovere il massimo livello di formazione possibile per ognuno, attraverso attività strutturate e sperimentali. Grazie alle diverse collaborazioni che la Scuola ha intessuto con le associazioni presenti sul territorio, vengono realizzati numerosi progetti didattici extracurricolari, spesso condotti da esperti in collaborazione con i docenti. Queste attività si snodano intorno a tre obiettivi principali: la promozione di uno sviluppo congiunto di corpo e mente (sport, teatro, educazione alla salute, educazione stradale, educazione all'affettività...), l'integrazione degli

---

<sup>1</sup> Dal P.O.F. dell'Istituto Comprensivo "Riccardo Massa" 2007/2008, p. 2.

alunni stranieri e diversamente abili e la continuità educativa e didattica tra i diversi livelli di scuola.

L'Istituto punta inoltre a configurarsi come comunità d'apprendimento. Per questo molta attenzione è costantemente rivolta all'aggiornamento degli insegnanti e di tutto il personale che vi opera, attraverso corsi di formazione continua tenuti da interni o da personale specializzato esterno.

L'Istituto ha ottenuto nel 2004 la Certificazione di Qualità UNI EN ISO 1991:2000, una documentazione europea che attesta appunto la qualità della scuola e che incentiva al continuo miglioramento del servizio.

Il plesso di via Brocchi è costituito da un ampio edificio di tre piani costruito negli anni Sessanta e circondato da un giardino dotato di doppia recinzione, utilizzato per il gioco dei bambini e, in piccola parte, come orto. All'interno della scuola è stato scelto di posizionare le classi del medesimo anno in aule che si affacciano su uno stesso atrio, che viene utilizzato attivamente da insegnanti e alunni come luogo laboratoriale durante le attività in compresenza e come spazio di socializzazione e di gioco nell'intervallo.

In tutto l'edificio sono state abbattute le barriere architettoniche, facilitando l'accesso dei bambini in difficoltà ai piani superiori con delle pedane automatizzate.

La scuola è sede della direzione e della segreteria, ha inoltre un'aula di lingue, un'aula di scienze, uno spazio per la pittura e uno per le attività teatrali, la palestra e un'aula di psicomotricità, la biblioteca, il refettorio e un'aula per gli insegnanti.

### **La classe 4<sup>a</sup> B**

Tra novembre 2007 e marzo 2008, durante la fase di tirocinio basata sull'osservazione e la partecipazione alle attività didattiche, ho avuto modo di conoscere la classe alla quale avrei proposto il percorso sulla simmetria.

La 4<sup>a</sup> B è composta da 17 bambini, di cui 9 maschi e 8 femmine. Gli alunni si presentano come un gruppo molto diversificato sia come capacità e stili di apprendimento, sia a livello comportamentale. Tuttavia sono abbastanza uniti tra di loro, ognuno riconosce ai compagni competenze e peculiarità che portano al rispetto reciproco e al superamento dei conflitti che a volte animano la vita scolastica.

In classe regna spesso un clima vivace che porta ad una certa confusione di sottofondo e ad uno scarso ascolto di chi sta parlando, sia che si tratti di un compagno, sia di un insegnante.

Le attività scolastiche sono quasi sempre svolte individualmente ma, su richiesta esplicita delle insegnanti, si realizzano anche momenti di collaborazione, tradotta nella pratica quasi sempre come semplice aiuto reciproco e non come vera e propria cooperazione.

L'aula in cui è collocata la 4<sup>a</sup> B si trova al secondo piano della scuola, vicino alle altre classi quarte. Si tratta di un locale abbastanza ampio e luminoso, grazie alle finestre che danno sul cortile e che ne occupano un intero lato. La disposizione dei banchi degli alunni è più volte modificata dalle insegnanti, a seconda delle attività proposte. Spesso gli alunni sono disposti a coppie o file frontali rispetto alla lavagna, ma non mancano momenti in cui i banchi sono uniti in gruppi o a formare due grandi tavoli disponibili per attività manipolative.

In aula sono presenti tre armadi contenenti cancelleria, libri e altro materiale degli insegnanti. Su una scaffalatura invece sono raccolti i libri e i quaderni degli alunni, in modo tale che ognuno abbia a propria disposizione uno spazio specifico, all'interno del quale autogestire la raccolta e l'ordine del proprio materiale.

Alle pareti sono appesi una carta dell'Italia, un planisfero e alcuni cartelloni con i lavori realizzati dagli alunni o che riassumono alcune regole studiate.

Nell'insegnamento delle diverse discipline si alternano cinque docenti. Oltre all'insegnante a cui è affidato l'ambito scientifico e matematico, che è stata mia tutor per le attività di tirocinio, e a quella che si occupa dell'area linguistica, intervengono due insegnanti di un'altra classe quarta per storia e inglese, alle quali si aggiunge la specialista di religione. In classe è inoltre quasi sempre presente l'insegnante di sostegno. Questo alternarsi di docenti non crea però discontinuità in quanto, pur avendo ognuno un proprio stile e una modalità personale di insegnamento e di interazione con la classe, è presente un accordo sulle linee educative generali. In questa scuola inoltre gli insegnanti delle classi parallele collaborano costantemente tra loro nella programmazione didattica non solo per ciò che riguarda la definizione degli argomenti e degli obiettivi generali da raggiungere, ma concordando anticipatamente anche le attività da proporre in ogni sezione.

### **Matematica in 4<sup>a</sup> B**

La mia osservazione e partecipazione a numerose lezioni di matematica mi è stata utile per progettare un percorso che, pur proponendo qualcosa di nuovo, non si ponesse in netto contrasto con le modalità didattiche utilizzate dalla docente tutor e ben conosciute dagli alunni.

La metodologia adottata dall'insegnante di matematica è prevalentemente frontale, anche se la docente si è sempre mostrata interessata e disponibile verso proposte alternative, come il mio progetto. Le lezioni di matematica si svolgono sostanzialmente attraverso il completamento di schede didattiche predisposte dalla docente, ricche di esercizi in cui viene richiesta l'applicazione delle regole o delle strategie studiate. L'insegnante è molto attenta ad adeguare la proposta delle schede di difficoltà crescente alla correttezza delle risposte e ai tempi della classe, modificando anche la propria programmazione, qualora lo ritenga opportuno.

Nella spiegazione degli argomenti nuovi l'insegnante adotta una strategia induttiva, proponendo agli alunni un input che provochi in loro la ricerca di spiegazioni logiche a quanto di nuovo hanno visto in atto. La docente cerca quindi di valorizzare quanto di positivo è presente nei vari interventi dei bambini, fino ad arrivare ad una spiegazione formale fatta da lei, attraverso la sistematizzazione dei vari contributi.

L'esecuzione degli esercizi è svolta in modo per lo più individuale. Le schede sono a volte assegnate all'intera classe, spesso invece le attività sono differenziate. L'insegnante infatti è molto attenta alle difficoltà specifiche di ognuno e riesce a calibrare le proposte di recupero o potenziamento alle reali esigenze di ciascun alunno. Questa diversificazione delle attività è pienamente accettata e condivisa dai bambini, che hanno compreso come l'errore sia una parte integrante del processo di apprendimento e quindi come sia necessario per ognuno lavorare su aspetti diversi per arrivare tutti al medesimo obiettivo.

Sono quasi assenti reali attività problematiche. Ciò che infatti in classe viene chiamato "problema" non è altro che la richiesta di eseguire alcune operazioni in sequenza, mascherata dalla descrizione di un contesto, magari attraente, ma lontano dalla complessa realtà nella quale i bambini sono immersi, come invece la ricerca individua come prassi maggiormente efficace e ho illustrato nella prima parte<sup>2</sup>

Poco spazio è riservato alla geometria, che maggiormente si presta ad un insegnamento ricco di attività pratiche, idealmente promosse e desiderate dall'insegnante, ma raramente praticate, a causa della scarsità di tempo disponibile.

Gli alunni hanno sviluppato livelli molto differenti di competenze in matematica. Di fronte ad alcuni bambini in grado di apprendere velocemente nuovi argomenti e strategie, la maggior parte della classe si situa in un livello medio, con difficoltà particolari per ogni alunno.

---

<sup>2</sup> in particolare si vedano pp. 28-32 del presente lavoro.

Inoltre per quattro alunni, a partire da gennaio, è stato necessario svolgere un programma di recupero individualizzato, avendo questi manifestato un'incapacità a mantenere il ritmo di apprendimento dei compagni.

Prima di iniziare il mio progetto, ho chiesto agli alunni di compilare un breve questionario<sup>3</sup>, allo scopo di capire quali fossero gli argomenti e le modalità didattiche da loro preferite nell'apprendimento della matematica.

Alcune risposte mi sono sembrate particolarmente interessanti, in quanto mostrano qual è il rapporto che gli alunni hanno con la disciplina, indipendentemente dal loro rendimento. In particolare, quando ho chiesto "Che cosa ti piace della matematica?" e "Che cosa invece non ti piace?", la quasi totalità dei bambini ha risposto citando argomenti trattati di recente. Questo entra però in contrasto con quanto emerge dalle risposte alla domanda "Ti ricordi un argomento o un'attività che ti sono piaciuti particolarmente?". Qui per rispondere alcuni alunni si sono spinti nella ricerca indietro anche di uno o due anni.

In generale le attività più apprezzate sono quelle che si allontanano dalle schede di esercizi che i bambini svolgono tutti i giorni; si trovano infatti in queste risposte attività di collaborazione (i problemi a coppie o a gruppo) o che richiedono una parte pratica (*"quando usavamo i regoli per formare dei numeri"*).

Ho notato come nessuno abbia accennato ad attività o argomenti di geometria. Questo forse è dovuto sia al fatto che si tratta di una parte della matematica a cui viene dedicato un minor numero di ore, sia al fatto che normalmente a scuola con "matematica" si indicano tutte le attività aritmetiche, mentre la geometria viene trattata come se fosse una materia a sé stante e non una branca della stessa disciplina.

---

<sup>3</sup> Cfr. Allegati 27, 28, 29 e 30.

## Le mie scelte

Di seguito cercherò di illustrare brevemente il percorso che mi ha portato a compiere le principali scelte di contenuto e di metodo nella progettazione delle attività di matematica da proporre agli alunni.

Verso giugno 2007 ho deciso di scrivere la mia relazione finale sulla didattica della matematica, spinta dall'intento di proporre ai bambini un progetto che permettesse loro di costruire attivamente la propria conoscenza in questa disciplina, sperimentando personalmente come la matematica non sia noiosa e astratta ma possa risultare vicina alla quotidianità, interessante e anche simpatica.

Volendo conciliare questa scelta con quella di seguire il major linguistico nell'ultimo anno universitario, insieme alla dott.ssa Cazzola si è pensato di progettare un percorso che, partendo dalla lettura di testi in cui la matematica fosse in qualche modo presente, andasse ad affrontare gli argomenti disciplinari accennati nella narrazione.

Dopo aver cercato e letto alcuni libri<sup>1</sup> di questo genere, la mia attenzione si è focalizzata su "Il re dello spazio infinito" di Siobhan Roberts, biografia di Donald Coxeter, geometra che "salvò la geometria", come recita il sottotitolo, dalla sua deriva astratta. Questa scelta è stata dettata dal fatto che il matematico ha dedicato buona parte della propria vita allo studio della simmetria, argomento che, con i necessari adattamenti, può essere pienamente proposto anche agli alunni di una scuola primaria. Si tratta inoltre di un testo scritto in modo piacevole e accattivante ma dedicato ad un pubblico adulto. Questo aspetto non mi è parso un limite, piuttosto una sfida didattica e una possibile apertura verso attività di approfondimento anche in ambito linguistico.

---

<sup>1</sup> In particolare ho letto: "Il mago dei numeri" di Hans M. Enzensberger, "Alice nel paese delle meraviglie" e "Attraverso lo specchio magico" di Lewis Carrol, "Il teorema del pappagallo" di Denis Guedj e "Il re dello spazio infinito" di Siobhan Roberts.

È iniziata quindi la fase di documentazione personale, volta ad approfondire la mia conoscenza sull'argomento matematico in questione e sul suo insegnamento nella scuola primaria.

Essendo la simmetria uno dei temi trattati nel corso di Istituzioni di Matematiche 2, che avevo seguito durante il secondo anno d'università, ho inizialmente ripreso i contenuti che qui erano stati trattati. Ho poi avuto l'opportunità di conoscere e visitare la mostra "Simmetria, giochi di specchi"<sup>2</sup>, dove immagini simmetriche vengono fatte riconoscere e ricostruire ai partecipanti grazie all'uso di specchi e caleidoscopi, utilizzati inizialmente in modo ingenuo e sperimentale, poi sempre più in maniera consapevole e mirata. Avendo osservato anche la visita di una classe di scuola primaria, la mostra mi ha fornito numerosi stimoli e indicazioni su possibili attività da condurre in classe con gli alunni.

Ho poi cercato dove, nei documenti ministeriali, si parla di trasformazioni geometriche e di simmetria, così da programmare il mio intervento in sintonia con quanto indicato.

Nelle Indicazioni per il Curricolo<sup>3</sup>, tra gli "Obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria" in matematica, nella sezione Spazi e figure, compaiono:

- "Descrivere e classificare figure geometriche, identificando elementi significativi e simmetrie, anche al fine di farle riprodurre agli altri.
- (...)
- Riconoscere figure ruotate, traslate e riflesse."<sup>4</sup>

Ho quindi cercato in alcuni sussidiari per la scuola primaria la parte dedicata alla simmetria, allo scopo di comprendere come questa viene normalmente presentata, per coglierne gli spunti positivi e progettare gli elementi differenti nella mia proposta.

---

<sup>2</sup> Si tratta di una mostra permanente proposta dal Centro Matematica nel Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano in via Saldini 50.

<sup>3</sup> Mi riferisco alle "Indicazioni Nazionali per il Curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo d'istruzione" divenute unico punto di riferimento nella progettazione delle attività didattiche a partire dal settembre 2007, come da D.M. del 31 luglio 2007.

<sup>4</sup> "Indicazioni per il curricolo", p. 96.

Nei vari libri che ho avuto modo di consultare, ho colto tre aspetti ricorrenti:

- la frammentazione dell'argomento "simmetria" in più anni;
- la coincidenza del concetto di simmetria con quello di riflessione, per cui non compaiono tra le figure simmetriche né rosoni ciclici, né fregi, né mosaici;
- gli scarsi riferimenti ad elementi simmetrici non inerenti a figure geometriche o a disegni preparati ad hoc.

Quando a novembre del 2007 ho iniziato l'attività di tirocinio, ho potuto constatare come le trasformazioni geometriche fossero presenti nella programmazione annuale per la classe quarta, dove si dichiara che l'alunno "Riconosce figure ribaltate, traslate e ruotate" e "Costruisce figure ribaltate, traslate e ruotate"<sup>5</sup>, obiettivi che ben si sono inseriti tra quelli del mio percorso.

La progettazione delle attività, così come la loro verifica, è stata sempre svolta in collaborazione con l'insegnante tutor, mentre nella conduzione delle stesse, dopo un sostegno iniziale, la docente mi ha lasciato agire in autonomia.

Per adattare il percorso alle esigenze della realtà in cui mi sono trovata ad operare, è stato necessario portare alcune modifiche al disegno iniziale. La parte dedicata alla lettura è stata ridotta ad un unico momento, seguito dai bambini con molta attenzione. Così proposto, si è trattato solo di un modo per mostrare come la simmetria è affrontata quotidianamente anche dai grandi matematici.

A livello contenutistico è stato necessario collegare la mia proposta alle conoscenze già possedute dagli alunni e andare a colmare alcune lacune. Così ho concordato di inserire alcune attività iniziali volte all'apprendimento del concetto di congruenza e ho cercato di riprendere e valorizzare le esperienze pratiche di piegatura e ritaglio di un foglio,

---

<sup>5</sup> da "Programmazione annuale classe quarta – anno scolastico 2007/2008" dell'Istituto Comprensivo Statale "Riccardo Massa", p. 3.

svolte dagli alunni quando erano in seconda, nell'iniziare a parlare di simmetria.

Anche a livello metodologico è stato necessario porre la mia proposta in continuità con le normali attività della classe, senza tuttavia rinunciare a quanto di innovativo avrei potuto portare. Nelle scelte compiute ho trovato il completo appoggio dell'insegnante tutor verso attività manipolative e che coinvolgessero in modo attivo gli alunni.

In particolare:

- ho scelto il lavoro individuale, in continuità con la quotidiana modalità operativa adottata in classe, per quei compiti che gli alunni sarebbero stati in grado di svolgere da soli e nei momenti in cui è stato necessario verificare le conoscenze acquisite da ognuno e individuare i nodi critici;
- sono state condotte discussioni collettive per condividere i risultati e le considerazioni alle quali giungevano i piccoli gruppi, in modo da costruire un sapere condiviso, sul quale fondare le nuove attività di ricerca;
- ho strutturato come spiegazioni partecipate i momenti in cui illustravo le caratteristiche di ciascuna trasformazione geometrica, allo scopo di dare una forma chiara e stabile alle conoscenze in parte già intuite precedentemente dagli alunni;
- ho proposto il lavoro in piccoli gruppi nella maggior parte delle attività in cui era necessaria la collaborazione e la messa in comune delle conoscenze di ognuno per risolvere il compito assegnato. La suddivisione dei bambini è sempre stata concordata insieme all'insegnante tutor, con criteri differenti a seconda delle esigenze della classe e dei risultati ottenuti nelle attività precedenti. Per la maggior parte del percorso la classe è stata divisa a seconda delle competenze in matematica, creando così due gruppi di livello. Questa divisione si è rivelata efficace in quanto, trovandosi insieme a compagni con modalità e ritmi d'apprendimento simili ai propri, ogni alunno ha avuto la possibilità di imparare con un confronto e in un tempo adatto a sé. Trattandosi inoltre di gruppi abbastanza numerosi i bambini non hanno

mostrato di sentirsi classificati o giudicati negativamente in base al proprio rendimento. La proposta che ho fatto a entrambi i gruppi è stata la medesima, così ognuno è arrivato al raggiungimento degli stessi obiettivi. I gruppi si sono alternati nello svolgimento delle attività, in modo da proseguire, insieme all'insegnante tutor, anche la normale programmazione didattica, che comunque è stata ridotta per dare ampio spazio al mio progetto.

## Il mio progetto

Il mio progetto si è concretizzato nella proposta di sedici attività con l'obiettivo di far conoscere il concetto di congruenza, le isometrie e la simmetria. Di seguito ne riporto un breve resoconto.

### La congruenza

#### Prima attività

Obiettivo: saper riconoscere e produrre figure congruenti.

Ai bambini ho chiesto di provare a disegnare le figure geometriche da loro conosciute, ripassando i segmenti di una griglia tratteggiata composta da triangoli equilateri.<sup>1</sup>

Al termine della fase di disegno, ho proposto una breve discussione introdotta dalla domanda: *“Quali figure siete riusciti a disegnare?”*. Gli alunni hanno risposto elencando il triangolo isoscele, il trapezio isoscele, il parallelogramma, il rombo e l'esagono regolare (si vedano gli esempi nell'Allegato1), poligoni dei quali ho chiesto di elencare le caratteristiche conosciute. Quindi ho domandato quali fossero le figure che non erano riusciti a rappresentare e se sapevano spiegarne il perché. È stato risposto che quadrato, rettangolo e triangolo rettangolo non potevano essere disegnati perché, seguendo il tratteggio, era impossibile realizzare angolo retti.

Partendo quindi dal tentativo di comprendere il significato del titolo riportato sul foglio *“Griglia isometrica tratteggiata”*, i bambini si sono scontrati con il termine *“isometrico”* di cui non conoscevano il significato. Unendo i contributi di chi ha ricordato che *“metrico”* è solitamente legato a qualcosa che si misura e di chi ha associato questo termine all'aggettivo *“isoscele”*, gli alunni hanno compreso che *“isometrico”* significa *“che misura uguale”* e nel titolo indicava il fatto che la griglia era composta da tanti triangoli tutti con i lati uguali.

---

<sup>1</sup> Scheda di lavoro tratta da COLOMBO BOZZOLO et al., 2004.

Al termine della discussione ho chiesto agli alunni di riportare su una seconda griglia, identica alla precedente, una delle figure disegnate prima, quindi di riprodurre tante congruenti fino ad occupare più spazio possibile e cercando di disporre le figure in modo ordinato. I bambini non hanno avuto problemi nel realizzare quanto richiesto, mostrando così di aver ben compreso il concetto di congruenza. Hanno mostrato invece qualche incertezza nel definire l'ordine in cui disegnare le figure. La mia richiesta era stata appositamente imprecisa, perché spinta dall'intenzione di verificare cosa spontaneamente sarebbero riusciti a produrre. I risultati sono stati infatti abbastanza diversificati<sup>2</sup>: alcuni hanno composto delle vere pavimentazioni, riuscendo a ricoprire l'intera griglia, altri hanno occupato solo parte dello spazio disponibile, lasciando dei vuoti tra le figure, qualcuno infine ha applicato ingenuamente anche delle riflessioni alle proprie figure.

### Seconda attività

Obiettivo: saper riconoscere e produrre figure congruenti, saper prevedere i risultati combinando le figure.

Ho avviato l'attività con una breve discussione in cui ho chiesto agli alunni di osservare alcuni dei loro lavori realizzati la volta precedente, da me scelti perché particolarmente rappresentativi dell'eterogeneità dei prodotti, e di formulare qualche riflessione in proposito. È così emerso che:

*“qualcuno ha occupato tutto lo spazio e qualcuno ha lasciato dei buchi”;*

*“qualcuno ha girato le figure, altri le hanno riprodotte sempre nella stessa posizione”.*

Dopo aver raccolto queste osservazioni, ho distribuito a ciascuno una nuova griglia, sulla quale avevo colorato un poligono, scelto tra quelli identificati dai bambini la volta precedente. Ho quindi chiesto di

---

<sup>2</sup> Cfr. Allegati 2,3 e 4.

riprodurre tante figure congruenti a quella data, cercando di occupare più spazio possibile e riempiendo i poligoni con almeno due colori differenti.

Gli alunni hanno eseguito la consegna senza particolari difficoltà<sup>3</sup>. Alcuni bambini mi hanno però chiesto conferma del fatto che le figure che avevano subito una isometria fossero congruenti. Qualcuno si è limitato a riprodurre ciò che qualche compagno aveva disegnato la volta precedente, altri hanno cercato delle soluzioni nuove. In molti hanno usato tanti colori, non limitandosi a quelli necessari per la comprensione dei confini tra i poligoni. Solo in quattro sono riusciti ad occupare tutto lo spazio disponibile. Qualcuno non ha rispettato per l'intera griglia l'ordine dato inizialmente alle figure.

Al termine della colorazione, ho stimolato una breve discussione, facendo confrontare i lavori di due bambini che avevano la medesima figura (il trapezio isoscele) chiedendo di osservare come erano stati usati lo spazio e i colori. I primi commenti sono stati giudizi del tipo “è più bello quello di...”, solo in seguito a richieste più mirate i bambini sono riusciti a riflettere sul fatto che in un caso era stato occupato tutto lo spazio disponibile, usando molti colori, mentre nell'altro era rimasto dello spazio bianco ed erano stati utilizzati solo quattro colori. Alla domanda su quale poteva essere il numero minimo di tinte da utilizzare sono arrivati abbastanza facilmente a concordare sui due colori<sup>4</sup>.

Ho quindi mostrato i lavori fatti con gli esagoni. In questo caso i bambini sono arrivati ad affermare che non era possibile occupare l'intera griglia senza “spezzare le figure”, anche se si sarebbero potute adottare disposizioni differenti e usare solo due colori.

---

<sup>3</sup> Cfr. Allegati 5,6 e 7.

<sup>4</sup> Si tratta questo di un problema alla base di un teorema di matematica: il teorema dei quattro colori che non ha nulla a che vedere con simmetrie e tassellazioni, ma è un'occasione per fare dei collegamenti “interdisciplinari” all'interno della matematica.

Per un approfondimento di questo teorema si veda COURANT – ROBBINS *Che cos'è la matematica* Ed. Bollati Boringheri, Torino, 2000, pp. 311-314.

Questa attività ha permesso il consolidamento del concetto di figura congruente e ha costituito un primo contatto con il mondo delle pavimentazioni.

## **Le isometrie**

### Terza attività

Obiettivo: saper manipolare, osservare e descrivere le figure e le loro posizioni.

La classe è stata divisa in quattro gruppi di quattro alunni, che hanno lavorato con me in due momenti differenti, metà classe per volta.

Ad ogni gruppo sono state consegnate alcune figure in cartoncino colorato, ripartite nel seguente modo:

- 1° gruppo: quadrati di cinque colori diversi
- 2° gruppo: quadrati di due colori diversi
- 3° gruppo: triangoli equilateri di cinque colori diversi
- 4° gruppo: triangoli equilateri di due colori diversi.

Ad ogni gruppo è stato affidato il compito di incollare le proprie figure su un foglio di formato A3, ricoprendo interamente la superficie, in modo tale che due poligoni dello stesso colore non fossero adiacenti.

Le modalità di lavoro dei gruppi sono state abbastanza differenti:

- 1° gruppo: si è subito creata una discussione tra gli alunni sul come disporre i quadrati colorati, fino a quando una bambina si è imposta affidando ai compagni il compito di mettere la colla sui cartoncini e assumendosi quello di posizionare i quadrati sul foglio. Sul prodotto finale si coglie l'iniziale intenzione di seguire un'alternanza fissa nella disposizione dei colori, che infatti si ripetono per tre volte nello stesso ordine, anche se questo criterio non è stato mantenuto sino alla fine;
- 2° gruppo: gli alunni hanno appoggiato tutti i quadrati sul foglio prima di incollarli, forse influenzati dal mio consiglio generale di provare

inizialmente a progettare la disposizione dei poligoni. Il prodotto finale presenta la costante alternanza dei due colori<sup>5</sup>;

- 3° gruppo: i bambini hanno avuto qualche difficoltà nella collaborazione dovuta ad una sovrapposizione di ruoli e al fatto che hanno subito disposto i triangoli a formare degli esagoni regolari, ma, avendo solo cinque colori differenti, sono nate delle incertezze nella scelta di quale colore riproporre. Nel prodotto finale non sono visibili ripetizioni costanti;

- 4° gruppo: i bambini si sono organizzati in modo tale da alternarsi equamente nell'incollare il retro dei triangoli di cartoncino e nel posizionarli sul foglio, dopo aver concordato insieme il modo in cui disporli. Nel prodotto finale è infatti facilmente identificabile l'ordine che si ripete per tutta la pavimentazione<sup>6</sup>.

Al termine della parte operativa ho chiesto agli alunni di scrivere come avevano lavorato e le osservazioni nate dal confronto del proprio prodotto con quello dei compagni. La prima richiesta è stata spinta dal mio desiderio di far riflettere gli alunni sulle modalità più efficaci di collaborazione, la seconda aveva invece l'obiettivo di portare il contributo di ogni gruppo alla discussione che sarebbe seguita. Le osservazioni più interessanti sono emerse dai componenti del 2° gruppo che hanno notato che sul proprio foglio *"in obliquo i quadrati sono dello stesso colore"*, mentre nell'altra pavimentazione i quadrati erano stati messi *"in ordine sparso"*. Così anche chi ha lavorato con i triangoli di due colori ha osservato che il proprio prodotto *"seguiva un ordine"*, mentre quello dei compagni no, pur avendo anche loro rispettato la consegna.

#### Quarta attività

Obiettivo: saper descrivere le figure, le loro posizioni e trasformazioni.

---

<sup>5</sup> Cfr. Allegato 8.

<sup>6</sup> Cfr. Allegato 9.

L'attività è consistita in una discussione collettiva svolta in aula, della durata di quasi un'ora.

Ho inizialmente letto ai bambini le riflessioni scritte al termine dell'attività precedente, quindi ho mostrato uno alla volta i loro prodotti, stimolando la formulazione di nuove osservazioni. Attraverso continui ampliamenti e precisazioni, gli alunni sono giunti a concordare sul fatto che le pavimentazioni formate da figure di due colori erano *“ordinate”* perché le figure presentavano un'alternanza fissa di colori e posizioni. In particolare i triangoli erano stati messi in modo da risultare *“uno a testa in su e uno a testa in giù”*.



Quindi, sullo schermo del computer presente in aula, ho mostrato agli alunni alcuni disegni periodici, per lo più riproduzioni di alcune tavole di Escher<sup>7</sup>, focalizzando l'attenzione su due di essi e avviando una discussione in

proposito.

In particolare, osservando la tavola dei cavallucci marini, gli alunni hanno osservato:

*“ci sono tanti cavallucci marini tutti uguali”*

*“sono disposti in modo da ricoprire tutto lo schermo”*

*“cambiano i colori e la posizione dei cavallucci”.*

Alla mia richiesta di provare a descrivere come cambia la posizione dei cavallucci, i bambini hanno risposto:

---

<sup>7</sup> I disegni sono stati tratti da SARTORE DAN 2002.

*“ci sono cavallucci che hanno la testa in giù e cavallucci che hanno la testa in su”*

*“i cavallucci dello stesso colore è come se salissero”.*



Osservando in seguito la tavola dei cani, i bambini hanno commentato:

*“ci sono tanti cani uguali disposti in modo che riempiono l'intera superficie”*

*“cambiano i colori e la posizione dei cani”*

*“ci sono cani con la testa in su e cani con la testa in giù”*

*“i cani dello stesso colore è come se si muovono in orizzontale”.*

Quando ho fatto notare come certi cani non fossero rappresentati interamente ma visibili solo in parte e ho chiesto se riuscivano a immaginare il disegno completo, gli alunni hanno subito risposto in modo affermativo. Ho allora domandato se secondo loro fosse possibile rappresentare la continuazione di questo quadro e fino a quale dimensione. I bambini hanno concordato con assoluta facilità che era possibile farlo *“fino all'infinito”*.

Così, attraverso la discussione, gli alunni hanno focalizzato la propria attenzione sui possibili movimenti delle figure su un piano, dandone una prima descrizione sommaria e priva di ogni termine specifico, ma

necessaria per arrivare alla comprensione delle trasformazioni geometriche.

### Quinta attività

Obiettivo: saper costruire disegni periodici.

Ho introdotto l'attività con un breve riepilogo delle caratteristiche individuate dai bambini nei disegni osservati la volta precedente. Quindi ho chiesto ad ognuno di provare a comporre un disegno periodico su un foglio con una quadrettatura di 2cm, cercando di ripetere una figura che fosse creata da loro e non necessariamente una delle forme geometriche studiate. Ho quindi consigliato di tracciare prima tutti i contorni, per verificare di non lasciare spazi bianchi, poi di colorare le figure congruenti in modo da distinguerle chiaramente.

Le modalità di lavoro dei bambini sono state differenti:

- circa metà degli alunni non ha mostrato particolari difficoltà e, grazie al supporto dei quadretti, ha trovato facilmente dei poligoni irregolari che soddisfacessero tutte le richieste;
- per alcuni il compito è stato invece abbastanza difficile perché sono partiti da un'idea più artistica che geometrica dell'attività. Questi alunni hanno subito ideato un disegno da ripetere, senza però verificare che si trattasse di una figura adatta al compito. Ad esempio un alunno mi ha detto che voleva fare un fiore che si ripetesse per tutto il disegno ma che non riusciva a concretizzare la sua idea. In questo e negli altri casi simili ho ritenuto che le immagini visionate come esempio fossero state leggermente fuorvianti, così mi è sembrato opportuno mostrare alcune pavimentazioni ottenute solo con poligoni irregolari e quindi chiedere di riprodurre qualcosa che fosse più simile a questo tipo di disegno periodico che non ai precedenti. Nonostante un po' di delusione iniziale, i bambini sono comunque riusciti a produrre una pavimentazione;
- infine qualcuno ha avuto notevoli difficoltà ad iniziare il lavoro, come se fosse completamente senza idee. In questi casi ho suggerito di disegnare un rettangolo o un quadrato e di provare a dividerlo in due

poligoni congruenti ma posizionati in modo differente, per poi riprodurre il disegno così ottenuto per tutto il foglio. Seguendo questo percorso anche loro sono riusciti a completare il lavoro.

Diversi alunni hanno mostrato qualche perplessità nel momento in cui il proprio disegno non ricopriva interamente la griglia di riferimento. Di fronte a questa incertezza ho chiesto di provare a pensare a una possibile soluzione, rimandando all'attività successiva la discussione intorno a questo problema. Quasi tutti hanno però lasciato i bordi bianchi, senza trovare alternative.

I prodotti finali mostrano come tutti gli alunni abbiano pienamente compreso il concetto di congruenza e che ogni disegno periodico è composto dalla ripetizione di una stessa figura in posizioni differenti<sup>8</sup>. Non tutti sono però stati in grado di mantenere lo stesso ordine di ripetizione per l'intera pavimentazione, alcuni infine hanno lasciato degli spazi bianchi in mezzo al disegno<sup>9</sup>.

### Sesta attività

Obiettivo: individuare le trasformazioni geometriche presenti in una pavimentazione.

Per questa attività la classe è stata divisa in tre gruppi, composti ognuno da cinque alunni, che hanno lavorato alternativamente con me. Questa metodologia si è rivelata particolarmente efficace perché, grazie al numero limitato di bambini, sono riuscita a seguire ognuno in modo individualizzato e tutti, anche chi di solito è più restio, hanno partecipato in modo attivo e propositivo alla discussione.

Nella prima parte dell'attività ho fatto riprendere ad ogni alunno il disegno periodico che aveva composto la volta precedente, allo scopo di analizzarne insieme ai compagni le caratteristiche. In particolare ho chiesto di provare a spiegare perché aveva scelto quelle figure, come le

---

<sup>8</sup> Cfr. Allegati 10, 11 e 12.

<sup>9</sup> Cfr. Allegati 13 e 14.

aveva disposte sul foglio, come aveva alternato i colori e come aveva risolto l'eventuale problema dei quadretti bianchi ai margini.

In generale i bambini hanno individuato che tutte le figure da loro disegnate erano idonee al lavoro, ma che non sempre erano stati in grado di disporle rispettando il medesimo ordine per tutto il disegno. In questi casi ho quindi chiesto di indicarmi in quale modo si sarebbero dovute posizionare le figure e i bambini, a volte con qualche titubanza, sono stati in grado di indicarmi una maniera corretta. Per trovare invece una soluzione al problema dei margini bianchi ho chiesto agli alunni di ricordare le pavimentazioni viste come esempio la volta precedente, dove avevano notato la presenza di alcune figure di cui era stata disegnata solo una parte del modulo, sufficiente per capire come sarebbe proseguito il disegno. I bambini hanno quindi saputo indicare come sarebbe stato possibile colorare gli spazi lasciati bianchi sui propri prodotti in modo adeguato. In un solo gruppo, al termine di questa discussione iniziale, è stato necessario far ridisegnare ad ognuno almeno parte della propria pavimentazione, allo scopo di verificare se i numerosi errori commessi erano stati davvero compresi e superati.

Nella seconda parte dell'attività ho messo a disposizione dei bambini una stampa della pavimentazione dei "Cani" e di quella dei "Cavallucci marini", in formato A4, insieme ad alcune sagome dei cani e dei cavallucci, riprodotte su carta da lucido. Ho quindi chiesto di provare a spostare le sagome in modo da individuare i movimenti che conducono ogni figura nelle altre presenti nella pavimentazione e di provare a descrivere con le parole questi movimenti.

Attraverso diverse prove, il confronto con i compagni e le mie richieste volte all'approfondimento di quanto spontaneamente emerso, gli alunni sono stati in grado di identificare la presenza di tre movimenti differenti.

In particolare:

- in ogni gruppo è stato utilizzato dai bambini in modo spontaneo il termine "rotazione" e, su mia richiesta, alcuni sono stati anche in grado di identificare l'ampiezza di specifiche rotazioni;

- gli alunni hanno individuato abbastanza facilmente la presenza di un movimento che hanno definito “*camminata*”, “*trasportata*” o “*spostamento obliquo*”. Alla mia richiesta di cercare un modo per descrivere o rappresentare questo movimento, alcuni hanno pensato ad un segmento, altri ad una freccia;
- più difficile è stato per i bambini individuare la riflessione in quanto, per questo movimento, è stato necessario sollevare la sagoma dal foglio con la pavimentazione. Alla richiesta di trovare il movimento che portava da un cane ad un altro specifico, alcuni alunni mi hanno detto che bisognava “*capovolgere*” la figura, altri “*ribaltarla*”, altri infine “*sollevare e girare*” la sagoma.

### Settima attività

Obiettivo: conoscere la traslazione.

La nuova attività è stata introdotta dalla condivisione di quanto emerso nei vari gruppi la volta precedente.

Quindi ho spiegato che avremmo iniziato ad approfondire uno dei movimenti incontrati, quello che tutti avevano compreso può essere indicato da una freccia e che si chiama traslazione.

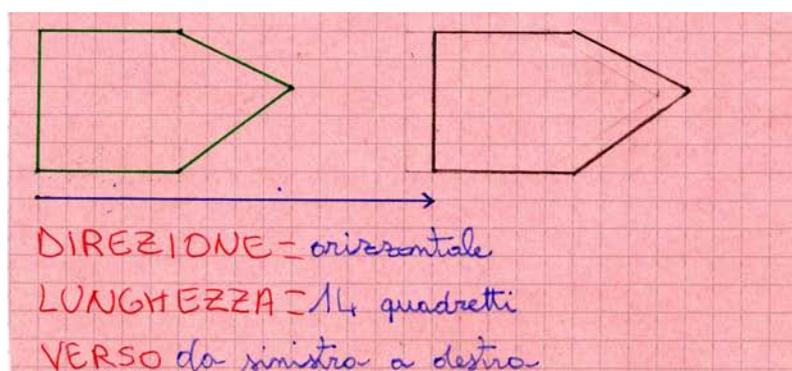
Ho illustrato le caratteristiche di questa trasformazione geometrica attraverso una spiegazione dialogata, in cui ho disegnato alla lavagna un esempio di traslazione, esplicitando la funzione di ogni mio gesto e chiedendo agli alunni la conferma sulla comprensione di quello che stavo facendo. Ho quindi chiamato ogni alunno alla lavagna per effettuare una traslazione, di cui io ho disegnato la figura di partenza e il vettore. Ho cercato di coinvolgere tutta la classe nell'eventuale correzione degli errori commessi dagli alunni di volta in volta chiamati alla lavagna.

In generale i bambini non hanno mostrato particolari difficoltà nella comprensione della trasformazione. La maggiore parte degli errori si è verificata infatti nel conteggio dei quadretti, soprattutto quando ho disegnato un vettore in direzione obliqua.

Dopo gli esercizi alla lavagna ho dettato all'intera classe la seguente spiegazione:

*“la traslazione è una trasformazione geometrica che viene indicata con una freccia che descrive la lunghezza, la direzione e il verso dello spostamento”*

e ho fatto copiare uno degli esempi disegnati alla lavagna.



Ho quindi proposto alcuni esercizi da svolgere individualmente, finalizzati al consolidamento di quanto appena appreso e alla verifica della reale comprensione da parte di ognuno.

### Ottava attività

Obiettivo: conoscere la rotazione.

Dopo qualche esercizio di ripasso sulla traslazione, ho introdotto la rotazione, cercando di seguire la stessa metodologia che si era rivelata efficace per la trasformazione precedente.

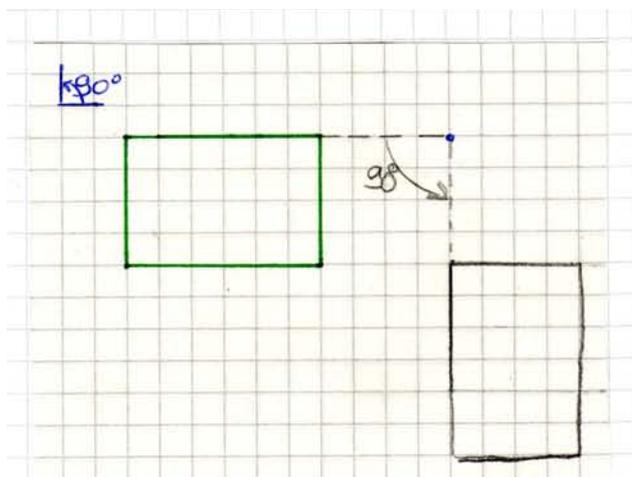
Ho quindi illustrato alla lavagna la rotazione di un rettangolo, descrivendo la funzione di ogni parte del disegno. Avendo avuto conferma dagli alunni sulla comprensione della spiegazione, ho fatto svolgere degli esercizi collettivi alla lavagna: un bambino disegnava guidato dai suggerimenti e dalle correzioni dei compagni. Gli alunni hanno mostrato subito di non aver difficoltà nell'individuare l'angolo di rotazione, mentre qualche problema è stato legato al disegnare la figura nella posizione corretta.

Un miglioramento in questo senso è nato quando ho suggerito ai bambini di provare ad immaginare una bandiera che ruota lasciando fissa l'estremità inferiore dell'asta.

Dopo numerosi esercizi collettivi ho dettato agli alunni la seguente spiegazione:

*“La rotazione è una trasformazione geometrica che viene identificata da un punto che si chiama centro di rotazione e da un angolo che indica l'ampiezza e il verso della rotazione”*

e ho fatto copiare un esempio.



Quindi ho fatto svolgere alcuni esercizi individualmente, durante i quali è stato evidente che per la maggior parte degli alunni la trasformazione risultava chiara, mentre alcuni avevano ancora delle difficoltà.

### Nona attività

Obiettivo: conoscere la riflessione.

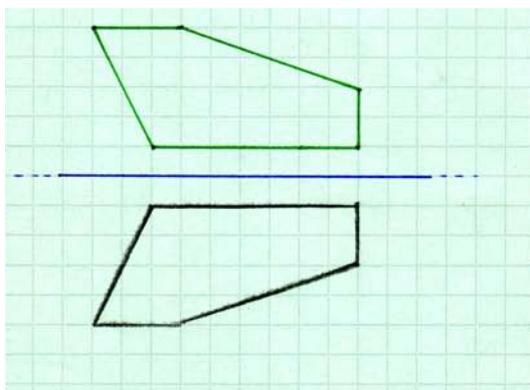
Per questa attività la classe è stata divisa in due gruppi che hanno lavorato con me alternativamente con le stesse modalità e risultati simili.

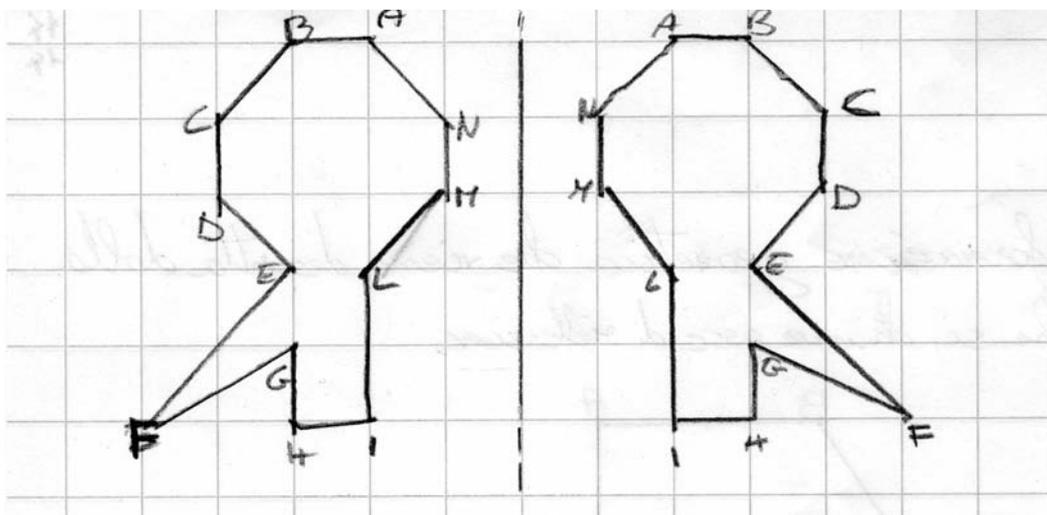
Ho inizialmente ripreso con i bambini la rotazione spiegata la volta precedente, allo scopo di consolidarne l'apprendimento e di chiarire gli eventuali dubbi rimasti.

Quindi ho chiesto di ripensare alle caratteristiche del movimento identificato nella pavimentazione dei cani che non avevamo ancora approfondito. Gli alunni si sono ricordati che *“si doveva alzare la figura, poi girarla e spostarla”*. Ho quindi spiegato loro che questa trasformazione geometrica si chiama riflessione e l’ho illustrata con un esempio, commentando man mano quello che disegnavo e affermando che l’asse di riflessione funziona come uno specchio o la linea lungo cui piegare il foglio fino a far combaciare le due figure. Negli esercizi svolti collettivamente, i bambini hanno mostrato di aver capito con facilità questa trasformazione. Così sono passata alla dettatura della seguente spiegazione:

*“La riflessione è una trasformazione geometrica che viene indicata da una retta che si chiama asse di riflessione”*

quindi ho fatto copiare a tutti un esempio e svolgere qualche esercizio individualmente. A chi ha terminato prima dei compagni ho proposto di provare a inventare un disegno e di rifletterlo secondo un asse da loro posizionato dove volevano, ottenendo dei buoni risultati.





### Decima attività

Obiettivo: consolidare la conoscenza e l'attuazione delle trasformazioni geometriche.

Anche per questa attività la classe è stata divisa in due gruppi che hanno lavorato alternativamente con me. Ho proposto degli esercizi da svolgere individualmente, in modo da verificare se le trasformazioni fossero state comprese da ognuno e dove si localizzassero le eventuali difficoltà.

In particolare, nella scheda "Gli animali ricamati"<sup>10</sup>, alcuni alunni hanno mostrato qualche incertezza nell'iniziare il disegno riflesso. Dopo un mio intervento di aiuto e guida, hanno però saputo completare da soli il compito in modo sostanzialmente corretto.

In "Robot"<sup>11</sup>, in cui era richiesto di effettuare due rotazioni, gli alunni hanno mostrato qualche incertezza legata al fatto che parte della figura ruotata sarebbe andata a sovrapporsi a quella di partenza. In questo caso ho ritenuto opportuno mostrare fisicamente come questo fosse possibile chiedendo a un alunno di provare a ruotare la propria gamba e il proprio braccio, mantenendo come centro di rotazione rispettivamente

<sup>10</sup> Cfr. Allegato 15.

<sup>11</sup> Cfr. Allegato 16.

l'anca e la spalla. L'esempio è stato abbastanza esauriente e gli alunni hanno completato in modo corretto la scheda.

“La bufera sull'isola”<sup>12</sup> chiedeva invece di applicare alcune traslazioni che sono state facilmente effettuate dagli alunni, che hanno compiuto solo qualche errore legato alla complessità dei disegni da riprodurre.

Entro la fine dell'attività tutti i bambini hanno mostrato di aver compreso in modo soddisfacente le trasformazioni geometriche studiate insieme.

### Undicesima attività

Obiettivo: consolidare la conoscenza, il riconoscimento e l'attuazione delle trasformazioni geometriche.

In questa occasione la classe è stata divisa in due gruppi in base alle competenze degli alunni in matematica, in modo da permettere contemporaneamente lavori di recupero e potenziamento e attività legate al mio progetto. Questa divisione si è rivelata particolarmente proficua, tanto che è stato deciso di ripeterla negli incontri successivi.

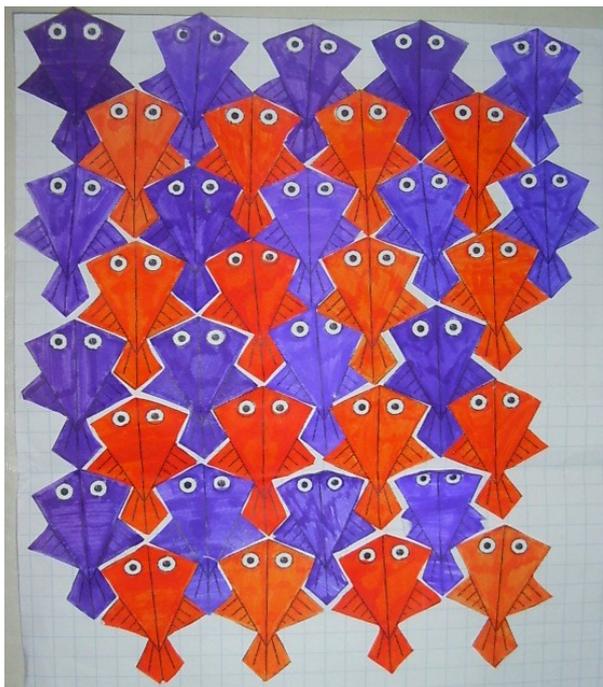
Nel primo gruppo, composto dagli alunni con maggiori difficoltà in matematica, ho distribuito ad ogni bambino le sagome di alcuni pesci, ispirati ai dipinti di Escher<sup>13</sup>, chiedendo di provare a capire se fosse presente qualche trasformazione geometrica. Con relativa facilità, hanno saputo individuare una riflessione e l'asse che la determinava. Gli alunni hanno quindi colorato tutti i pesci con due tinte differenti. Ho poi chiesto ad ognuno di provare ad accostare le proprie figure in un modo simile a quello che avevamo osservato nelle tavole dei “Cani” e dei “Cavallucci marini”, senza lasciare nessuno spazio bianco. Non tutti gli alunni sono riusciti a svolgere autonomamente questo compito, così ho chiesto di osservare le disposizioni trovate dai compagni e di ipotizzare con quali si sarebbe potuto ricoprire interamente il tavolo su cui stavamo lavorando.

---

<sup>12</sup> Cfr. Allegato 17.

<sup>13</sup> I disegni dei pesci e delle salamandre (si veda pagina seguente) sono stati tratti da SARTORE DAN 2002.

Con una breve discussione gli alunni hanno concordato su un'unica disposizione. Ho allora proposto loro di costruire la pavimentazione incollando tutti i pesci su un grosso foglio. Gli alunni si sono organizzati autonomamente e in modo efficace per risolvere questo compito.



Una volta ottenuta la pavimentazione, ho chiesto di identificare le trasformazioni presenti in essa. Questo compito è stato relativamente semplice per gli alunni che però hanno trovato qualche difficoltà nell'ammettere l'assenza di rotazioni, constatazione che è stata unanime solo dopo una lunga discussione e numerosi tentativi. In fondo alla

pavimentazione hanno quindi scritto:

*“Abbiamo trovato queste trasformazioni: traslazione con direzione orizzontale e verticale, riflessione all'interno dei pesci.*

*Non ci sono rotazioni.”*

Ai bambini del secondo gruppo ho proposto la medesima attività ma con sagome di salamandre. In questo caso erano presenti solo rotazioni che gli alunni hanno identificato con relativa facilità, riuscendo a segnalarne anche l'ampiezza e il centro di rotazione.

I bambini hanno lavorato solo sulla pavimentazione appoggiata sul tavolo, in quanto è mancato il tempo necessario per completare il lavoro incollandolo sul foglio.



## **La simmetria**

### Dodicesima attività

Obiettivo: definire il concetto di simmetria e riconoscere figure simmetriche.

Per questa attività la classe è stata suddivisa in due gruppi, che hanno lavorato alternativamente con me, secondo gli stessi criteri adottati nell'incontro precedente.

Ho iniziato proponendo una breve discussione volta alla condivisione delle preconoscenze sulla simmetria. Ho chiesto infatti quando, anche negli anni precedenti, ne avevano già sentito parlare.

Gli alunni hanno ricordato con facilità che, in seconda, avevano creato dei "fiocchi di neve" e dei "centrini" di carta, piegando un foglio a metà, tracciando un disegno, quindi riaprendo il foglio e verificando la formazione di un "*disegno doppio*" rispetto a quello iniziale.

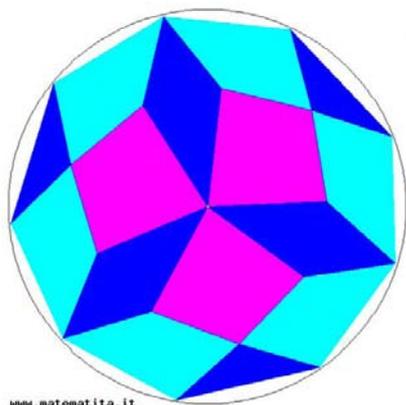
Qualcuno ha detto di conoscere l'"*asse di simmetria*" che nelle attività con la carta corrispondeva alla linea lungo cui bisognava piegare il foglio e di cui avevano parlato durante lo studio dei poligoni. In particolare, gli alunni hanno saputo ripetere che "*il triangolo equilatero ha tre assi di simmetria*", "*il quadrato ha quattro assi di simmetria*", "*il rettangolo ha due assi di simmetria*". Hanno poi affermato che in generale "*l'asse di simmetria è quella retta che divide una figura in due parti uguali*" e che "*la figura divisa può essere geometrica, come il quadrato, o non geometrica, come il fiocco di neve*".

In effetti dividere una figura in due parti uguali è una caratteristica dell'asse di simmetria ma non può essere considerata una definizione, perché sbagliata.

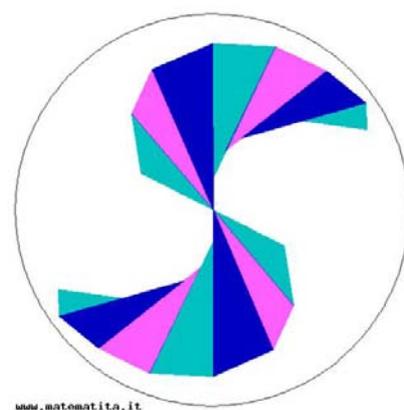
Il fatto che gli alunni abbiano fornito questa spiegazione non è preoccupante, anzi rappresenta un interessante punto di partenza. Più grave è invece il fatto che un'affermazione simile sia presente come definizione di simmetria in numerosi libri di testo. Per questo è necessario proporre ai bambini attività che mostrino l'esistenza di rette che dividono una figura in due parti uguali pur non essendo assi di

simmetria (ad esempio la diagonale di un rettangolo) e di altri tipi di simmetria oltre a quello legato alla riflessione.

Raccolte le prime considerazioni degli alunni, ho presentato loro alcune immagini<sup>14</sup> chiedendo di provare ad identificare l'eventuale presenza di assi di simmetria. Ho quindi mostrato ai bambini come fosse possibile utilizzare uno specchio<sup>15</sup> a questo scopo. Il compito di riconoscimento degli assi è stato eseguito dagli alunni prima collettivamente, poi ho rivolto delle richieste individuali, così da coinvolgere anche chi spontaneamente era più reticente ad esprimere il proprio pensiero.



Quando mi è parso che i bambini avessero compreso bene questa tecnica, ho mostrato una figura simmetrica per rotazione (come quella qui a lato). Dopo alcuni tentativi gli alunni hanno concordato sul fatto che non ci fosse nessun asse di simmetria, tuttavia alla mia domanda *“ma questa figura è simmetrica?”* hanno mostrato parecchie incertezze nella risposta.



Alcuni infatti sostenevano che non lo fosse a causa della mancanza di assi di simmetria, altri invece affermavano il contrario, pur non

---

<sup>14</sup> Tutte le immagini utilizzate sono state tratte dal sito [www.matematita.it/materiali](http://www.matematita.it/materiali) e si possono vedere nell'Allegato 18.

<sup>15</sup> Per motivi di sicurezza, gli specchi utilizzati con gli alunni sono stati realizzati con plastica riflettente autoadesiva incollata su cartoncino rigido.

riuscendo a giustificare la propria idea. Ho quindi spiegato che esistono figure, come quella presa in esame, che sono simmetriche pur non avendo assi di simmetria. In questi casi la simmetria si può verificare con una rotazione che, se applicata alla figura, la fa riapparire esattamente come era in partenza. Ho quindi chiesto di provare ad individuare l'ampiezza dell'angolo della rotazione che aveva questo effetto sull'immagine considerata. In un gruppo gli alunni hanno mostrato qualche difficoltà, così ho proposto loro un "giochino" volto alla ricerca delle rotazioni in grado di mandare la figura in se stessa. Un bambino avrebbe dovuto prendere in mano l'immagine e ruotarla mentre i compagni avevano gli occhi chiusi, quindi far riaprire gli occhi ai compagni e chiedere loro se la figura visualizzata era esattamente quella che avevano visto in precedenza. In caso di risposta affermativa, la figura era simmetrica per rotazione. A questo punto sarebbe stato necessario solo stabilire l'ampiezza dell'angolo tracciato dalla figura nella rotazione.

Ho mostrato agli alunni come anche alcune lettere dell'alfabeto, che avevo riprodotto su cartoncino colorato, potevano essere considerate delle figure simmetriche per riflessione (come la D) o per rotazione (come la S).



Ho quindi diviso gli alunni in sottogruppi composti da tre/quattro bambini, ho consegnato ad ognuno un specchio e le immagini stampate

o le lettere dell'alfabeto, chiedendo di riconoscere e segnare su un foglio quali figure fossero simmetriche e grazie a quanti assi di simmetria o a quali rotazioni.

La collaborazione tra gli alunni non sempre è stata semplice ma, entro la fine dell'attività, ogni gruppo è riuscito a trovare un modo efficace per cooperare. Spesso è stato chiesto un mio supporto nella classificazione delle figure più complesse.

I risultati finali sono stati molto positivi, ogni gruppo ha infatti classificato correttamente quasi tutte le figure e le lettere.

### Tredicesima attività

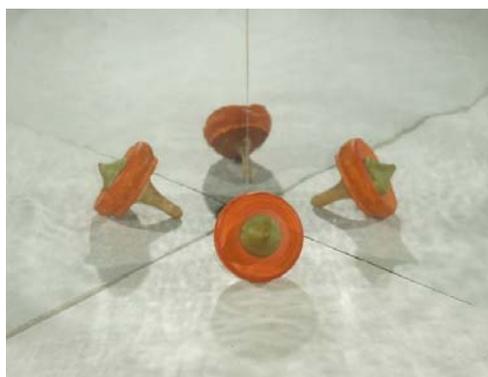
Obiettivo: saper identificare il tipo di simmetria presente in figure date.

Anche per questa attività è stata mantenuta la medesima divisione adottata nell'incontro precedente. Con entrambi i gruppi ho fatto precedere alla nuova proposta un breve riepilogo di quanto appreso la volta prima. Gli alunni si sono facilmente ricordati la suddivisione delle figure simmetriche in quelle che lo sono per riflessione e quelle che lo sono per rotazione.

Ho quindi mostrato una figura nella quale tutti gli alunni avevano correttamente individuato la presenza di quattro assi di simmetria e ho chiesto se questa fosse simmetrica anche per rotazione. Senza particolari difficoltà i bambini hanno risposto in modo affermativo e hanno individuato l'angolo minimo di rotazione di  $90^\circ$  e il modulo che si ripete. Ho così potuto mostrare il movimento indicatomi dagli alunni in modo da chiarire il concetto anche a chi era più titubante. I bambini sono stati in grado di compiere un ragionamento simile anche con altre figure.

Ho poi mostrato una camera a due specchi incidenti e ho posto una gomma in mezzo agli specchi aperti fino a formare un angolo di  $90^\circ$ . Gli alunni hanno notato con stupore come, grazie ai riflessi negli specchi, fossero visibili quattro gomme. Ho ripetuto l'esperienza con altri piccoli oggetti.

Ho quindi chiesto di provare a ipotizzare cosa sarebbe successo al diminuire dell'angolo di apertura degli specchi. I bambini si sono divisi in due schieramenti, alcuni sostenevano che il numero delle gomme riflesse sarebbe aumentato, altri che invece sarebbe diminuito, ma nessuno è



riuscito a trovare una giustificazione convincente per la propria posizione. Ho quindi chiesto di osservare quanto accadeva, mostrando come con un'apertura degli specchi di  $60^\circ$  le gomme visibili fossero sei e con un'apertura di  $45^\circ$  otto. Ho invitato gli alunni alla ricerca di una giustificazione di quanto avevano potuto osservare. Dopo alcuni tentativi e la mia guida nel ragionamento, gli alunni hanno compreso che *“con tutte le riflessioni degli specchi si completa l'angolo giro”*.

Ho poi fatto tracciare gli assi di simmetria su una delle figure analizzate e tagliare uno degli spicchi così ottenuti. Ho quindi fatto posizionare lo spicchio tra gli specchi incidenti a  $45^\circ$ , in modo tale che la figura si ricostruisse perfettamente.



Grazie a questa esperienza gli alunni hanno compreso come ognuna delle figure simmetriche da noi viste fosse formata da un modulo ripetuto più volte secondo le regole della riflessione o della rotazione.

Ho quindi consegnato agli alunni, divisi in coppie o gruppi di tre, due schede<sup>16</sup> in cui veniva chiesto di provare a spiegare quando una figura è simmetrica e di indicare il tipo di simmetria presente in alcune figure tratte dalla realtà intorno a noi. Per completare questa esercitazione alcuni alunni hanno utilizzato gli specchi che avevo lasciato a loro disposizione, altri invece non se ne sono serviti. La correzione è avvenuta collettivamente e ha mostrato come l'obiettivo fosse stato sostanzialmente raggiunto da tutti gli alunni.

Tra le spiegazioni del concetto di simmetria date dai bambini, le più interessanti sono state le seguenti:

- *“una figura è simmetrica quando è composta da una figura ripetuta secondo le regole della riflessione e della rotazione”;*
- *“una figura è simmetrica quando: tu disegni una figura e la ripeti finché non formi un'altra figura intera seguendo un certo ordine di rotazione o di riflessione”;*
- *“una figura è simmetrica quando ha almeno due parti uguali e forma una rotazione o una riflessione”.*



ha 5 assi di simmetria e 5 rotazioni da  $72^\circ$



rotazioni  $72^\circ$

---

<sup>16</sup> Cfr. Allegato 19, 20, 21 e 22.



tot.  $\geq 10n$   $180^\circ$



ha 1 asse di simmetria

#### Quattordicesima attività

Obiettivo: consolidare la conoscenza del concetto di simmetria attraverso la sua identificazione in alcuni segnali stradali.

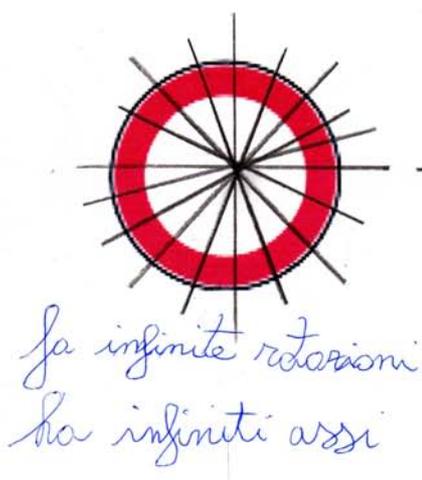
Anche per questa attività è stata mantenuta la medesima divisione in due gruppi di livello adottata in precedenza. Con entrambi ho svolto una piccola discussione iniziale volta al ripasso di quanto appreso nell'incontro precedente. Gli alunni hanno mostrato di ricordarsi bene le azioni compiute e i nuovi strumenti utilizzati. Tuttavia hanno avuto qualche difficoltà nel trovare le parole corrette per esprimere i concetti appresi, che però sembravano chiari nella loro mente.

Ho quindi consegnato ad ognuno una nuova scheda<sup>17</sup> in cui era chiesto di provare a trovare rotazioni ed assi di simmetria che evidenziassero la simmetria di alcuni segnali stradali. Ho chiesto di svolgere questa esercitazione individualmente, con l'intento di andare a verificare quanto i risultati positivi ottenuti in precedenza fossero frutto della collaborazione o fossero invece da attribuire alla competenza di solo qualche alunno all'interno del gruppo. Nel completare la scheda alcuni hanno mostrato molte incertezze, legate per lo più ad una non corrispondenza tra le simmetrie della figura geometrica che racchiude il cartello stradale e quelle che poi si mantengono nell'intero segnale.

---

<sup>17</sup> Cfr. Allegato 23.

La correzione è stata svolta collettivamente subito al termine dell'esercitazione. È emerso che la maggior parte dei bambini aveva commesso i medesimi errori, che sono così diventati oggetto di confronto e dibattito. In particolare l'attenzione si è focalizzata sul segnale di stop nel quale quasi tutti avevano tracciato 8 assi di simmetria, considerando solo l'ottagono in cui il cartello è racchiuso e non la scritta centrale. Per alcuni questa scelta era stata consapevole, in questi casi durante la correzione ho fatto semplicemente esplicitare che gli assi segnati si riferivano alla figura senza scritta.



Nel segnale di divieto di transito la maggior parte degli alunni, pur avendo compreso l'esistenza di infinite simmetrie, ha disegnato alcuni assi, come in rappresentanza di tutti gli altri. È stato necessario quindi discutere con i bambini fino a far comprendere loro come in questo caso fosse sufficiente segnalare a parole la presenza di infinite rotazioni e assi, essendo impossibile

tracciarli tutti.

Più raramente sono stati commessi altri errori, localizzati nel segno di precedenza, in cui gli alunni avevano individuato solo un asse di simmetria e non tre, e in quello di divieto di fermata in cui ne erano stati tracciati solo due.

### Quindicesima attività

Obiettivo: consolidare la conoscenza del concetto di simmetria attraverso la sua identificazione in alcuni poligoni.

Gli alunni sono stati divisi negli stessi due gruppi di livello che, questa volta, hanno dato risultati in parte differenti.

Con entrambi ho introdotto l'attività affermando che si sarebbe trattato dell'ultimo incontro prima della verifica finale, per questo ho stimolato l'espressione di tutti i dubbi e le incertezze rimaste.

Nel primo gruppo, composto dagli alunni con maggiori difficoltà in matematica, alcuni bambini hanno affermato di non aver ben capito *“la simmetria per rotazione”* e un'alunna, che era stata spesso assente, ha affermato di avere qualche dubbio anche in quella per riflessione. Ho deciso di iniziare proprio da quest'ultimo argomento domandando a chi avesse capito di provare a spiegarlo alla compagna. Gli alunni ci sono riusciti in modo soddisfacente, affermando che la simmetria per riflessione è presente in quelle figure in cui *“se metti uno specchio su una certa linea, metà figura rimane fuori e l'altra metà si riforma uguale nello specchio e così torni alla figura dell'inizio”* oppure su questa stessa retta l'immagine può essere piegata a metà e *“le due metà sono uguali”*, *“combaciano”*.

Ho notato come sia riemersa esplicitamente in quest'occasione l'idea di asse di simmetria quale retta che divide a metà una figura. A differenza di quanto sostenuto nella dodicesima attività però ora gli alunni legano a questa altre caratteristiche che rendono accettabile la definizione: metà figura deve infatti potersi ricostruire esattamente nello specchio oppure le due parti devono combaciare dopo essere state piegate sull'asse.

Per ripassare invece quando una figura è simmetrica per rotazione ho mostrato alcuni oggetti con cui avevamo già lavorato e gli alunni hanno saputo indicarmi correttamente e con relativa facilità l'ampiezza della rotazione in grado di mandare l'immagine in se stessa. Ho quindi riaffermato che esistono figure che sono simmetriche perché se ruotate di un certo angolo ritornano esattamente identiche a come erano all'inizio.

Ho infine chiesto di provare a spiegare quando in generale una figura è simmetrica. Collaborando, gli alunni sono stati in grado di dire che “è

*quando una figura è divisa in tante figure più piccole” e “queste figure più piccole si ripetono con la riflessione o la rotazione fino a quando formano una figura tutta intera”.*

Nel gruppo formato dagli alunni solitamente più competenti in matematica non sono stati espressi invece particolari dubbi e nel breve ripasso, che comunque si è svolto, i bambini hanno manifestato una buona padronanza dei concetti appresi.

Ho quindi proposto in entrambi i gruppi il completamento collettivo di una scheda<sup>18</sup> in cui presentavo la simmetria nei poligoni. Ho cercato di coinvolgere tutti i bambini in questo compito chiedendo ad ognuno di condividere la propria ipotetica risposta per poi decidere insieme cosa effettivamente scrivere in ogni parte.

Gli alunni non hanno mostrato nessun tipo di difficoltà tranne che con il pentagono, dove la maggior parte ha tracciato come assi di simmetria le diagonali del poligono, ottenendo così il disegno di una stella. È stato particolarmente impegnativo riuscire a farli ragionare fino alla comprensione che, nonostante il buon risultato ottenuto dal punto di vista estetico, nel pentagono le diagonali non sono anche assi di simmetria.

I bambini sono infine stati in grado di individuare che ogni poligono regolare ha *“un numero di assi di simmetria uguale al numero dei lati”*.

### Sedicesima attività

Obiettivo: verificare le conoscenze sulla simmetria.

Questa attività è stata svolta dagli alunni individualmente e in momenti differenti. Si è trattato del completamento di una verifica<sup>19</sup> in cui era chiesto di indicare il tipo di simmetria presente nei semi e in alcune carte da gioco.

Di fronte a questo compito quasi tutti i bambini si sono mostrati molto seri e concentrati e hanno saputo utilizzare le diverse strategie apprese

---

<sup>18</sup> Cfr. Allegato 24.

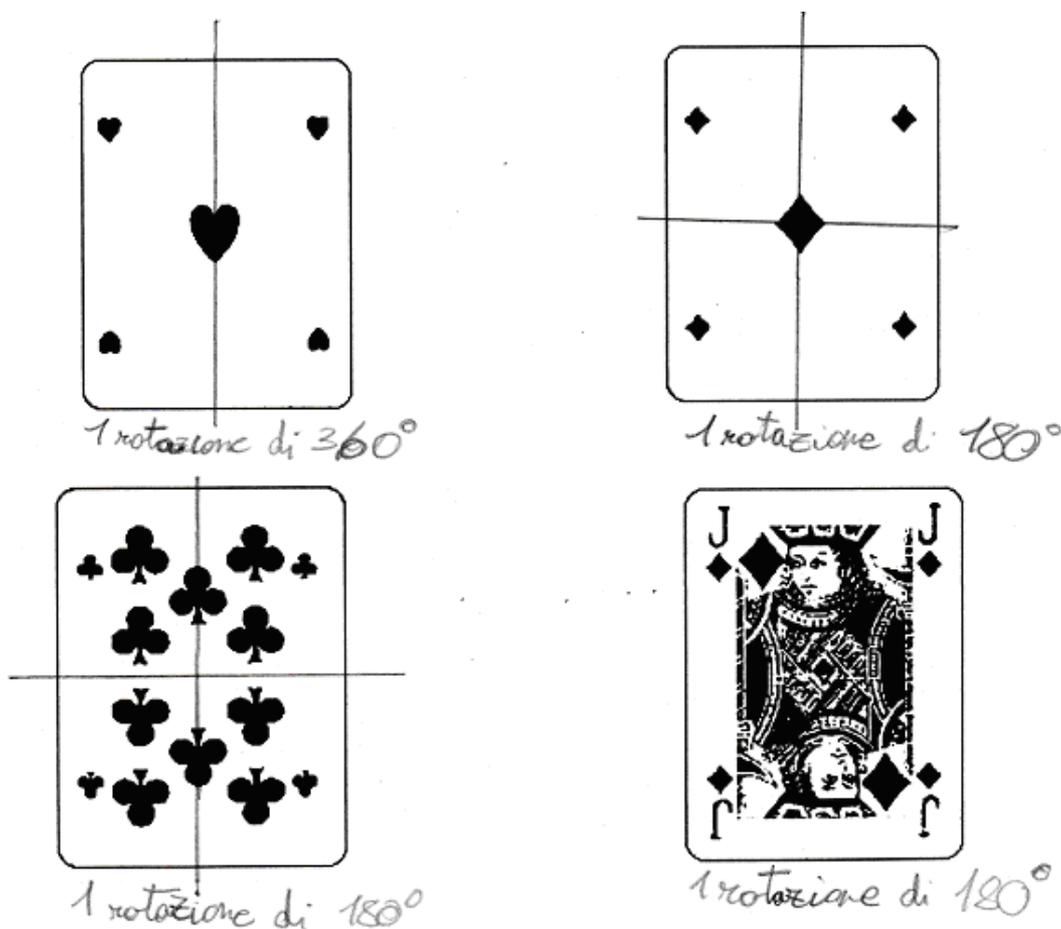
<sup>19</sup> Cfr. Allegato 25 e 26.

durante il percorso: hanno usato lo specchio e le piegature per identificare gli assi di simmetria e hanno provato a girare il foglio per verificare la presenza di rotazioni.

Il mio ruolo è stato quello di supervisionare il lavoro di ciascuno, garantendo a ogni bambino il tempo di cui aveva bisogno. A tutti ho infine suggerito di provare a controllare e rileggere le risposte date prima di consegnarmi la verifica.

Nella correzione ho adottato il metodo utilizzato dal team di insegnanti dell'ambito scientifico che, con l'obiettivo di essere il più possibile oggettivi, attribuisce uno specifico punteggio ad ogni esercizio.

I risultati sono stati molto positivi in quanto la quasi totalità degli alunni ha commesso solo uno o due errori.



## Conclusioni

Esprimerò ora una valutazione generale sul progetto proposto, che vada ad analizzarne gli aspetti positivi, i nodi problematici e i possibili sviluppi.

La verifica che ho proposto al termine del lavoro ha evidenziato come tutti gli alunni abbiano imparato a riconoscere quando una figura è simmetrica e a identificare quali trasformazioni geometriche sono in grado di mandare una specifica immagine in se stessa. A questo risultato i bambini sono giunti attraverso un percorso in cui le conoscenze sono state introdotte in modo graduale, cercando di collegare ogni nuovo apprendimento al già noto e di consolidare le recenti acquisizioni prima di proporre altre. Gli obiettivi di apprendimento credo quindi siano stati raggiunti.

Il questionario<sup>1</sup> che ho presentato come conclusione del progetto aveva invece lo scopo di verificare il gradimento della proposta e le modalità di lavoro ritenute più efficaci dagli alunni.

È risultato che la maggioranza ha giudicato *“interessante”* e *“divertente”* il lavoro svolto, mentre i bambini si sono divisi quasi equamente nel valutarlo *“facile”* o *“impegnativo”*. Il giudizio sulle attività più o meno piacevoli è stato abbastanza variegato, tuttavia simili sono stati i criteri alla base delle scelte compiute. Sono maggiormente piaciute le attività ritenute divertenti, interessanti o corrispondenti ad alcuni gusti personali (*“perché mi piace disegnare le cose”*). La fatica o la difficoltà nella comprensione di un argomento e la noia sono state invece le caratteristiche che hanno fatto giudicare alcuni lavori meno piacevoli.

I contributi più interessanti, al fine di una valutazione complessiva del progetto, sono stati però portati dai bambini a proposito di ciò che ritengono di avere imparato. Alcuni hanno infatti elencato gli argomenti studiati, altri invece hanno formulato delle riflessioni più generali, che

---

<sup>1</sup> Cfr. Allegati 31, 32, 33, 34 e 35.

segnalano un cambiamento in corso a proposito del modo di pensare la matematica. Affermazioni quali *“la geometria che non mi piaceva mi è incominciata a piacere”*, *“la geometria è un po’ tanto interessante”*, *“la geometria è utile e impegnativa”* testimoniano come i bambini abbiano avuto modo di entrare in contatto con aspetti della disciplina in grado di modificare, almeno parzialmente, le loro idee, aprendo verso una visione piacevole, interessante e utile della matematica che inoltre, come suggerisce la frase *“la simmetria è presente da qualsiasi parte”*, inizia a non essere più ritenuta una disciplina racchiusa dentro i quaderni a quadretti, ma la cui presenza è rintracciabile anche nella realtà esterna alla scuola.

Il progetto sulla simmetria ha portato un piccolo contributo in tal senso. Un cambiamento di mentalità duraturo potrà essere favorito da altre occasioni di vivere esperienze matematiche significative sia sul piano dei contenuti sia su quello delle modalità.

Ho potuto inoltre osservare alcuni risultati positivi legati allo sviluppo delle *“abilità collaterali”* evidenziate da Cindy E. Hmelo-Silver<sup>2</sup>. In particolare ho notato un miglioramento nelle capacità collaborative degli alunni, dovuto a una maggior abitudine al lavoro di gruppo e a un suo uso finalizzato, che si è esteso ad altre attività della classe, oltre a quelle legate al mio progetto.

Trovarsi a gestire in piccolo gruppo un lavoro di ricerca e di scoperta ha contribuito alla crescita di ognuno nell’autogestione del proprio processo di apprendimento.

Il cambio di atteggiamento nei confronti della disciplina, evidenziato da alcuni bambini nel questionario finale, e la consapevolezza di riuscire a risolvere piccole situazioni problematiche hanno favorito lo sviluppo della motivazione intrinseca allo studio.

---

<sup>2</sup> Si veda p. 29 del presente lavoro.

Ritengo che il mio progetto sia proponibile, con i necessari adattamenti, in tutti i contesti scolastici in cui l'insegnante decida di offrire ampio spazio a questo argomento, limitando inevitabilmente quello da dedicare ad altro. Sicuramente infatti non si è trattato solo di occupare in modo nuovo il monte ore solitamente riservato alla simmetria, ma di approfondire con numerose attività un argomento che di norma viene trattato in modo molto più veloce. Questo è stato possibile grazie alla disponibilità dell'insegnante tutor e al fatto che io abbia potuto lavorare spesso con solo metà classe per volta. In molte delle attività proposte infatti è stato necessario seguire i vari gruppi in modo continuativo, cosa che credo sarebbe risultata molto più difficile se a lavorare in contemporanea fossero stati tutti i bambini della classe. Le attività progettate richiedono competenze disciplinari facilmente raggiungibili da parte di un adulto e l'uso di materiali recuperabili e costruibili con un impegno non particolarmente gravoso. Questi elementi concorrono quindi a favore della replicabilità della proposta.

Credo infine che siano molteplici gli sviluppi, soprattutto interdisciplinari, che, per motivi di tempo e organizzativi, io non ho potuto approfondire.

In particolare ritengo possa essere stimolante, sia per l'insegnante sia per gli alunni, proporre la lettura e l'approfondimento di alcuni passaggi della biografia di Donald Coxeter, come avevo prospettato inizialmente per il mio progetto. Questa attività contribuirebbe in matematica alla costruzione di una rinnovata e positiva idea della disciplina e in ambito linguistico costituirebbe la base per l'incontro con un genere testuale importante, la biografia, e l'occasione per un notevole arricchimento lessicale e sintattico, trattandosi di un libro scritto per persone adulte. Potrebbe rivelarsi proficuo e facilmente attuabile estendere questo argomento a scienze. In particolare sarebbe possibile sviluppare la ricerca dei diversi tipi di simmetria presenti nei vegetali e negli animali, cercando di identificare le ragioni di adattamento locale ed evolutivo che

hanno portato alcuni specifici esseri viventi a strutturarsi in quel determinato modo simmetrico. Alla base di un possibile collegamento interculturale del percorso sulla simmetria è ipotizzabile la ricerca, il confronto e l'approfondimento di tutti quei giochi in cui la simmetria è presente e permette una condizione di partenza equilibrata tra i giocatori, ad esempio nei giochi su scacchiere<sup>3</sup>.

Un ulteriore sviluppo che si inserirebbe bene nel mio progetto è a livello artistico. Sarebbe infatti possibile identificare quando simmetria e regolarità hanno incontrato il gusto di pittori, scultori o architetti.

Le opere di Escher, che in parte ho utilizzato anche nel percorso proposto, offrono l'occasione per approfondire in modo particolare questo legame ed aprono la possibilità anche agli alunni di cimentarsi nella produzione di qualcosa di simile. Ma la simmetria è presente anche in opere artistiche più comuni e diffuse in diverse culture, come i rosoni delle nostre chiese o i mandala indiani. Questo perché

*“la simmetria è un’idea attraverso la quale gli uomini, nel corso dei secoli, hanno cercato di comprendere e di creare ordine, bellezza e perfezione”.*

(H. Weyl)

---

<sup>3</sup> Per approfondire questo aspetto si veda GALLO – VEZZANI 2007, pp.63-81.

## **RINGRAZIAMENTI**

Ringrazio la professoressa Marina Cazzola, mia relatrice, per l'interesse con cui ha seguito il progetto e gli utili consigli.

Sono riconoscente alla dottoressa Claudia Vasilotta, supervisore del tirocinio, per avermi accompagnata e sostenuta nel percorso formativo.

Un grazie inoltre va a chi, a diverso titolo, lavora presso l'Istituto Comprensivo "Riccardo Massa", per avermi accolta nella scuola. In particolare sono grata a Silvana Torretta, mia tutor, per la disponibilità, la pazienza e la vicinanza con cui ha favorito il mio inserimento nella classe e il progetto proposto.

Desidero quindi ringraziare i miei genitori, mia sorella Maria e tutti i familiari, per la fiducia e l'appoggio che non mi hanno mai fatto mancare.

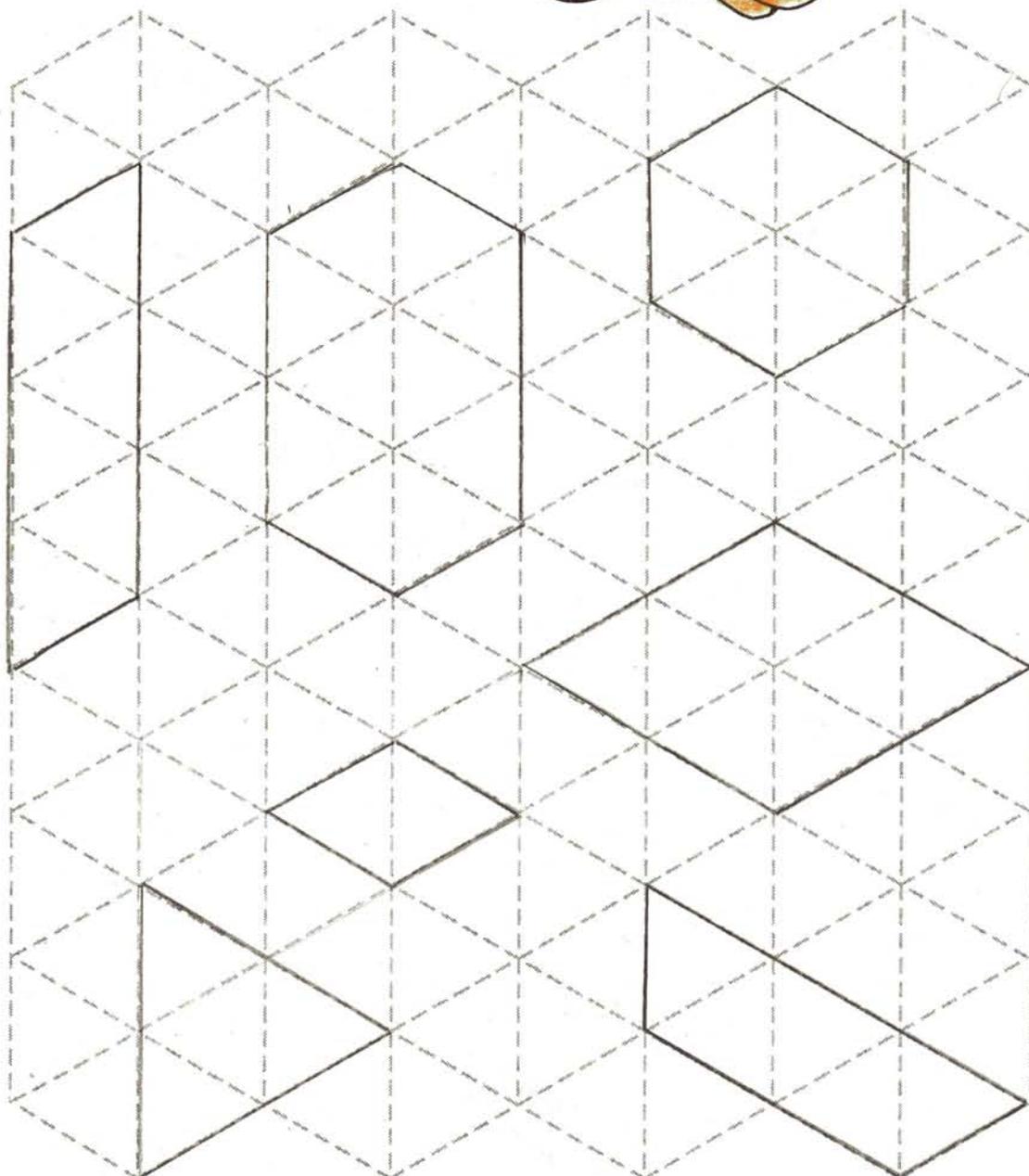
Un affettuoso grazie alle compagne di corso, che hanno impreziosito ogni giornata universitaria, alleggerendo i momenti più faticosi e con le quali ho condiviso grandi e piccoli sogni.

Un pensiero speciale va poi a tutti gli amici, presenza costante nella mia vita di "quasi maestra".

Infine un grande grazie a tutti i bambini di 4<sup>a</sup> B, veri protagonisti di questo progetto.

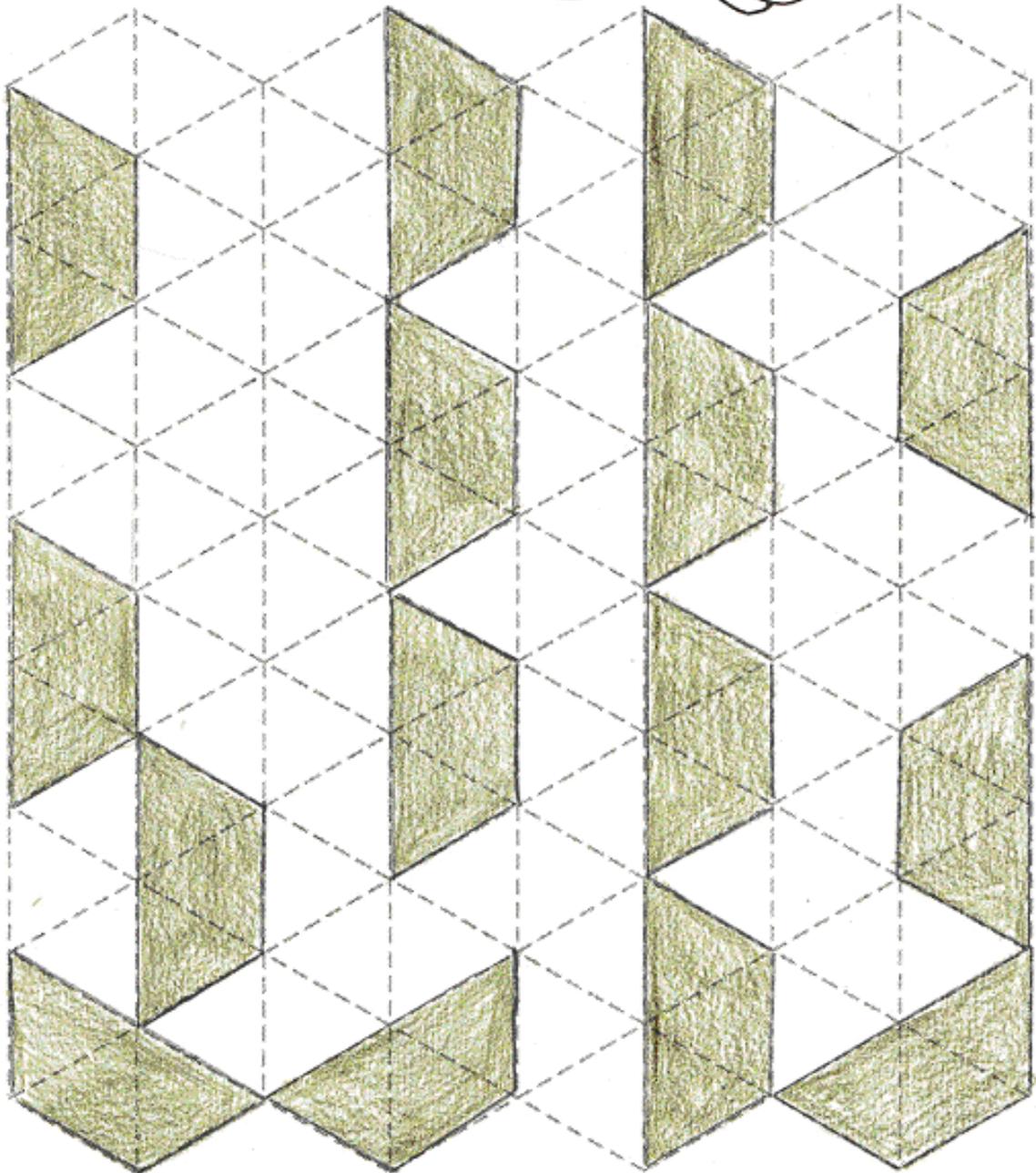
# ALLEGATI

## Griglia isometrica tratteggiata



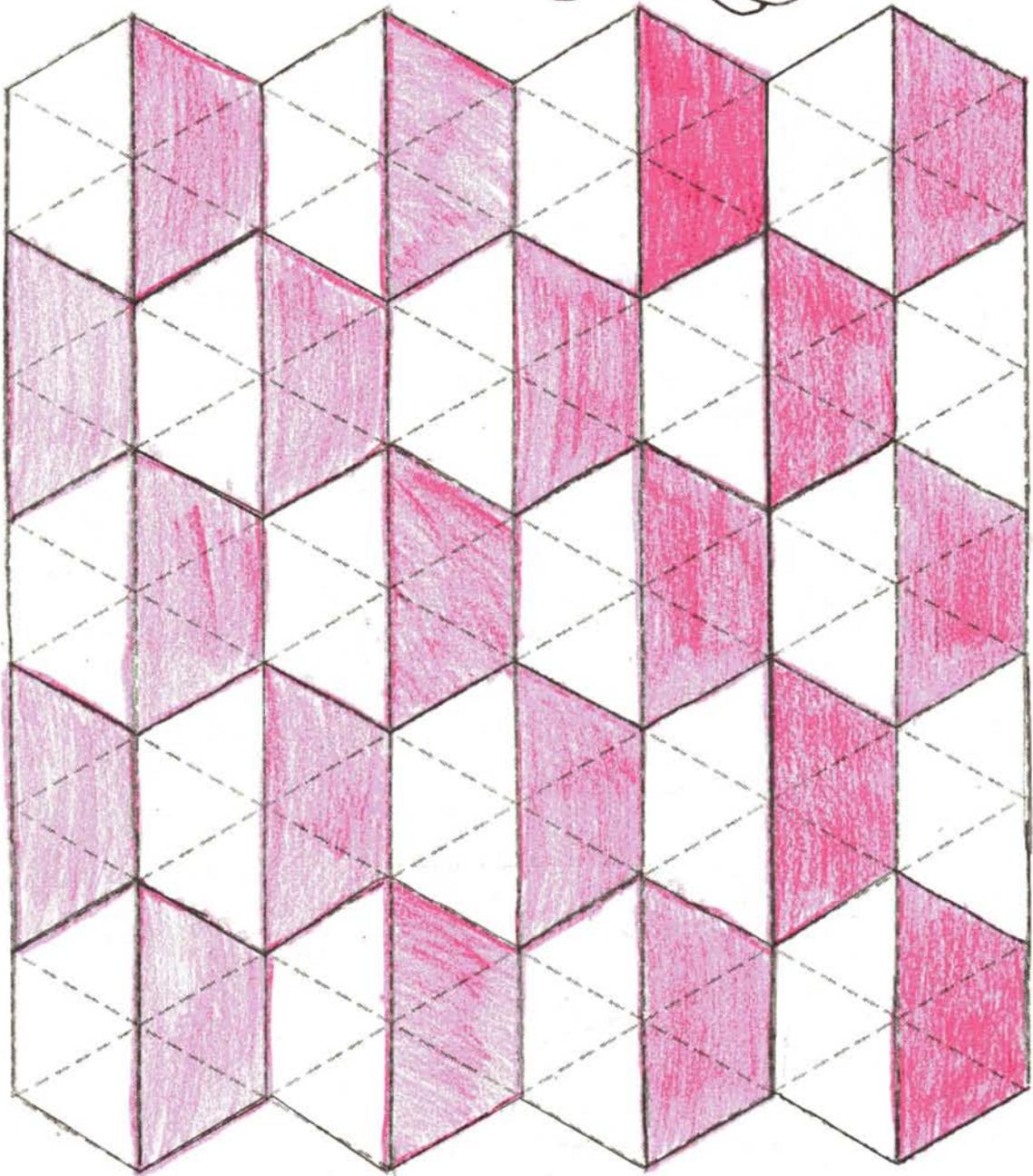
Allegato 1

**Griglia isometrica tratteggiata**



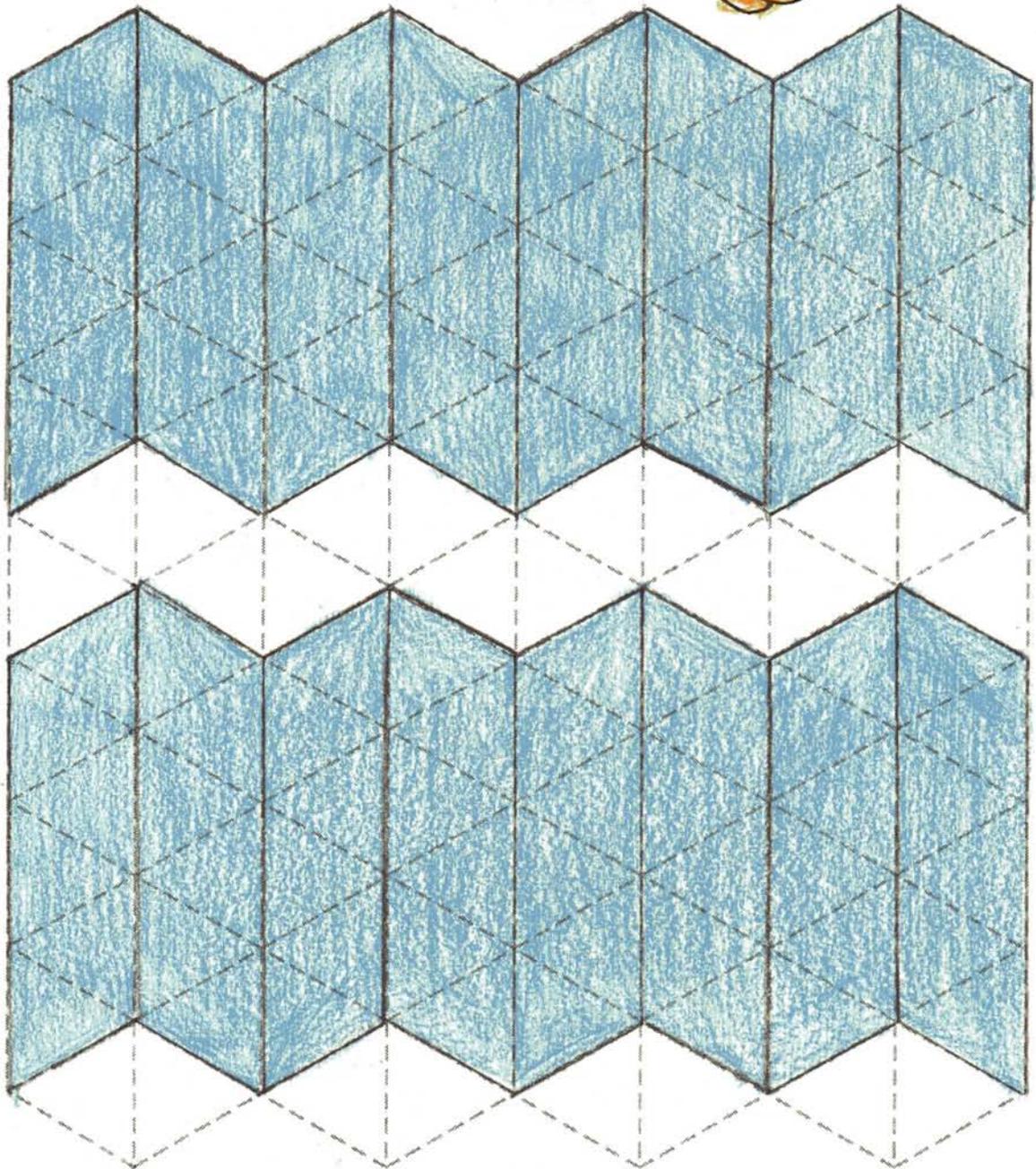
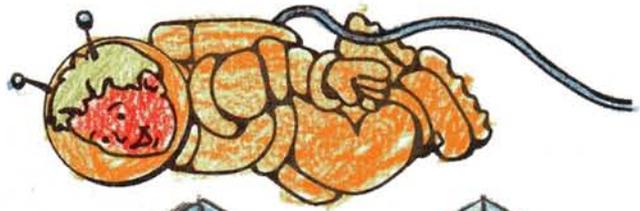
Allegato2

**Griglia isometrica tratteggiata**



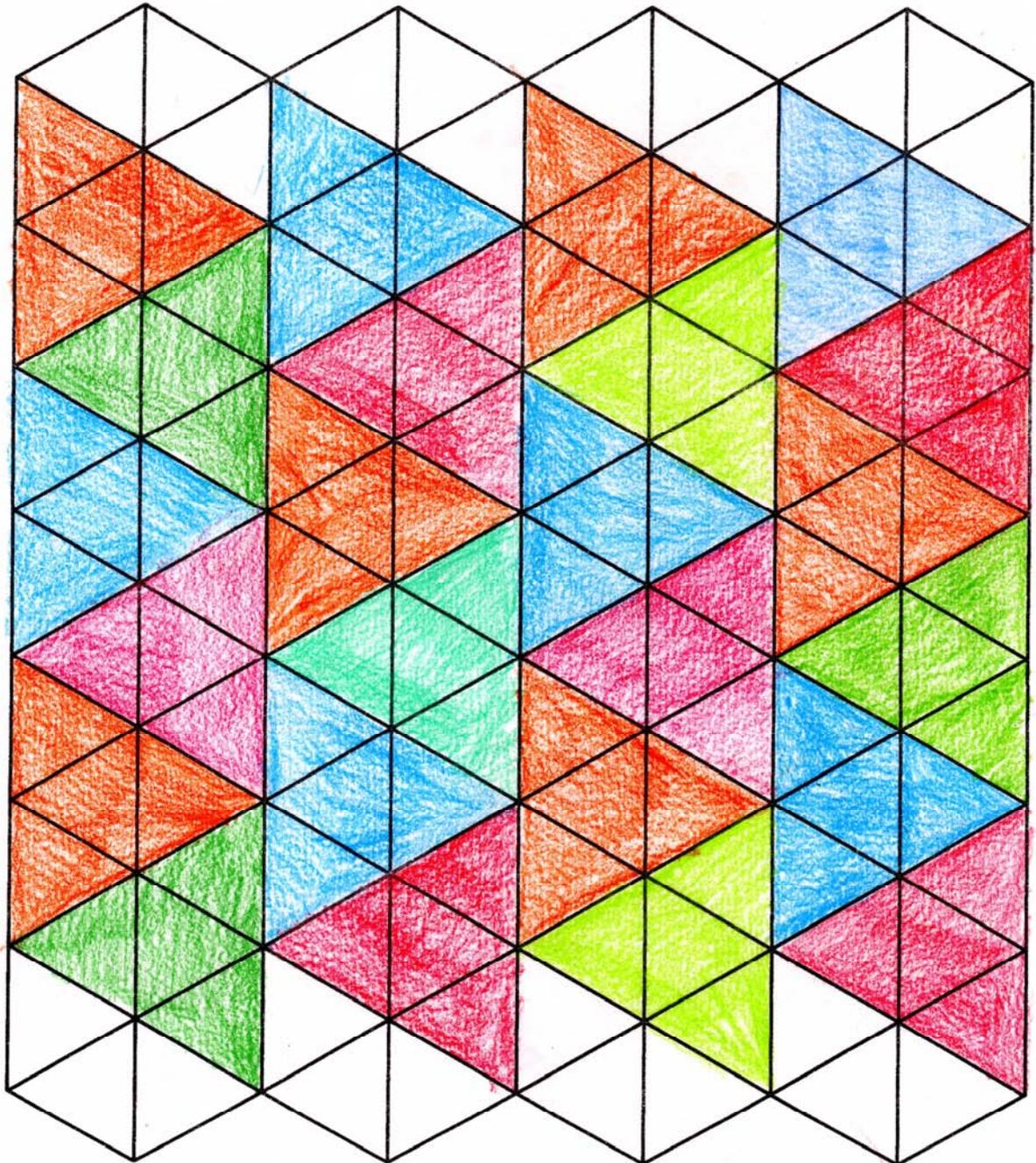
Allegato3

**Griglia isometrica tratteggiata**



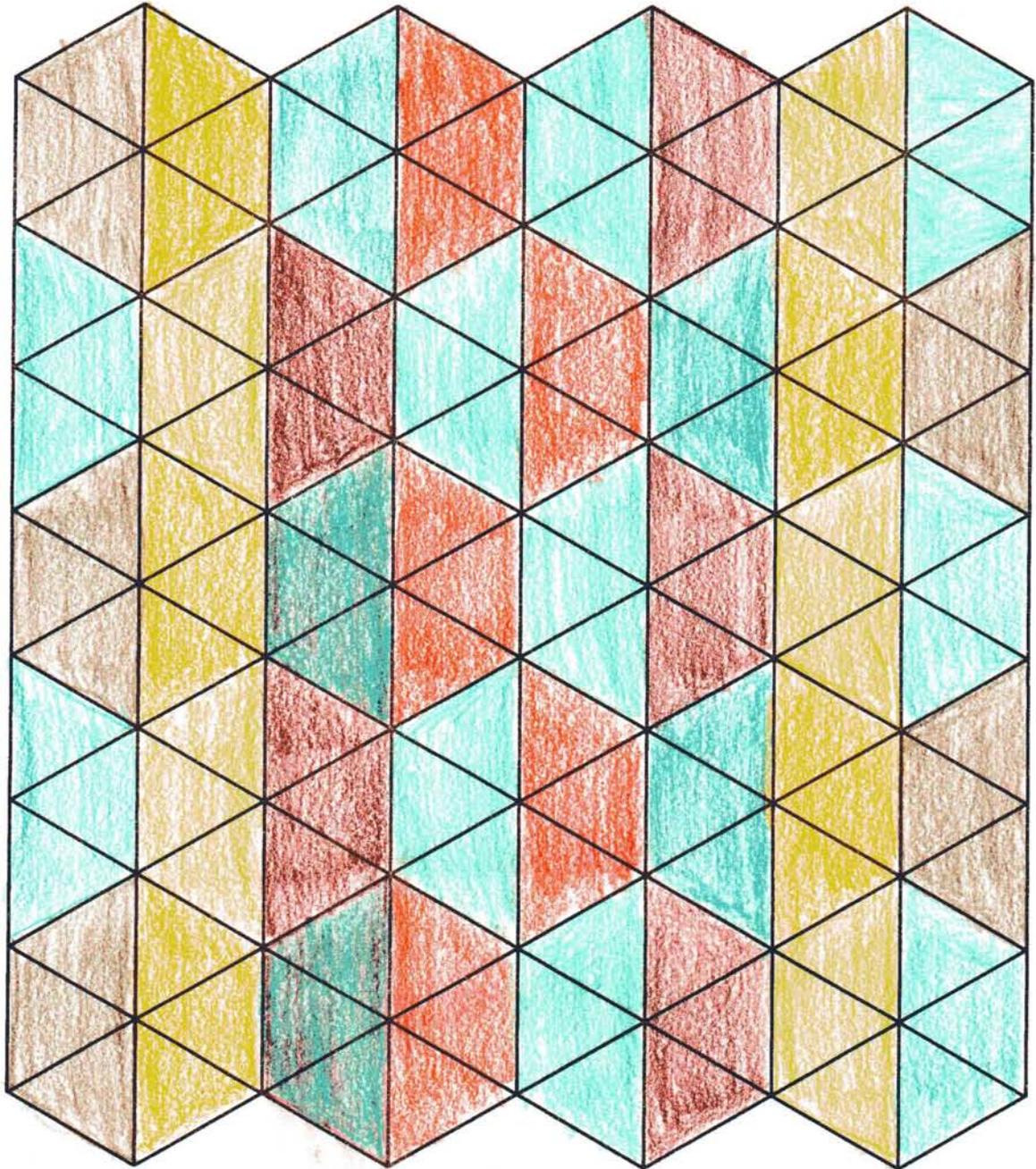
Allegato 4

# Griglia isometrica



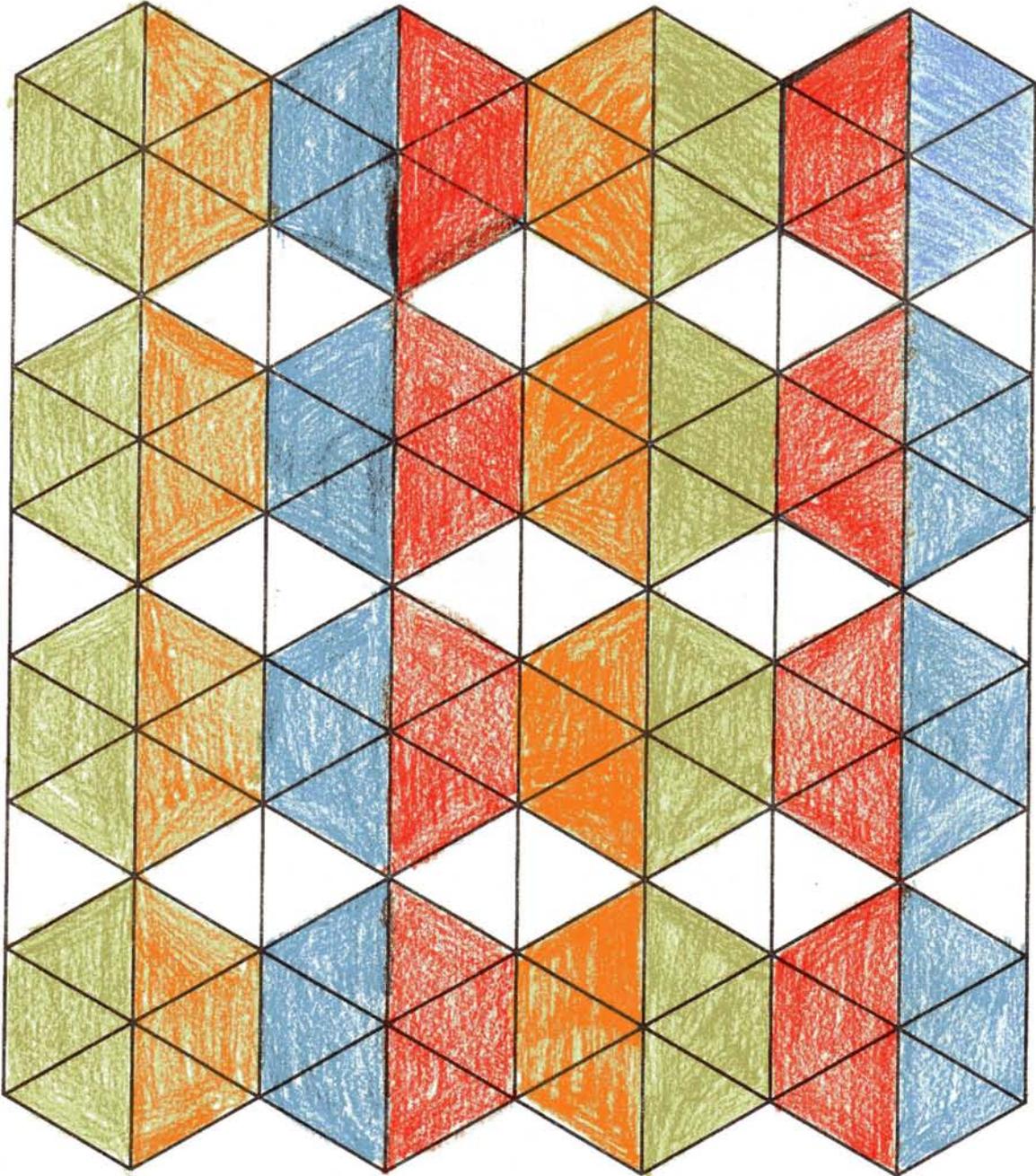
Allegato 5

# Griglia isometrica

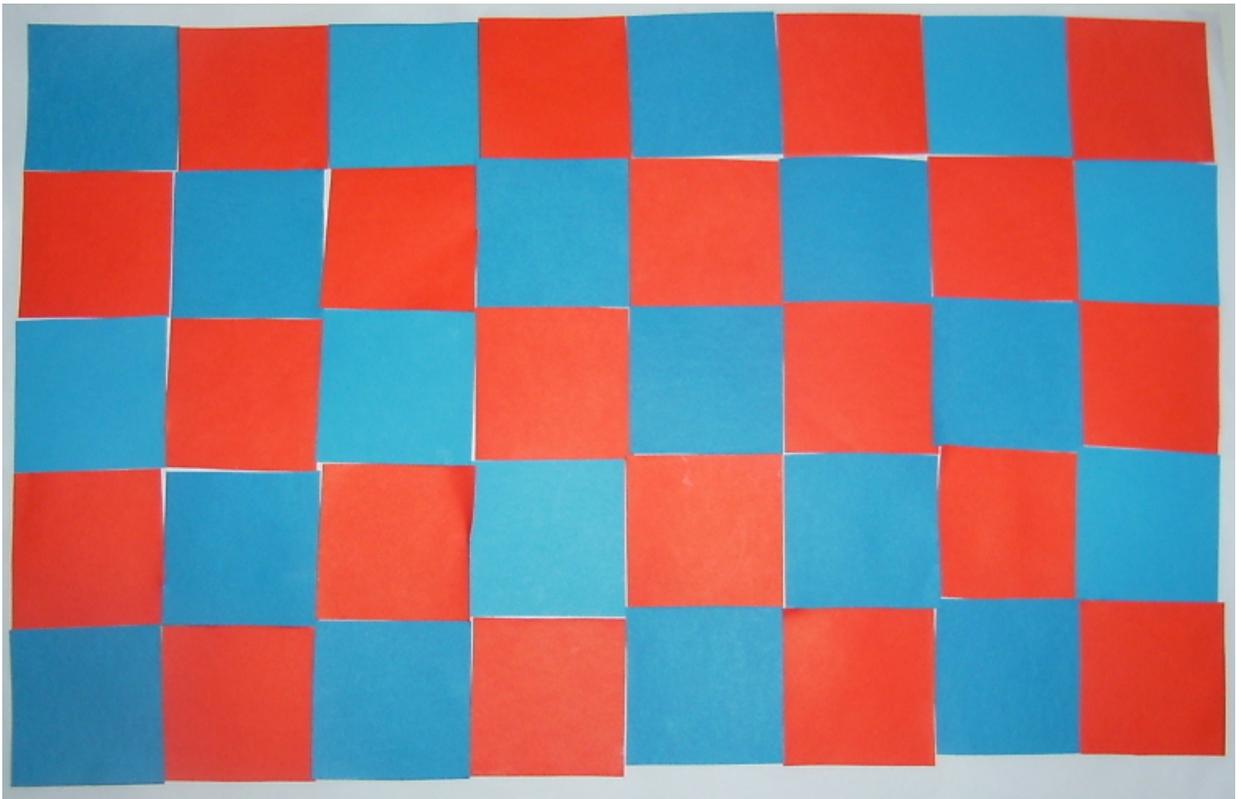
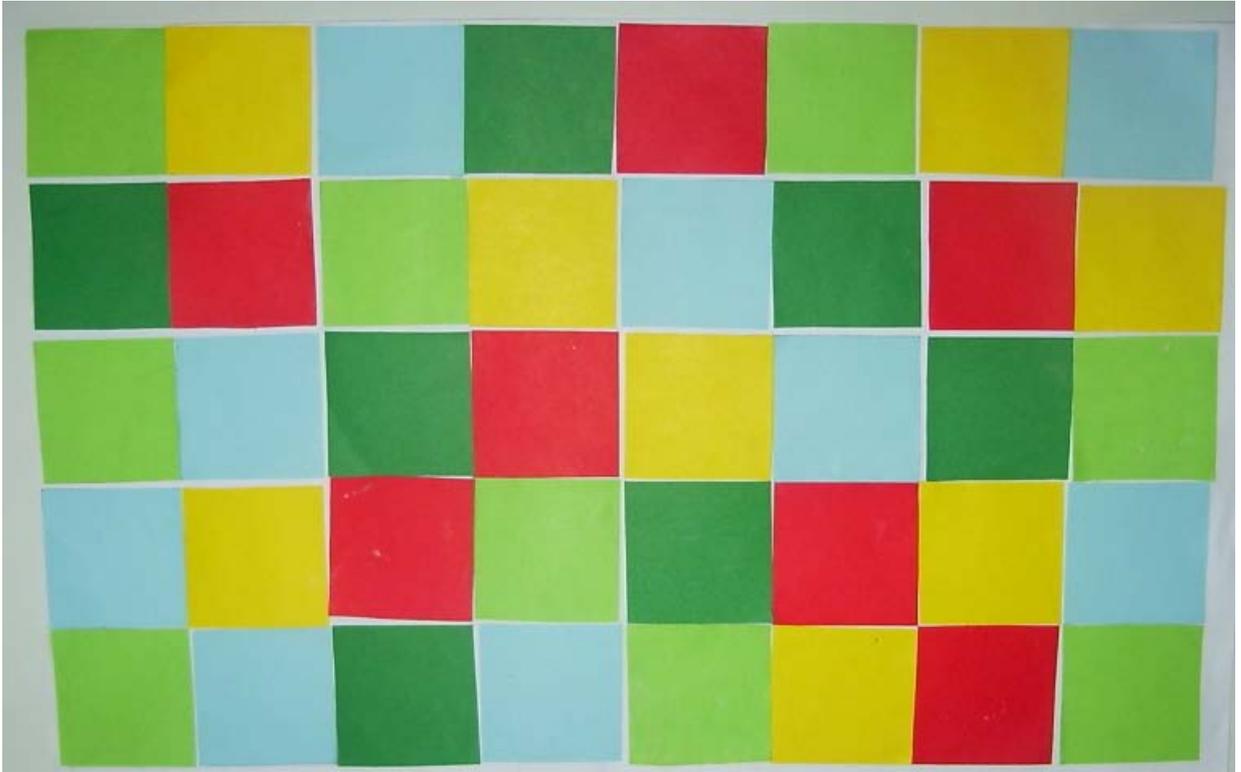


Allegato 6

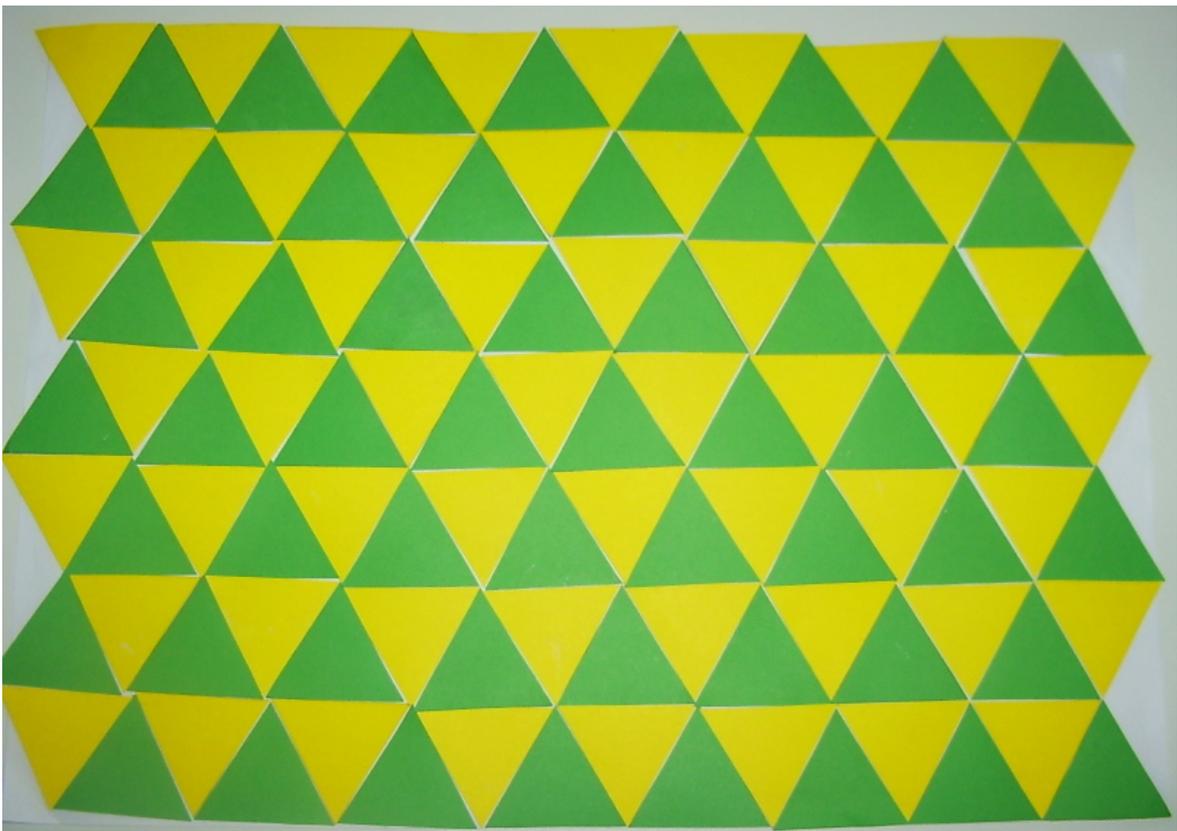
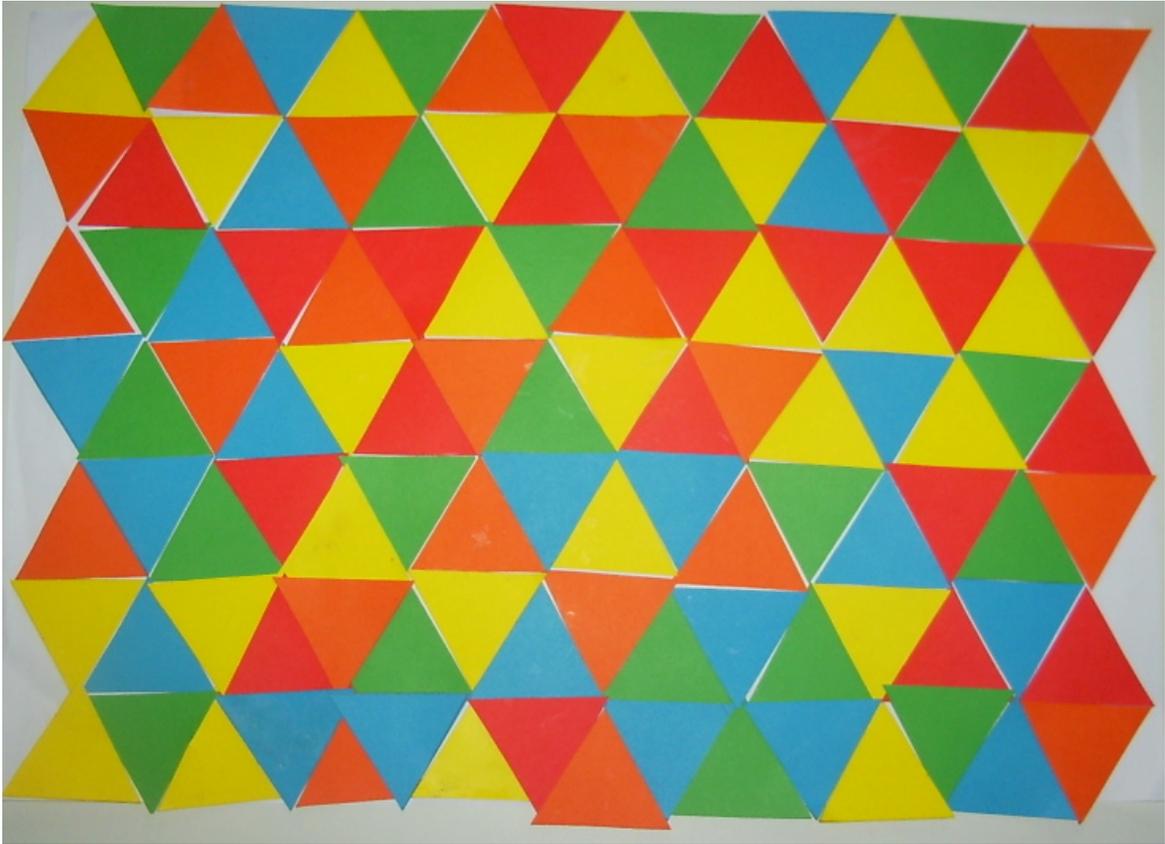
**Griglia isometrica**



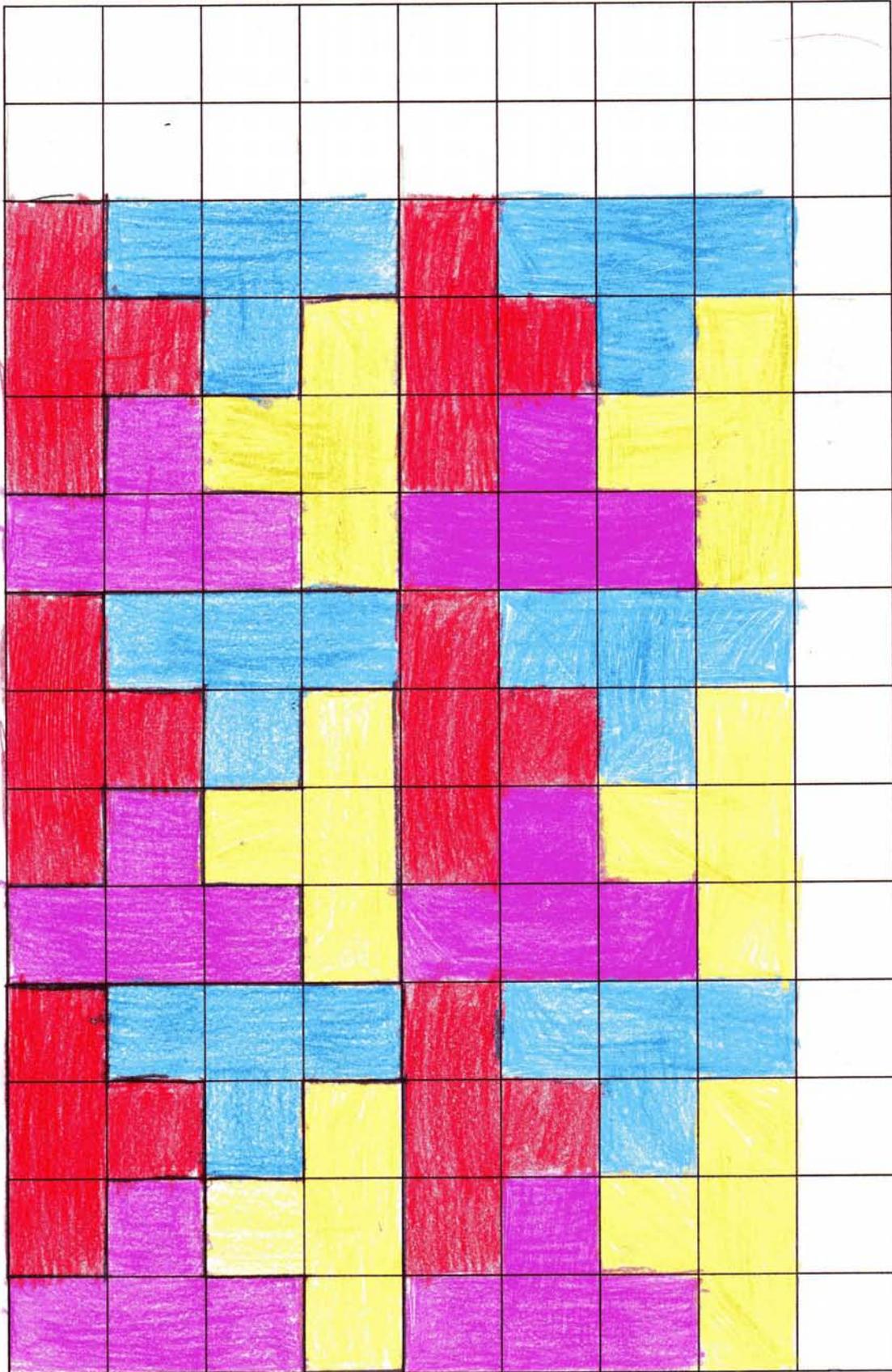
Allegato 7



Allegato 8

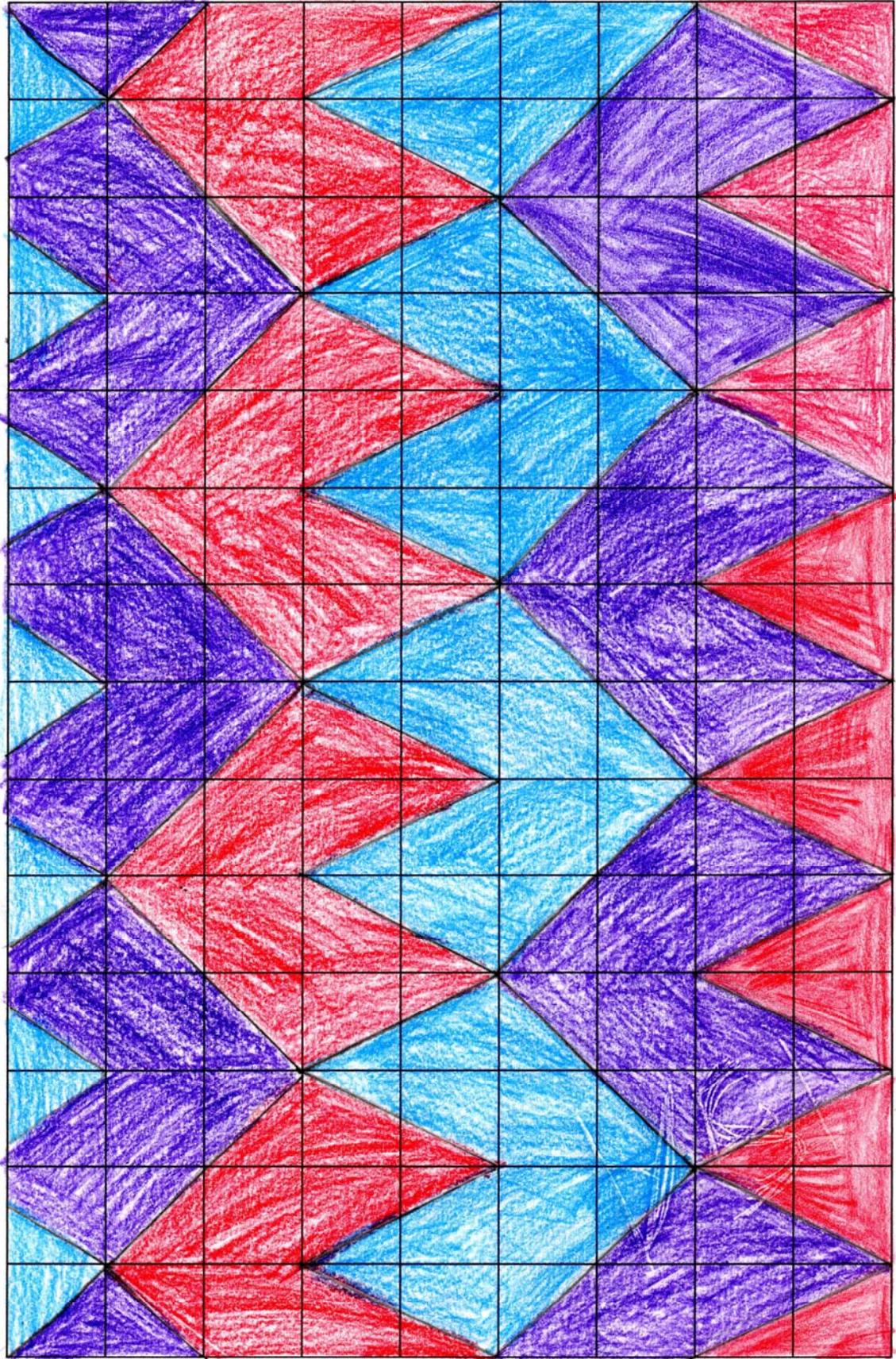


Allegato 9

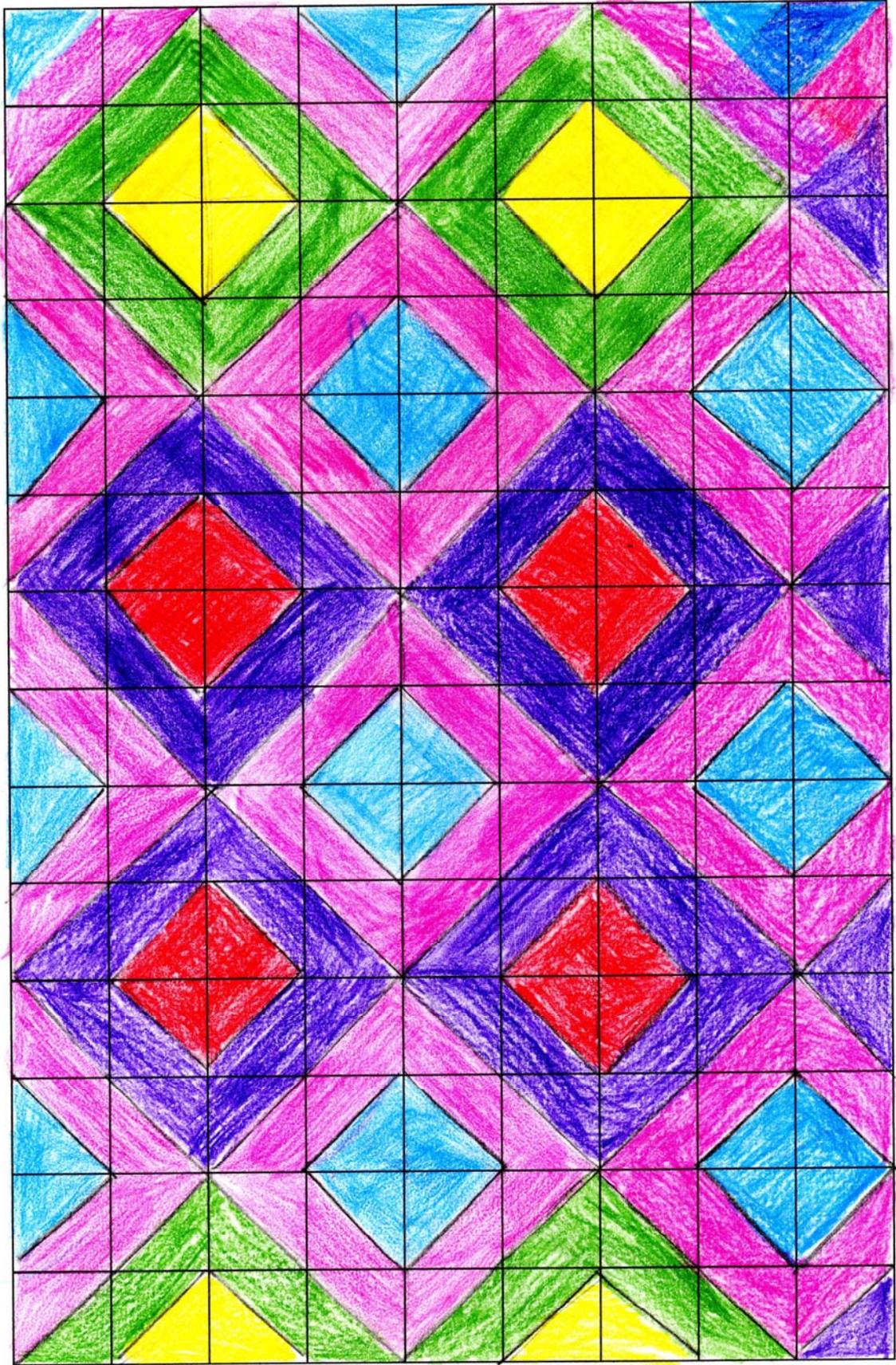


612210

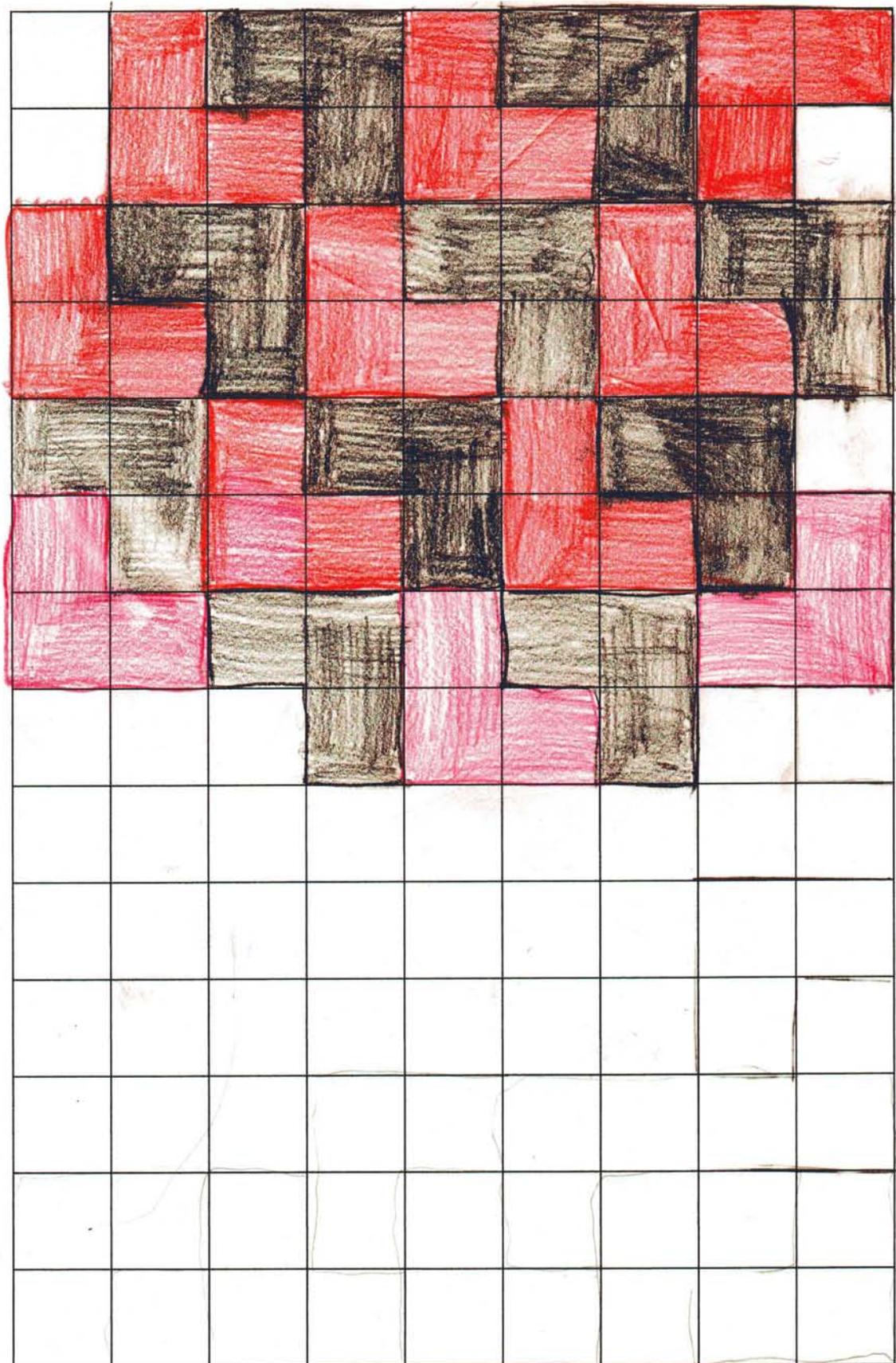
Allegato 10



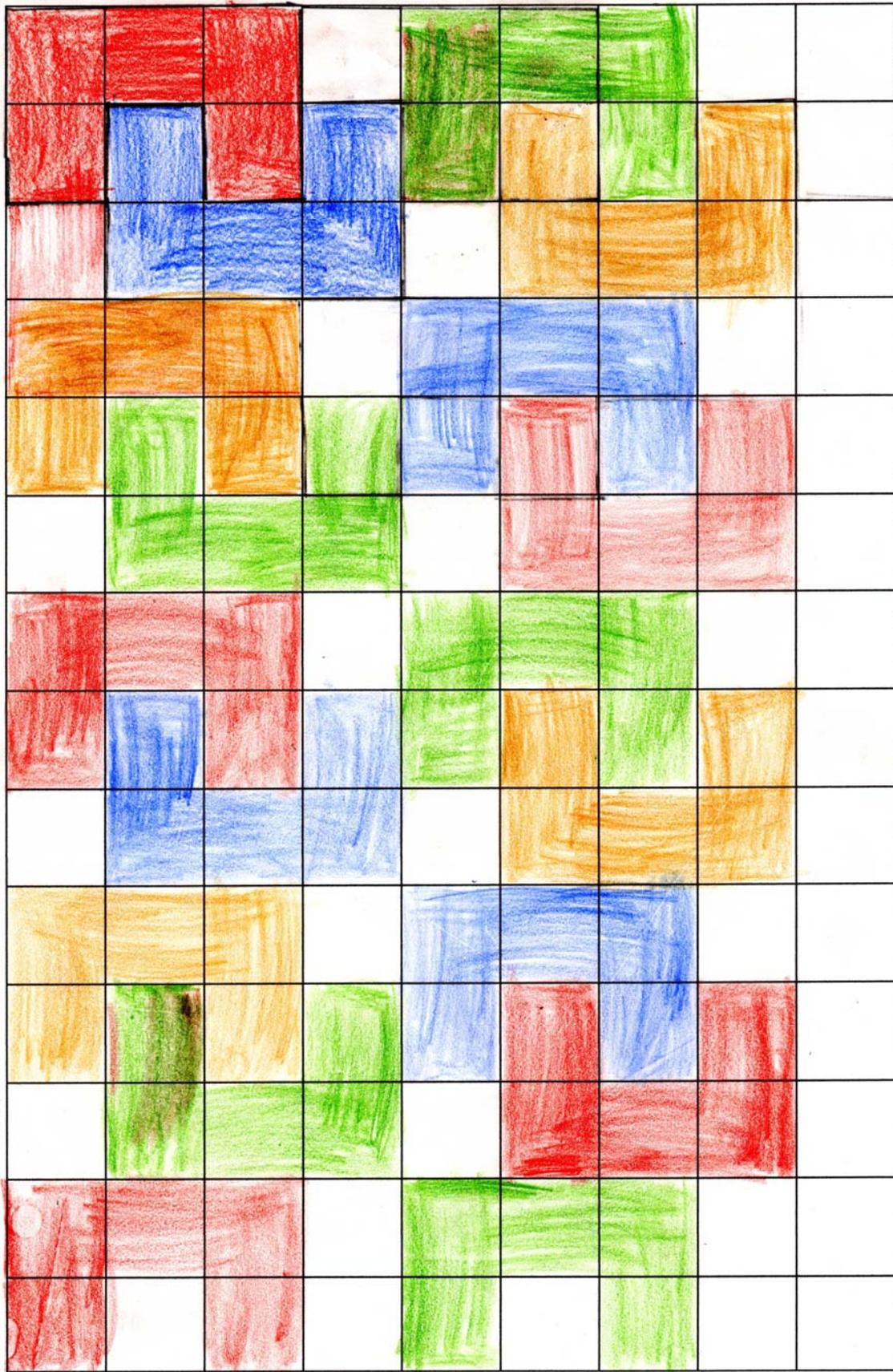
Allegato 11



Allegato 12



Allegato 13

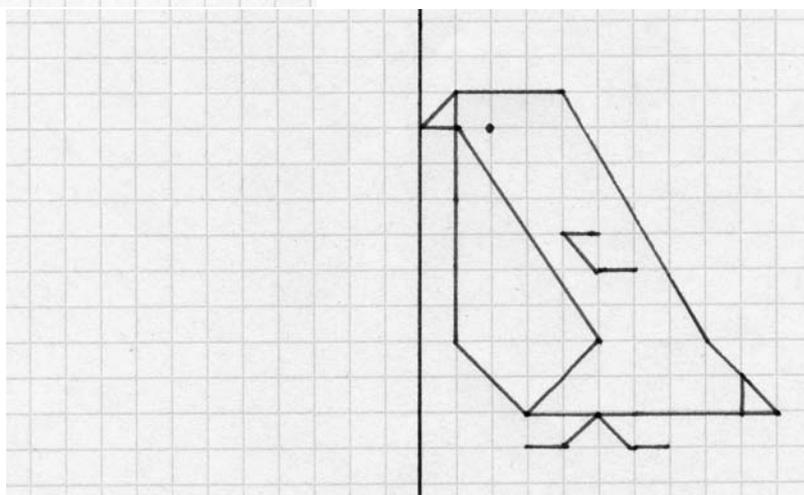
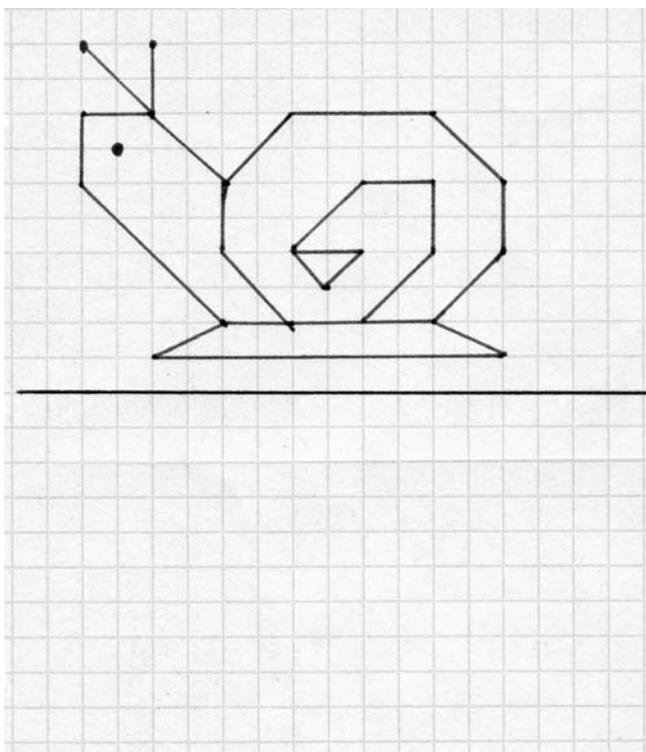


Allegato 14

# GLI ANIMALI RICAMATI

*Elisa ha imparato a ricamare e ha deciso di regalare alla mamma una tovaglia con rappresentati degli animali. Ha disegnato alcuni modelli sulla carta a quadretti e ora li vuole riprodurre come se fossero visti allo specchio.*

Qui sotto sono riportati i disegni da cui parte Elisa, prova a completarli con quelli degli animali riflessi nello specchio.



Allegato 15

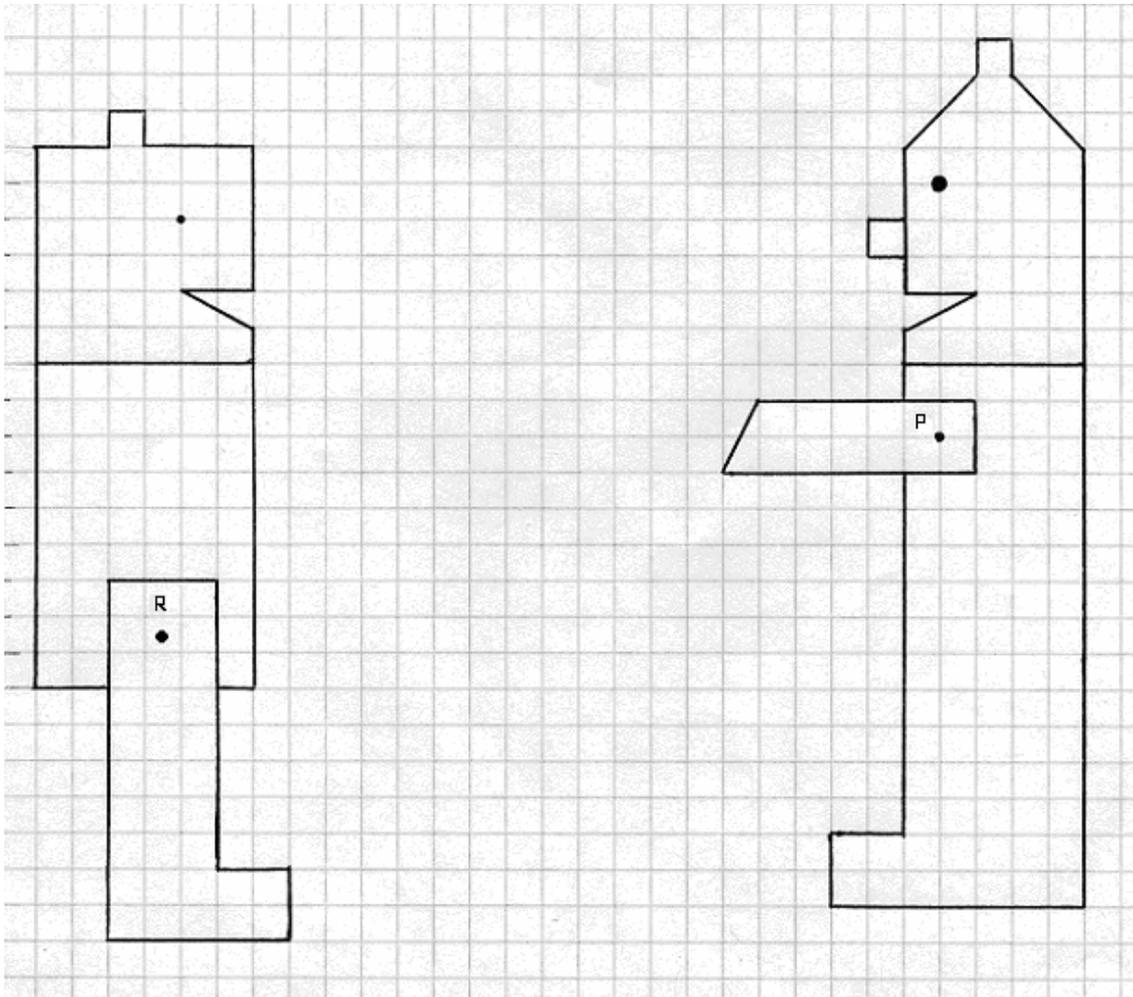
# ROBOT

*Nicola ha una ricca collezione di robot dalle diverse sembianze. Le parti che li formano possono ruotare attorno a dei perni, così che sembra che i robot si animino.*

*Nicola ne studia i movimenti.*

Disegna anche tu la posizione finale:

- del braccio ruotato attorno al punto P, in senso antiorario di  $90^\circ$ ;
- della gamba ruotata attorno al punto R, in senso antiorario di  $90^\circ$ .



Allegato 16

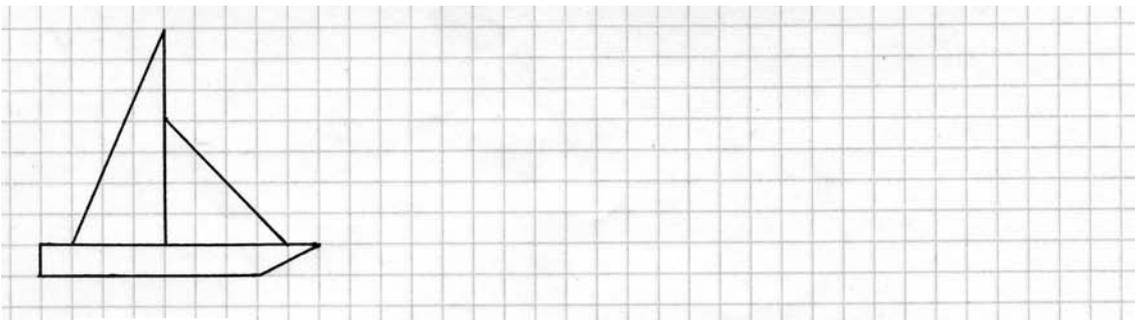
# LA BUFERA SULL'ISOLA

Giovanni ricorda che la settimana scorsa sull'isola in cui abita c'è stata una burrasca... e si inventa un gioco! Prima disegna su un foglio a quadretti alcune navi, poi sfida il suo amico Roberto a rappresentare la posizione delle navi dopo la bufera.

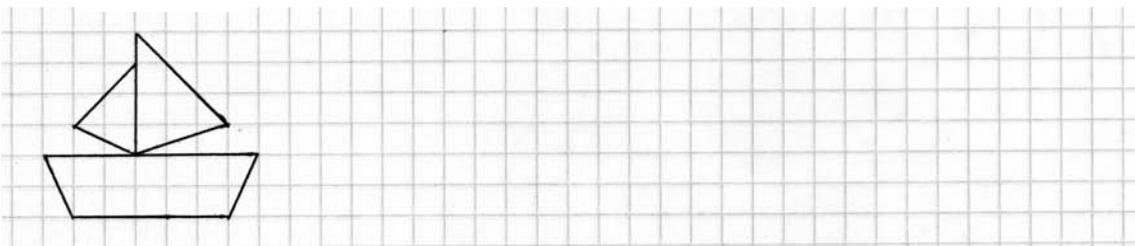
Il vento ha spinto ogni barca in direzione orizzontale e verso destra, ma le navi più pesanti hanno resistito alla sua forza, così la lunghezza dello spostamento è diversa per ognuna. In particolare:

- PINTA è stata sospinta dal vento per 22 lati di quadretto;
- AZZURRA per 24 lati di quadretto;
- OLIMPIA per 18 lati di quadretto.

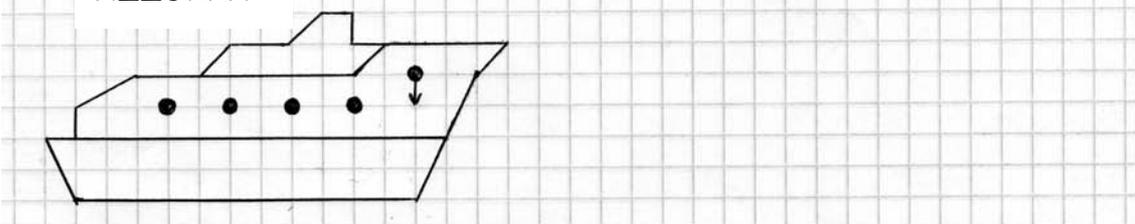
Qui sotto è riportato il disegno che Giovanni ha dato a Roberto. Prova anche tu a risolvere questo gioco.



**PINTA**

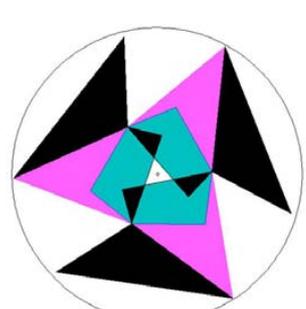
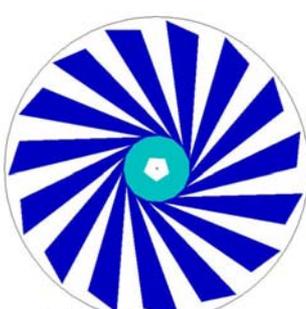
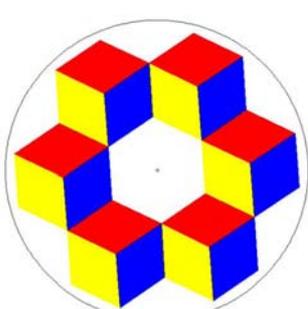
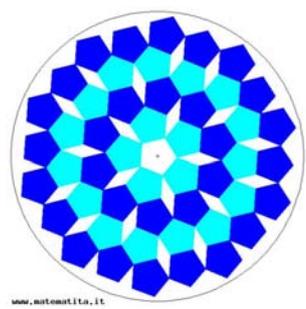
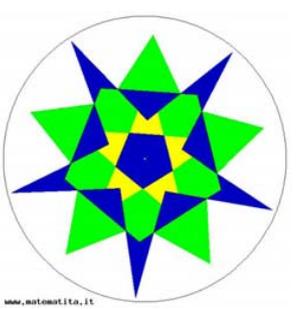
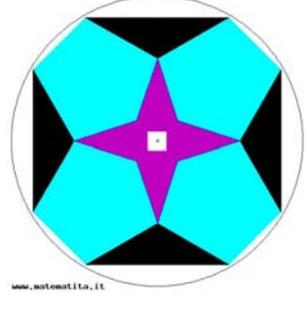
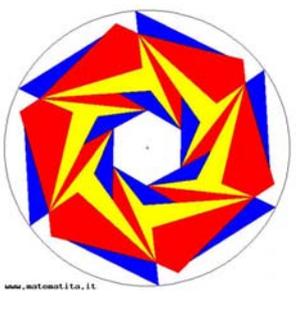
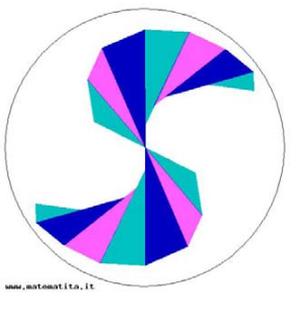
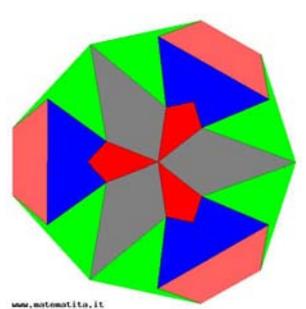
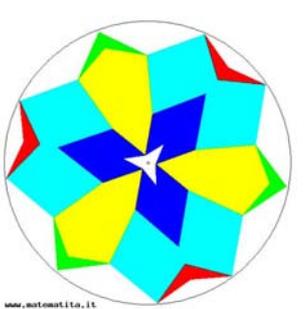
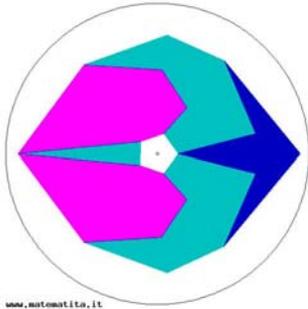
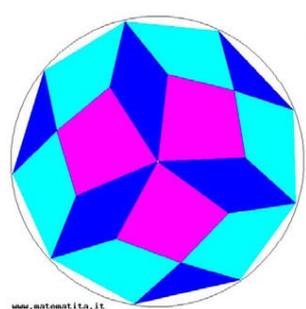
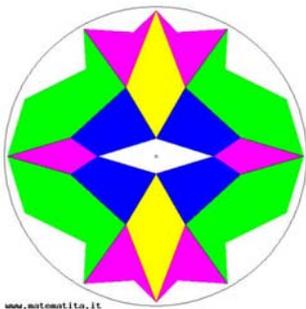
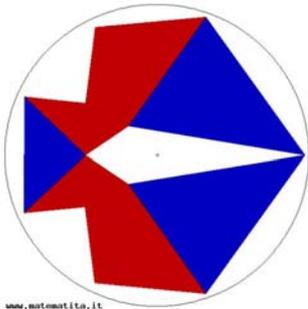


**AZZURRA**



**OLIMPIA**

Allegato 17



Allegato 18

# LA SIMMETRIA

Provate a spiegare a un vostro compagno quando una figura è simmetrica

-----  
-----  
-----  
-----  
-----

Dite quale tipo di simmetria è presente in ogni figura



ringhiera



cerchione



finestra



interno di uno stampo per burro



sottotetto

# LA SIMMETRIA

Provate a spiegare a un vostro compagno quando una figura è simmetrica

-----

-----

-----

-----

-----

Dite quale tipo di simmetria è presente in ogni figura



cancello



armadio

Allegato 21



stampo



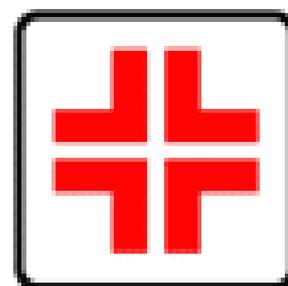
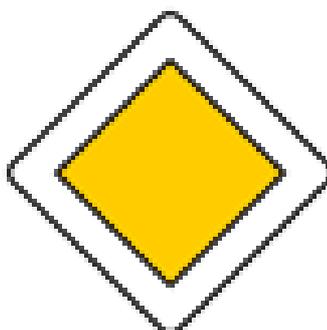
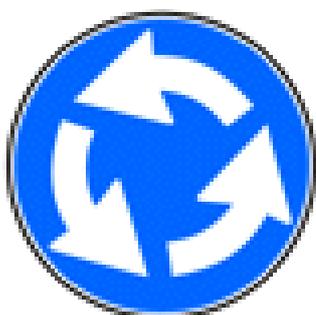
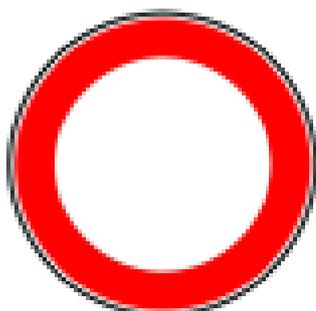
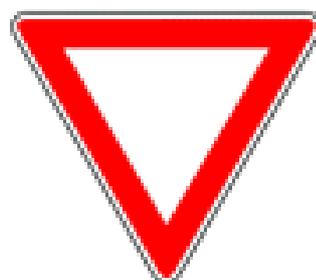
genziana



cancello

# LA SIMMETRIA NEI SEGNALI STRADALI

*Traccia gli assi di simmetria e indica le rotazioni che rendono alcuni segnali stradali simmetrici.*

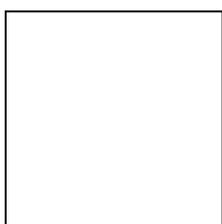


Allegato 23

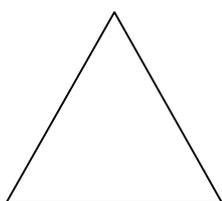
# LA SIMMETRIA NEI POLIGONI



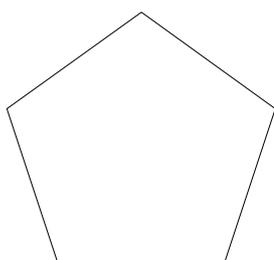
Il rettangolo ha \_\_\_\_\_ assi di simmetria e con una rotazione di \_\_\_\_\_° la figura torna su se stessa.



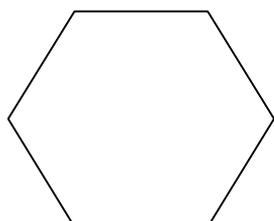
Il quadrato ha \_\_\_\_\_ assi di simmetria e con una rotazione di \_\_\_\_\_° la figura torna su se stessa.



Il triangolo equilatero ha \_\_\_\_\_ assi di simmetria e con una rotazione di \_\_\_\_\_° la figura torna su se stessa.



Il pentagono regolare ha \_\_\_\_\_ assi di simmetria e con una rotazione di \_\_\_\_\_° la figura torna su se stessa.



L'esagono regolare ha \_\_\_\_\_ assi di simmetria e con una rotazione di \_\_\_\_\_° la figura torna su se stessa.

Ogni poligono regolare ha \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

## GEOMETRIA NELLE CARTE DA GIOCO

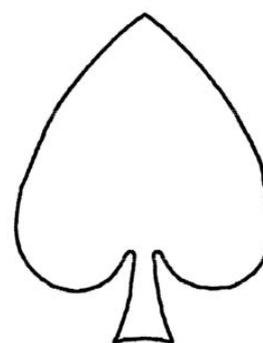
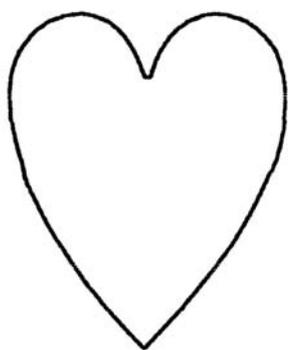
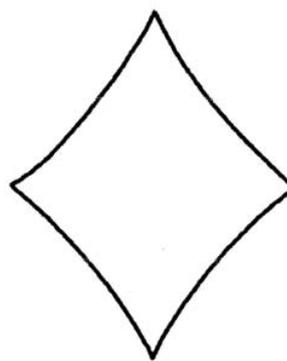
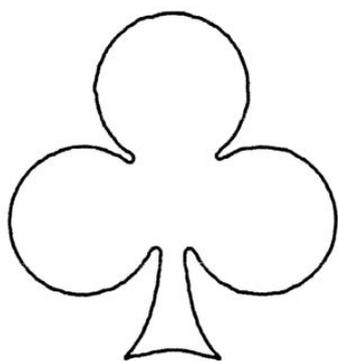
*Per la lezione di geometria la maestra ha portato a scuola... un mazzo di carte da gioco!*

*"Ma cosa facciamo oggi?" chiedono i bambini incuriositi.*

*La maestra spiega che bisogna cercare la geometria presente in ogni carta da gioco.*

*Prima di tutto ognuno deve mettere in evidenza gli assi di simmetria o le rotazioni presenti nel simbolo di ogni seme.*

Eccoti riprodotti, senza tenere conto del colore, la forma dei diversi semi di un mazzo di carte. Traccia in ognuno tutti i possibili assi di simmetria e scrivi se ci sono delle rotazioni che fanno tornare la figura su se stessa.



Ci sono semi che non hanno assi di simmetria?

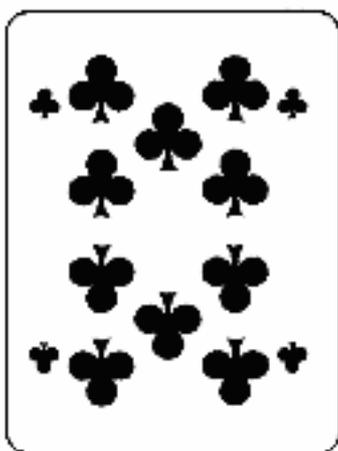
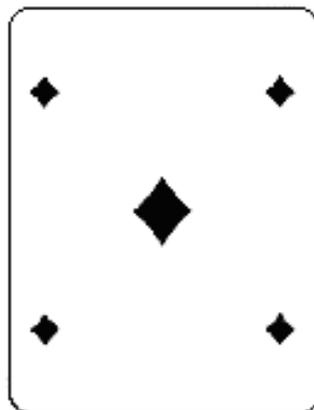
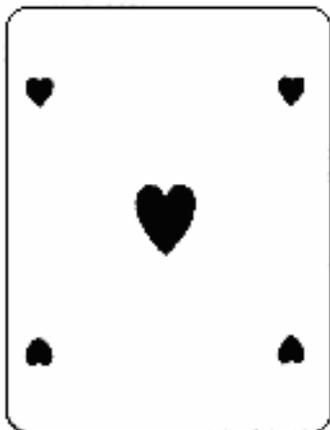
Ci sono semi che hanno più di un asse di simmetria?

Ci sono semi che hanno delle rotazioni?

Allegato 25

*Poi la maestra distribuisce ad ognuno alcune carte da gioco e chiede di trovare gli assi di simmetria e le rotazioni presenti in ogni carta.*

Qui sotto sono rappresentate le carte che la maestra ha dato a un bambino, senza i colori e le scritte. Traccia tutti gli assi di simmetria che riesci a trovare e scrivi se ci sono delle rotazioni che fanno tornare la figura su se stessa.



Secondo te la forma del seme influisce sul numero di assi di simmetria della carta? Perché?

Ci sono carte che hanno un solo asse di simmetria? Quali?

Ci sono carte che hanno più di un asse di simmetria? Quali?

Ci sono carte che hanno delle rotazioni ma non hanno assi di simmetria? Quali?

Allegato 26

# IO e La matematica

**Che cosa ti piace della matematica?**

---

---

---

---

**Che cosa invece non ti piace?**

---

---

---

---

**Ti ricordi un argomento o un'attività che ti sono piaciuti particolarmente?**

---

---

---

---

---

**Hai mai conosciuto un matematico? Secondo te in cosa consiste il suo lavoro?**

---

---

---

---

Allegato 27

## **Risposte al questionario “Io e la matematica”**

### Che cosa ti piace della matematica?

- *Mi piacciono le equivalenze con i decimali, i decimali e le tabelline.*
- *Problemi, operazioni, decimali, frazioni, maggiore e minore.*
- *Mi piacciono i problemi, le operazioni e i numeri decimali.*
- *A me della matematica piace i problemi, maggiore, minore, uguale e i decimali.*
- *A me piacciono le divisioni con i decimali, maggiore minore uguale e la capacità.*
- *Tutto.*
- *Della matematica mi piacciono i problemi e le frazioni.*
- *Operazioni*
- *A me piacciono i calcoli, le operazioni e quando devi scoprire qualcosa di nuovo e difficile.*
- *Mi piacciono i decimali*
- *A me piace della matematica le frazioni, trasformare le frazioni, mettere in colonna i numeri con la virgola, le addizioni con la virgola.*
- *Della matematica mi piace i problemi con l'euro.*
- *Della matematica mi piace le frazioni, tutti i calcoli e tutte altre molte cose (tranne una cosa).*
- *A me piacciono le operazioni, i problemi e anche quando impariamo cose nuove che mi interessano.*
- *Della matematica mi piacciono: le frazioni, moltiplicazioni, divisioni, moltiplicazioni a due cifre e le divisioni con la virgola e le divisioni.*

### Che cosa invece non ti piace?

- *A me non piace “trovare il numero complementare”.*
- *Il complementare.*
- *Non mi piacciono maggiore, minore, uguale.*
- *Non mi piacciono gli esercizi perché sono noiosi.*
- *A me non piacciono molto i problemi.*
- *I problemi*
- *Non mi piacciono le divisioni*
- *Frazioni*
- *Non mi piace quando non riesco a fare un calcolo che tutti gli altri riescono a fare. E poi non mi piacciono le cose semplicissime.*
- *Le tabelline*

Allegato 28

- *A me non piace mettere il maggiore, il minore e l'uguale.*
- *Invece non mi piace le operazioni, il maggiore minore uguale e trovare il numero complementare.*
- *A me non piace i problemi.*
- *A me non piacciono le cose semplicissime e anche i calcoli orali. Anche quando non so una cosa semplice e non riesco a farla.*
- *A me della matematica non piacciono i problemi perché non riesco a risolverli.*

Ti ricordi un argomento o un'attività che ti sono piaciuti particolarmente?

- *Quando facciamo i problemi a coppie.*
- *Inventare delle cose tipo problemi operazioni.*
- *Mi è particolarmente piaciuto inventare i problemi in coppia.*
- *Mi è particolarmente piaciuto inventare i problemi in coppia.*
- *Mappe coordinate.*
- *No.*
- *Mi è piaciuto particolarmente quando usavamo i regoli per formare dei numeri.*
- *Una scheda*
- *Mi piacciono particolarmente le equivalenze.*
- *Quando facciamo i problemi a gruppo o a coppie.*
- *Mi è piaciuto tanto quando ho fatto le addizioni con la virgola.*
- *Si. Un argomento che mi ha colpito particolarmente è l'euro e un'attività è quella dei multi base.*
- *La attività che mi è tanto piaciuta particolarmente di matematica sono le frazioni e le equivalenze.*
- *Mi piacciono quando fanno le operazioni e chi finisce prima e anche le equivalenze.*
- *Particolarmente un'attività che mi è piaciuta sono le divisioni.*

Hai mai conosciuto un matematico? Secondo te in cosa consiste il suo lavoro?

- *Non ho mai conosciuto un matematico. Secondo me un matematico fa operazioni difficili.*
- *No, però per la mia immaginazione fa matematica, geometria, geografia.*
- *Non ho mai conosciuto un matematico. Secondo me il suo lavoro consiste nell'eseguire operazioni difficili.*

Allegato 29

- *Non conosco un matematico. Secondo me il suo lavoro consiste nell'eseguire operazioni difficili.*
- *Io non ho mai conosciuto un matematico ma secondo me consiste nel far tante operazioni.*
- *No.*
- *No. Secondo me il matematico è una specie di scienziato che scopre le formule della matematica.*
- *No. Studiare matematica.*
- *Io non ho mai conosciuto un matematico. Secondo me lui inventa nuove materie e il modo di gestirle e poi le corregge nel modo più giusto.*
- *Non ho mai conosciuto un matematico. Secondo me il suo lavoro consiste nel fare le cose difficili di matematica e creare cose nuove.*
- *Non ho mai conosciuto un matematico però forse fa tanti calcoli.*
- *Non ho mai conosciuto un matematico però penso che di lavoro fa quello che esegue operazioni con tanti addendi.*
- *Non ho mai conosciuto un matematico.*
- *No, non ho mai conosciuto un matematico. Secondo me il suo lavoro è fare i calcoli nel suo modo.*
- *Non ho mai conosciuto un matematico. Però il suo lavoro ci vuole attenzione, concentrazione e usare molto il cervello.*

# QUESTIONARIO FINALE

Rispondi alle domande riferendoti alle attività svolte sulle trasformazioni geometriche e sulla simmetria.

❖ Questo lavoro ti è sembrato:

- |                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> interessante | <input type="checkbox"/> divertente   |
| <input type="checkbox"/> noioso       | <input type="checkbox"/> troppo lungo |
| <input type="checkbox"/> troppo corto | <input type="checkbox"/> facile       |
| <input type="checkbox"/> difficile    | <input type="checkbox"/> impegnativo  |

❖ Quale attività ti è piaciuta di più? Perché?

-----  
-----  
-----

❖ Quale attività ti è piaciuta di meno? Perché?

-----  
-----  
-----

❖ Nel lavoro di gruppo:

- |  |   |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> hai condiviso le tue idee           | <input type="checkbox"/> non hai condiviso le tue idee        |
| <input type="checkbox"/> hai collaborato con i tuoi compagni | <input type="checkbox"/> hai cercato di fare tutto da solo    |
| <input type="checkbox"/> hai espresso sempre i tuoi dubbi    | <input type="checkbox"/> non sempre hai espresso i tuoi dubbi |

❖ Nel lavoro individuale pensi di:

- |   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> esserti sempre impegnato   | <input type="checkbox"/> esserti impegnato solo a volte |
| <input type="checkbox"/> aver rispettato il lavoro dei tuoi compagni anche quando hanno impiegato più tempo di te |   |
| <input type="checkbox"/> aver disturbato i compagni mentre aspettavi che finissero il loro lavoro                 |   |

Allegato 31

❖ Con queste attività hai imparato che:

-----  
-----  
-----

❖ Alla fine di questo percorso ti è rimasto ancora qualche dubbio?

-----  
-----  
-----

❖ Hai altre considerazioni da fare?

-----  
-----  
-----

## Risposte al “Questionario finale”

Questo lavoro ti è sembrato:

- *interessante* 11 scelte
  - *divertente* 9 scelte
  - *noioso* 0 scelte
  - *troppo lungo* 0 scelte
  - *troppo corto* 2 scelte
  - *facile* 6 scelte
  - *difficile* 0 scelte
  - *impegnativo* 5 scelte
- (totale di 33 scelte segnate dagli alunni)

Quale attività ti è piaciuta di più? Perché?

- *Mi è piaciuta di più l'asse di simmetria perché si usa lo specchio*
- *La traslazione perché mi è piaciuto disegnare*
- *La simmetria con lo specchio perché era divertente e impegnativo*
- *A me è piaciuta di più la traslazione. Perché era divertente e interessante*
- *Mi è piaciuta di più la riflessione perché era divertente usare lo specchio*
- *La riflessione perché è stata interessante*
- *Mi è piaciuta di più l'attività delle assi di simmetria perché era la più divertente*
- *La traslazione perché era la più corta*
- *A me è piaciuta di più la riflessione. Perché si lavorava con lo specchio ed era divertente*
- *La riflessione perché mi è piaciuto disegnare le forme o i disegni dati riflessi*
- *La riflessione perché mi piace disegnare le cose*
- *È stata l'ultima lezione perché c'erano le carte da gioco*

Quale attività ti è piaciuta di meno? Perché?

- *La traslazione perché non la capivo all'inizio*
- *La rotazione perché non mi piace ruotare*
- *A me non mi è piaciuta la rotazione perché ho fatto fatica a impararla*
- *Nessuna*
- *La rotazione perché non la capivo*
- *La riflessione perché era noiosa*
- *La rotazione perché era noiosa*
- *Nessuna mi è piaciuta di meno*
- *La rotazione perché non mi è piaciuto ruotare la forma o la figura*
- *Niente*
- *La prima volta*

Allegato 33

Nel lavoro di gruppo:

- *hai condiviso le tue idee* 7 scelte
  - *non hai condiviso le tue idee* 0 scelte
  - *hai collaborato con i tuoi compagni* 10 scelte
  - *hai cercato di fare tutto da solo* 0 scelte
  - *hai espresso sempre i tuoi dubbi* 3 scelte
  - *non sempre hai espresso i tuoi dubbi* 5 scelte
- (totale di 25 scelte segnalate dagli alunni)

Nel lavoro individuale pensi di:

- *esserti sempre impegnato* 7 scelte
  - *esserti impegnato solo a volte* 4 scelte
  - *aver rispettato il lavoro dei tuoi compagni anche quando hanno impiegato più tempo di te* 7 scelte
  - *aver disturbato i tuoi compagni mentre aspettavi che finissero il loro lavoro* 1 scelta
- (totale di 19 scelte segnalate dagli alunni)

Con queste attività hai imparato che:

- *Esistono rotazione, traslazione e assi di simmetria e riesco a riconoscerle*
- *La geometria che non mi piaceva mi è incominciata a piacere. Poi la traslazione, la rotazione e la riflessione e che la geometria è utile.*
- *La geometria è un po' tanto interessante ma anche un po' noiosa*
- *Che la geometria è utile e impegnativa.*
- *La traslazione, la riflessione e la rotazione*
- *La riflessione è divisa con un asse*
- *La rotazione, la riflessione e la traslazione*
- *La traslazione*
- *Ho imparato per esempio la simmetria che è come se bisogna dividere la figura in modo che siano uguali 2 o più parti*
- *La simmetria è presente da qualsiasi parte*
- *Si può ruotare una figura rispetto ai gradi*
- *La rotazione*

Alla fine di questo percorso ti è rimasto ancora qualche dubbio?

- *No*
- *No*
- *Si, sulla rotazione nella simmetria*
- *Si un po' la rotazione*
- *No*
- *No*
- *No*
- *No*
- *Mi è rimasto qualche dubbio sulla traslazione*
- *No*
- *No*
- *No*

Hai altre considerazioni da fare?

- *Nessuna*
- *Si, mi è piaciuto molto lavorare con Sara perché è brava a spiegare delle cose di geometria*
- *No*
- *No*
- *No*
- *No*
- *Nessuna*
- *Nessuna*
- *No*
- *No*
- *No*
- *No*

Allegato 35

## BIBLIOGRAFIA

- AA. VV. 2004 AA. VV., *Matemilano – percorsi di matematica in città*, Milano, Ed. Sprinter, 2004
- BELLINGERI et al. 2001 BELLINGERI P., DEDÒ M., DI SIENO S., TURRINI C., *Il ritmo delle forme*, Milano, Ed. Mimesis, 2001
- BOLONDI 2005 BOLONDI G., *La matematica quotidiana*, Milano, Ed. Mimesis, 2005
- BRUINI 1976 BRUINI G., *Tra le “maglie” della matematica*, Giunti Barbera, 1976
- CACCIAMANI 2002 CACCIAMANI S., *Psicologia per l'insegnamento*, Roma, Carocci, 2002
- CAPONI et. al. 2006 CAPONI B., FALCO G., FOCCHIATTI R., CORNOLDI C., LUCANGELI D., *Didattica metacognitiva della matematica*, Trento, Erikson, 2006
- CAPURSO 2004 CAPURSO M., *Relazioni educative e apprendimento*, Trento, Erikson, 2004
- CARUGATI – SELLERI 2001 CARUGATI F., SELLERI P., *Psicologia dell'educazione*, Bologna, Il Mulino, 2001
- CAZZOLA 2007 CAZZOLA M., *Fare esperienza di matematica a scuola*, introduzione al volume *Conorovesciato*, Milano, Ed. Mimesis, 2007
- COLOMBO BOZZOLO et al. 2004 COLOMBO BOZZOLO C., COSTA A., ALBERTI C. (a cura di), *Nel mondo della geometria 4 – Le trasformazioni geometriche, l'utilizzo dei software dinamici*, Ed. Erikson, 2004
- CORNOLDI et al. 1995 CORNOLDI C., CAPONI B., FALCO G., FOCCHIATTI R., LUCANGELI D.,

*Matematica e metacognizione – Atteggiamenti metacognitivi e processi di controllo*, Erikson, 1995

- D'AMORE-FRABBONI 2005 D'AMORE B., FRABBONI F., *Didattica generale e didattica disciplinare – La matematica*, Ed. Bruno Mondatori, 2005
- DE VECCHI 1999 DE VECCHI G., CARMONA-MAGNALDI N., *Aiutare a costruire le conoscenze*, Firenze, La Nuova Italia, 1999
- GALLO – VEZZANI 2007 GALLO P., VEZZANI C., *Mondi nel mondo – Fra gioco e matematica*, Milano, Ed. Mimesis, 2007
- FONZI 2001 FONZI A., (a cura di), *Manuale di psicologia dello sviluppo*, Firenze, Giunti, 2001
- FREUDENTHAL 1994 FREUDENTHAL H., *Ripensando l'educazione matematica*, Brescia, Ed. La Scuola, 1994
- GENOVESE - KANIZSA 1991 GENOVESE L., KANIZSA S., (a cura di), *Manuale della gestione della classe*, Milano, Angeli, 1991
- GIOVANNINI 1998 GIOVANNINI D., (a cura di), *Colloquio psicologico e relazione interpersonale*, Carocci, 1998
- HMELO – SILVER 2004 HMELO – SILVER C. E., *Problem-Based Learning: what and how do students learn?*, in *Educational Psychology Review*, 16 (2004)
- NEGRI 2005 NEGRI S. C., *Il lavoro di gruppo nella didattica*, Roma, Carocci, 2005
- NIGRIS 2003 NIGRIS E., (a cura di), *Didattica generale*, Milano, Guerini scientifica, 2003

