

"Sapienza" Università degli Studi di Roma  
A.A. 2007-2008



Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Tesi di laurea specialistica  
in Didattica e Storia della Matematica

# Esperienze didattiche su problemi di ottimizzazione

Laureanda  
*Maria Cristina Migliucci*

Relatore  
*Prof. Eugenio Montefusco*

*A Mia Madre*

*I miei traguardi sono i suoi*

*Il mio grazie a tutti coloro che ho avuto la fortuna di incontrare sulla mia strada, ognuno dei quali mi ha arricchito ed ha contribuito a formare e a realizzare la persona che oggi sono.*

*Grazie al Prof. Montefusco per la disponibilità, la pazienza e la fiducia che mi ha accordato.*

*Grazie alla Prof.ssa Tovena, che occupa un posto privilegiato nel mio cuore, per aver sempre gratificato il mio impegno e per avermi educato ai criteri di un lavoro accurato ed autonomo.*

*Grazie alla Prof.ssa Marinelli e alla Prof.ssa Sopranzi che, con il loro esempio e con la loro professionalità, hanno rafforzato la mia scelta verso la scuola.*

*Grazie alle mie colleghe, nuove preziose amiche, che hanno reso indimenticabile il mio primo anno di insegnamento supportandomi con un gratuito, serrato, severo tutoraggio.*

*Grazie ai miei amici di sempre che, da sempre, condividono con me il bello e il brutto, le gioie e le ansie.*

*Un grazie speciale a tutta la mia famiglia, unica sotto molti aspetti, perché, pilastro nella mia vita, mi regala amore costante, discreto, paziente e generoso.*

*Grazie a nonna Dolores, per me amica, confidente, consigliera, complice, sostegno, guida, ma soprattutto grande esempio di donna, di madre e di nonna.*

*Il mio grazie più profondo è per mio fratello Paolo, più piccolo ma anche più grande di me, che ben conosce e sopporta i miei difetti e a cui non sempre so dire il mio immenso amore e la mia profonda ammirazione.*

*Non da ultimo, grazie a Mia Madre, per tutto.*

# INDICE

## Presentazione

<b>Introduzione</b>	1
<b>1. Il problema isoperimetrico</b>	10
1.1 La disuguaglianza isoperimetrica nel piano	11
<b>2. Disuguaglianze che implicano la disuguaglianza isoperimetrica</b>	19
2.1 La disuguaglianza di Tolomeo	22
2.2 La disuguaglianza di Brahmagpta	26
<b>3. Cenni di teoria geometrica della misura</b>	31
3.1 Basi di teoria della misura	31
3.2 La misura di Hausdorff	38
3.3 Teoremi di ricoprimento	42
3.4 La misura di Lebesgue	43
3.5 Curve e continuità	44

<b>4. Alcuni problemi di massimo e minimo</b>	58
4.1 Il problema di Didone	58
4.2 Il problema del quadrato opaco	60
<b>5. Il test nelle scuole</b>	66
5.1 Conclusioni	70
<b>Appendice</b>	72
<b>Bibliografia</b>	77

## Presentazione

Scopo di questa tesi è quello di presentare alcuni problemi dalla ricca storia e dall'immediata ed importante applicazione in ambito didattico.

L'origine del problema isoperimetrico è perso all'inizio della storia della matematica. Sappiamo che gli antichi greci cercavano proprietà isoperimetriche per il cerchio e la sfera. La teoria moderna delle superfici minime rappresenta una classe di problemi molto più ampia; si cerca infatti di trovare quelle superfici, dette ipersuperfici, che minimizzano l'area della superficie stessa rispetto ad una qualche proprietà. Grazie agli sviluppi, nel secolo scorso, della teoria geometrica della misura, abbiamo risultati di esistenza e di regolarità per la maggior parte dei problemi "naturali" isoperimetrici.

Nel primo capitolo si definisce il classico problema isoperimetrico in uno spazio euclideo e si danno alcuni argomenti elementari per la sua risoluzione in un piano euclideo. In particolare si fornisce una recente dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica, la quale non include però una vera e propria caratterizzazione dell'uguaglianza. Successivamente si prova la disuguaglianza isoperimetrica usando le serie di Fourier.

Nel secondo capitolo, si cerca di risolvere il problema isoperimetrico per i quadrilateri nel piano con quattro lati assegnati senza ricorrere all'utilizzo della disuguaglianza isoperimetrica dimostrata nel primo capitolo. Si giungono così a dimostrare la disuguaglianza di Tolomeo e la disuguaglianza di Brahmagupta e la proprietà del massimo per i quadrilateri in entrambi i casi.

Nel terzo capitolo si definisce la misura di Hausdorff e si scrono le sue proprietà basilari. Ci si interessa poi particolarmente di insiemi di dimensione  $s$ , gli  $s$ -insiemi: insiemi di dimensione finita di Hausdorff diversa da zero. Si caratterizzano poi gli insiemi come sottoinsiemi di unioni numerabili di curve o superfici rettificabili presentando così una teoria degli insiemi misurabili linearmente, cioè degli 1-insiemi in  $\mathbb{R}^2$ . In ultimo si dimostra il risultato di Blaschke (teorema 3.18), che rappresenta una delle basi per la dimostrazione dell'esistenza di una curva di massima misura con specifiche proprietà.

Nel quarto capitolo si propone poi la soluzione di due problemi di ottimizzazione: il classico problema di Didone, dimostrato con un approccio puramente geometrico attraverso la "manovra di Steiner", ed il problema di Fred Almgren, più noto come il problema del quadrato opaco, la cui dimostrazione si basa appunto sul teorema di selezione di Blaschke.

Nel quinto capitolo, infine, si riportano i dati raccolti in alcune scuole di istruzione secondaria superiore presso le quali è stato proposto un questionario riportante alcuni problemi di ottimizzazione.

## INTRODUZIONE

Il primo problema di massimo nella storia si deve ad un'antica leggenda narrata anche nel I Libro dell'Eneide. Nel lontano 800 a.C. Elissa o Elisa (a noi nota come Didone, l'errante), principessa di origine fenicia, dopo la morte del marito Sicheo, fugge per mare insieme alla sorella e a pochi fedeli finché approda sulle coste africane. Lì chiede al re della Libia, Iarba, un pezzo di terra su cui fondare una città. Il re, folgorato dalla bellezza di Didone, non vuole dare ai fuggiaschi né asilo né terre ove stabilirsi, a meno che lei non acconsenta a sposarlo. La donna rifiuta e ottiene da Iarba tanta terra “taurino quantum possent circumdare tergo” (“quanta una pelle di buone potesse circondare”, Eneide I, 367-368 ). Didone accetta la sfida e riesce ad occupare la terra necessaria per fondare Cartagine: chiede un paio di forbici, taglia in strisce sottilissime la pelle, le annoda e con il filo ottenuto recinta un bel pezzo di terreno a forma di semicerchio. Il problema di Didone è noto come problema isoperimetrico: fra tutte le curve piane di uguale perimetro qual è quella che racchiude la massima area? I Greci avevano capito che la soluzione era rappresentata dalla

circonferenza (semicirconferenza nel caso di Didone), ma non ne possedevano una dimostrazione.

La soluzione geometrica rigorosa occupò i matematici per secoli. Vari tentativi di varia efficacia furono fatti da Archimede, Zenodoro, Pappo e poi in tempi più recenti da Eulero, Galileo, Legendre, L'Huilier, Riccati, Simpson, e, tra il 1838 e il 1841, Steiner fino a Hilbert.

Al di là del problema isoperimetrico, le questioni di massimo e di minimo hanno sempre avuto un grande valore nell'interpretazione dei fenomeni naturali, in relazione al principio aristotelico secondo cui la natura sceglie sempre la via più facile: nulla accade nell'universo che non faccia capo a qualche criterio di massimo o di minimo.

Il primo problema di massimo esplicitamente formulato è contenuto negli Elementi di Euclide, matematico alessandrino vissuto nel III secolo a.C.

Euclide, raccogliendo tutto il patrimonio di sapere costruito dagli studiosi che lo precedettero, offre, con la sua monumentale opera, il primo esempio di trattato scientifico per il metodo rigorosamente deduttivo usato. Negli Elementi, libro V prop. 27, Euclide scrive: “Di tutti i parallelogrammi applicati alla stessa retta (costruiti su una parte di retta) e deficienti ( dal parallelogramma costruito sull'intera retta) di figure

parallelogrammatiche simili e similmente situate rispetto al parallelogramma descritto sulla metà della retta, ha area maggiore quel parallelogramma che è applicato a metà della retta e che è simile al difetto.”

In termini moderni potremmo enunciare la proposizione nelle seguente forma geometricamente modificata: dato un triangolo  $ABC$ , se da un punto  $D$  del lato  $\overline{BC}$  si tracciano le parallele  $\overline{ED}$  ad  $\overline{AC}$ ,  $\overline{FD}$  ad  $\overline{AB}$ , l'area del parallelogramma  $AEDF$  è massima quando  $D$  è il punto medio di  $\overline{BC}$ .

Nel caso particolare che  $\overline{AB} = \overline{AC}$  e l'angolo  $\widehat{BAC}$  è retto allora tra tutti i rettangoli di perimetro dato, il quadrato è quello di area massima. (Non è difficile mostrare che fra tutti i triangoli con due lati assegnati, quello rettangolo avente per cateti tali lati ha area massima).

Ma tra le questioni note ai Greci si possono ricordare i seguenti problemi isoperimetrici:

- fra tutti i poligoni convessi di  $n$  lati e di dato perimetro quello regolare racchiude l'area massima;
- fra tutte le superfici piane, il cui contorno ha una data lunghezza, il cerchio ha l'area massima (problema di Didone);
- fra tutti i solidi di data superficie la sfera ha il massimo volume.

Tra coloro che si interessarono di tali questioni ricordiamo Zenodoro (II secolo a.C.) che confrontò le superfici dei poligoni con

ugual perimetro e dimostrò che l'area maggiore è racchiusa dai poligoni con maggior numero di lati e, fra tutti, dal cerchio, raggiungendo un'analoga conclusione (senza dimostrazione) per la sfera. I suoi risultati ci vengono riportati da Pappo nell'opera "Collezioni matematiche" il cui Libro V è dedicato proprio ai problemi di isoperimetria.

Si hanno anche altri risultati quali:

- fra tutti i triangoli di assegnato perimetro, con la stessa base, quello che ha area maggiore è il triangolo equilatero;
- fra i poligoni, quelli con area maggiore sono le figure convesse, in particolare i poligoni regolari;
- tutti i segmenti circolari limitati da un arco di data lunghezza il semicerchio ha l'area massima (ancora il problema di Didone).

Successivamente all'opera di Euclide troviamo in Grecia il lavoro di Apollonio (circa 262 a.C. - 190 a.C.). L'opera che meritò ad Apollonio il titolo di Grande Geometra è intitolata "Coniche". Il Libro V dell'opera di Apollonio tratta il problema della determinazione delle rette di lunghezza massima e minima che da particolari punti possono essere condotte a una conica. I suoi teoremi sui massimi e minimi sono in realtà teoremi sulle tangenti e sulle normali alle sezioni coniche di fondamentale importanza in campi quali la meccanica celeste e la dinamica terrestre.

Nel I secolo d.C. Erone di Alessandria, interessato alle misure in ottica e in meccanica, trasse nella sua *Catottica* un'importante

conseguenza dalla legge della riflessione secondo cui un raggio di luce proveniente da un punto  $P$  e incidente su uno specchio piano  $L$  in un punto  $R$  viene riflesso nella direzione di un punto  $Q$  tale che  $PR$  e  $QR$  formano con  $L$  angoli uguali. Erone mostrò che fra tutti i cammini possibili per andare da  $P$  a  $Q$  passando per lo specchio il cammino più breve è quello per cui gli angoli di incidenza e riflessione sono uguali. Come a dire che la natura conosce bene la geometria e la sfrutta a suo vantaggio. Dal risultato di Erone si possono derivare altre proprietà in geometria elementare quali le proprietà tangenziali dell'ellisse e dell'iperbole. Dobbiamo attendere il XVII secolo per avere altri risultati interessanti; in quel periodo, infatti, Fermat dimostrò che anche la legge della rifrazione della luce può esser enunciata in termini di un principio di minimo.

La soluzione di problemi di massimo e minimo mediante metodi puramente geometrici, cioè senza basarsi sull'ormai nato calcolo delle variazioni, continuò ad essere oggetto di studio. Nel secolo successivo Cramer mostrò che fra tutti i 5 poligoni piani convessi aventi come lati  $n$  segmenti dati, ha area massima quello inscrivibile in un cerchio. A L'huilier, vissuto a cavallo tra il XVIII e il XIX secolo, si deve l'opera di raccolta e riordino di quanto si conosceva fino allora sui problemi degli isoperimetri nel piano e nello spazio. Il famoso studioso di geometria Jacob Steiner, operante a Berlino nella prima metà dell'800, trattò numerose questioni di massimo e minimo utilizzando modi diversi per

stabilire le proprietà isoperimetriche del cerchio e della sfera dalle quali dedusse numerosi applicazioni.

Una tra le questioni (già nota a Caratheodory) mostrate da Steiner è la seguente: tre villaggi  $A, B, C$  devono essere congiunti da un sistema stradale di minima lunghezza totale. Matematicamente il problema si traduce nel cercare, nel piano in cui giacciono i punti dati, un punto  $P$  tale che sia minima la somma  $a + b + c$  delle distanze di  $P$  rispettivamente da  $A, B$  e  $C$ . Sulla scia della dimostrazione delle proprietà tangenziali dell'ellisse si può vedere che la soluzione al problema è la seguente: se nel triangolo  $ABC$  tutti gli angoli sono minori di  $\pm 2\pi/3$ ,  $P$  è il punto che proietta ciascuno dei tre lati  $AB; BC; AC$ , secondo un angolo di  $\pm 2\pi/3$ . Se un angolo è maggiore o uguale a  $2\pi/3$ , il punto  $P$  coincide con il vertice di tale angolo. L'opera di raccolta e perfezionamento di Steiner fu continuata da R. Sturm nel suo libro "Maxima und Minima in der elementaren Geometrie" del 1910. Il risultato di Steiner più famoso ottenuto per via sintetica è il teorema sugli isoperimetri, ovvero che tra tutte le figure piane di dato perimetro il cerchio è quello che racchiude l'area massima. I suoi metodi sintetici furono attaccati dal punto di vista analitico dai suoi contemporanei, primo tra tutti Dirichlet. Sfortunatamente, infatti, Steiner ipotizzava l'esistenza della curva massimizzante, mentre ciò che dimostrò è il fatto che se tale curva esiste allora è una circonferenza. La dimostrazione di

una curva massimizzante creò non pochi problemi ai matematici negli anni successivi fino a quando Weierstrass fece ricorso al calcolo delle variazioni. Un altro risultato fondamentale si deve a Hermann Schwartz, matematico di Berlino, che trattò e dimostrò il seguente problema: dato un triangolo acutangolo  $ABC$ , iscrivere in esso un triangolo di perimetro minimo. Egli dimostrò che esiste un solo triangolo di questo tipo ed è quello avente i vertici ai piedi delle altezze del triangolo dato.

Nel 1884 Schwartz dimostrò la proprietà di isoperimetria della sfera nello spazio tridimensionale, cioè che tra tutti i solidi con la stessa superficie la sfera è quella che ha il volume maggiore. Nel 1958 poi Ennio De Giorgi mostrò, utilizzando la “teoria dei perimetri”, che vale la stessa proprietà in uno spazio di dimensione maggiore, e che quindi la sfera ha la stessa proprietà in qualsiasi dimensione.

## Capitolo 1

# IL PROBLEMA ISOPERIMETRICO

Dato un dominio limitato (intervallo aperto) sulla retta reale, la misura discreta della sua frontiera è due. Dato un qualche sottoinsieme limitato aperto della retta, la misura discreta della sua frontiera è  $\geq 2$  (vale l'uguaglianza se e solo se l'insieme è un intervallo). Questa è la disuguaglianza isoperimetrica sulla retta. Nel piano abbiamo tre formulazioni equivalenti del medesimo problema:

- 1) consideriamo tutti i domini limitati in  $\mathbb{R}^2$  con lunghezza del bordo fissata, (cioè, tutti i domini presi in considerazione sono isoperimetrici). Cerchiamo il dominio che contiene la massima area. La risposta naturalmente è il disco. Notiamo che il valore specifico del perimetro non ci interessa perché tutti i domini di perimetro  $L_1$  sono mappati con una similarità di  $\mathbb{R}^2$  a tutti i domini di perimetro  $L_2$  per alcuni dati valori  $L_1$  e  $L_2$ , e l'immagine, sotto questa similarità, di un'area massima per  $L_1$  è un'area massima per  $L_2$ .
- 2) si insiste su un'area comune di tutti i domini limitati presi in considerazioni e ci si chiede come minimizzare il perimetro.

3) infine, si esprime il problema con una disuguaglianza analitica, poiché sappiamo esattamente i valori dell'area del disco e la lunghezza della sua frontiera. Il problema isoperimetrico è allora espresso come dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica:

$$L^2 \geq 4\pi A$$

dove  $A$  denota l'area del dominio preso in considerazione ed  $L$  denota la lunghezza della sua frontiera. La disuguaglianza è consistente perché necessariamente rimane invariante sotto le similarità di  $\mathbb{R}^2$ , ed è verificata l'uguaglianza se il dominio è un disco.

## 1.1 La disuguaglianza isoperimetrica nel piano

Sia  $\omega: \alpha, \beta \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva  $C^2$  nel piano. Il suo vettore velocità è dato dalla sua derivata  $\omega'$ , e il vettore accelerazione da  $\omega''$ . Assumiamo che  $\omega$  sia un'immersione<sup>1</sup> e che  $\omega'$  non si annulli mai.

---

<sup>1</sup> Una funzione differenziabile  $f: M \rightarrow N$  fra due varietà differenziabili è una **immersione** se il differenziale  $D_p f: T_p M \rightarrow T_p N$  è iniettivo per ogni punto  $p$  di  $M$ .

L'elemento infinitesimo dell'arco di lunghezza  $d$  è dato da  $ds = |\omega'(t)| dt$ . Dato un qualche  $t_0 \in \alpha, \beta$ , la lunghezza dell'arco in

funzione di  $\omega$  basata in  $t_0$  è  $s(t) = \int_{t_0}^t |\omega'(\tau)| d\tau$ .

Siano  $T(t) = \frac{\omega'(t)}{|\omega'(t)|}$  il vettore tangente unitario lungo  $\omega$ ,  $i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la

rotazione oraria di  $\pi/2$  di  $\mathbb{R}^2$  e  $N = iT$  il vettore normale orientato

lungo  $\omega$ . Definiamo allora la curvatura  $\kappa$  di  $\omega$  tale che  $\frac{dT}{ds} = \kappa N$ .

Ricaviamo quindi le formule di Frenet:

$$\kappa = \frac{dT}{ds} \cdot N = \frac{\omega'' \cdot i\omega'}{|\omega'|^3} \quad \text{e} \quad \frac{dN}{ds} = -\kappa T.$$

Si può inoltre provare che se la curvatura  $\kappa$  è costante allora  $\omega$  è un arco di un cerchio.

### TEOREMA 1.1:

*Dato un numero reale positivo  $A$ , sia  $D$  l'insieme dei domini  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  relativamente compatti di classe  $C^1$  aventi area  $A$ , e si supponga che esista un dominio  $\Omega$ , avente minima lunghezza della frontiera tra tutti i domini  $D \in D$ .*

*Allora  $\Omega$  è il disco.*

Dimostrazione:

Poiché  $\Omega$  è un dominio relativamente compatto in  $\mathbb{R}^2$ , esiste un dominio  $\Omega_0$  semplicemente connesso tale che:

$$\Omega = \Omega_0 \setminus \text{unione finita disgiunta dei dischi topologici chiusi} .$$

Affermiamo che poiché  $\Omega$  è il dominio con frontiera minima, allora  $\Omega_0 = \Omega$ ; altrimenti possiamo aggiungere il disco topologico ad  $\Omega$  che aumenterà l'area del dominio e diminuirà la lunghezza della frontiera, e pertanto  $\Omega$  non sarà un elemento minimizzante. Così,  $\Omega_0 = \Omega$ , ed è limitato dal cerchio immerso.

Sia  $\Gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \in C^1$  l'immersione della frontiera di  $\Omega$ , assumiamo sempre che il cammino  $\Gamma$  è orientato, così che  $\nu = -N$  in tutti i punti di  $\Gamma$ , laddove  $\nu$  è il vettore campo normale esterno lungo  $\partial\Omega$ .

Consideriamo una famiglia a 1-parametro  $\Gamma_\varepsilon : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  di immersioni  $\nu : -\varepsilon_0, \varepsilon_0 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tali che  $\nu_{\varepsilon, t} = \Gamma'_\varepsilon(t) = \Gamma'(t) + \Psi_{\varepsilon, t} \nu(t)$  con

$\Psi(0, t) = 0$  di classe  $C^1$ . Allora  $\frac{\partial \nu}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \nu$ . Ora:

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = \Gamma'' + \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial t} \nu + \Psi \nu' \right\} = \left( 1 + \kappa \Psi \right) \Gamma'' + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \nu$$

e quindi

$$\left| \frac{\partial \nu}{\partial t} \right| = \left\{ \left( 1 + \kappa \Psi \right)^2 \frac{1}{|\Gamma'|^2} + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 \right\}^{1/2} |\Gamma'|.$$

Dal teorema di Taylor abbiamo, per  $\phi(t) \doteq \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$ , l'espansione

$$\Psi(\varepsilon, t) = \varepsilon \phi(t) + o(\varepsilon), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = \phi(t) + o(1), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = O(\varepsilon), \quad \text{e quindi}$$

$$\left| \frac{\partial \nu}{\partial t} \right| = |\Gamma'| (1 + \varepsilon \kappa \phi + o(\varepsilon)).$$

Perciò, l'elemento di area  $dA$  in coordinate curvilinee  $(t, \varepsilon)$  è dato

$$\text{da: } dA = \left| \frac{\partial \nu}{\partial \varepsilon} \times \frac{\partial \nu}{\partial t} \right| d\varepsilon dt = \phi(t) |\Gamma'| (1 + o(1)) d\varepsilon dt = \phi(t) |\Gamma'| (1 + o(1)) d\varepsilon ds.$$

Per il dominio  $\Omega_\varepsilon$  determinato da  $\Gamma_\varepsilon$ , abbiamo, per un  $\varepsilon$

$$\text{sufficientemente piccolo, che: } A(\Omega_\varepsilon) - A(\Omega) = \int_0^\varepsilon d\sigma \int_\Gamma \phi(t) |\Gamma'| ds.$$

$$\text{Perciò, se } A(\Omega_\varepsilon) = A(\Omega) \text{ per tutti gli } \varepsilon, \text{ allora } \int_\Gamma \phi ds = 0.$$

Denotiamo con  $L(\varepsilon)$  la lunghezza di  $\Gamma_\varepsilon$ . Poiché  $\Gamma$  rappresenta la minima lunghezza, abbiamo che  $L'(0) = 0$ . Perciò, poiché

$$L'(\varepsilon) = \int_{s^1} \left| \frac{\partial \nu}{\partial t} \right| dt = \int_{s^1} |\Gamma'| (1 + \varepsilon \kappa \phi + o(\varepsilon)) dt = \int_\Gamma (1 + \varepsilon \kappa \phi + o(\varepsilon)) ds, \text{ abbiamo che:}$$

$$0 = L'(0) = \int_\Gamma \kappa \phi ds, \quad \int_\Gamma \phi ds = 0 \quad \text{per qualche variazione di } \Gamma.$$

Allo stesso modo, dato un qualche  $\phi \in C^1$  tale che  $\int_\Gamma \phi ds = 0$ , esiste

una variazione  $\nu$  di  $\Gamma$  tale che  $A(\Omega_\varepsilon) = A(\Omega)$  per tutti gli  $\varepsilon$ , e

$$L'(0) = \int_\Gamma \kappa \phi ds. \text{ Allora abbiamo che } \int_\Gamma \kappa \phi ds = 0 \quad \forall \phi \in C^1: \int_\Gamma \phi ds = 0. \text{ Per}$$

mostrare che questo implica che  $\kappa$  è costante prendiamo un

qualche insieme  $\psi: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  in  $C^1$  con  $\phi = \psi - \int_{\Gamma} \psi ds / \int_{\Gamma} ds$ . Allora

$$\int_{\Gamma} \phi ds = 0 \quad \text{e} \quad 0 = \int_{\Gamma} \kappa \left( \psi - \frac{1}{L_{\Gamma}} \int_{\Gamma} \psi ds \right) ds = \int_{\Gamma} \left( \kappa - \frac{1}{L_{\Gamma}} \int_{\Gamma} \kappa ds \right) \psi ds, \text{ dove } L \text{ sta ad}$$

indicare la lunghezza di  $\Gamma$ . Poiché  $\psi$  è arbitrariamente  $C^1$ , allora

$$\kappa - \frac{1}{L_{\Gamma}} \int_{\Gamma} \kappa ds = 0 \quad \text{e} \quad \text{ricaviamo che la curvatura è quindi costante.}$$

Quindi  $\Gamma$  è un cerchio. □

**TEOREMA 1.2:** (disuguaglianza isoperimetrica in  $\mathbb{R}^2$ )

Sia  $\Omega$  un dominio relativamente compatto, con frontiera  $\partial\Omega \in C^1$  costituita da un'unica componente. Allora:

$$L^2 \partial\Omega \geq 4\pi A_{\Omega} .$$

Dimostrazione:

Denotiamo ciascun elemento del piano con un numero complesso  $z = x + iy$ , la misura dell'area come un elemento di volume orientato, e

così:  $dA = dx \wedge dy = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}$ . Allora:

$$4\pi A_{\Omega} = \iint_{\Omega} 2\pi i dz \wedge d\bar{z} = \iint_{\Omega} dz \wedge d\bar{z} \int_{\partial\Omega} \frac{d\xi}{\xi - z} = \int_{\partial\Omega} d\xi \iint_{\Omega} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{\xi - z} = \int_{\partial\Omega} d\xi \int_{\partial\Omega} \frac{\xi - \bar{z}}{\xi - z} dz \leq L^2 \partial\Omega$$

□

**LEMMA1.3:** ( disuguaglianza di Wirtinger )

Sia  $f$  una funzione  $C^1$ ,  $L$  una funzione periodica su  $\mathbb{R}$  e  $\int_0^L f(t) dt = 0$ ,

allora:

$$\int_0^L |f'(t)|^2 dt \geq \frac{4\pi^2}{L^2} \int_0^L |f(t)|^2 dt.$$

Vale l'uguaglianza poi se e solo se esistono due costanti  $a_{-1}, a_1$  tali che

$$f(t) = a_{-1}e^{-2\pi it/L} + a_1e^{2\pi it/L}.$$

Dimostrazione:

La funzione  $f(t)$  ammette un'espansione di Fourier:

$$f(t) \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{2\pi ikt} \quad \text{con} \quad a_k = \frac{1}{L} \int_0^L f(t) e^{-2\pi ikt/L} dt,$$

e quindi  $f'(t) \leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{2\pi ikt}$  con  $b_k = \frac{1}{L} \int_0^L f'(t) e^{-2\pi ikt/L} dt$ .

La continuità di  $f$  implica che  $b_0 = 0$ , e per ipotesi possiamo anche

dedurre  $a_0 = 0$ . Integrando per parti otteniamo  $b_k = \frac{2\pi ik}{L} a_k \quad \forall |k| \geq 1$ , e

attraverso la disuguaglianza di Parseval abbiamo allora:

$$\int_0^L |f'(t)|^2 dt = L \sum_{k \neq 0} |b_k|^2 = L \frac{4\pi^2}{L^2} \sum_{k \neq 0} k^2 |a_k|^2 \geq L \frac{4\pi^2}{L^2} \sum_{k \neq 0} |a_k|^2 = \frac{4\pi^2}{L^2} \int_0^L |f(t)|^2 dt$$

che implica la disuguaglianza cercata. Si avrà poi l'uguaglianza se  $a_k = 0$

per tutti  $|k| > 1$ . □

**TEOREMA 1.4 :**

Se  $\Omega$  è un dominio relativamente compatto in  $\mathbb{R}^2$ , con frontiera  $C^1$  costituito da una componente, allora

$$L^2 \partial\Omega \geq 4\pi A \Omega .$$

Vale l'uguaglianza se e solo se  $\Omega$  è un cerchio.

Dimostrazione:

Assicuriamoci che  $\Omega$  sia tale che  $\int_{\partial\Omega} x ds = 0$ ,  $x = x^1, x^2$ .

Sia  $x = x^1 e_1 + x^2 e_2$  il vettore campo su  $\mathbb{R}^2$  con punto base  $x = x^1, x^2$ .

Usiamo il teorema della divergenza 2-dimensionale e per ciascun campo vettoriale  $x \mapsto \xi$   $x \in \mathbb{R}^2$  di classe  $C^1$ , con supporto contenuto

nella chiusura di  $\Omega$ , abbiamo  $\iint_{\Omega} \operatorname{div} \xi dA = \int_{\partial\Omega} \xi \cdot \nu ds$ , dove  $\nu$  denota il vettore

unitario normale al campo lungo  $\partial\Omega$ . Possiamo ottenere quest'ultima

utilizzando il tradizionale teorema di Green  $\iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\} dA = \int_{\partial\Omega} P dx + Q dy$

scegliendo  $P = -\xi^2$ ,  $Q = \xi^1$ ,  $\xi = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2$ .

Abbiamo allora  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} = \operatorname{div} \xi$  e  $P dx + Q dy = -\xi^2 dx^1 + \xi^1 dx^2 =$

$= \xi \cdot dx^2 e_1 - dx^1 e_2 = \xi \cdot -i dx = \xi \cdot \nu ds$ . Per il nostro vettore campo  $x$

abbiamo  $\operatorname{div} x = 2$  su tutto  $\Omega$ . Allora il teorema della divergenza implica:

$$2A \Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div} x dA = \int_{\partial\Omega} x \cdot \nu ds \leq \int_{\partial\Omega} |x| ds \leq \left\{ \int_{\partial\Omega} |x|^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\partial\Omega} 1^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} = L^{\frac{1}{2}} \partial\Omega \left\{ \int_{\partial\Omega} |x|^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}}$$

dove la prima disuguaglianza rappresenta la disuguaglianza vettoriale di Cauchy-Schwarz, la seconda rappresenta invece la disuguaglianza integrale.

Parametrizziamo adesso  $\partial\Omega$  rispetto alla lunghezza dell'arco. Allora

$$|x|^2 = x^1{}^2 + x^2{}^2 \quad \text{e} \quad \left| \frac{dx}{ds} \right|^2 = \left( \frac{dx^1}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dx^2}{ds} \right)^2 \quad \text{lungo } \Omega, \quad \text{e così per la}$$

disuguaglianza di Wirtinger, applicata a ciascuna coordinata  $x^1(s), x^2(s)$ , abbiamo che:

$$2A_{\Omega} \leq L^{1/2} \partial\Omega \left\{ \int_{\partial\Omega} |x|^2 ds \right\}^{1/2} \leq L^{1/2} \partial\Omega \left\{ \frac{L^2}{4\pi^2} \int_{\partial\Omega} |x|^2 ds \right\}^{1/2} = \frac{L^2}{2\pi} \partial\Omega$$

Il caso dell'uguaglianza segue poi banalmente. □

## Capitolo 2

# DISUGUAGLIANZE CHE IMPLICANO LA DISUGUAGLIANZA ISOPERIMETRICA

Tra tutte le regioni del piano con area  $A$  fissata, quanto può misurare al massimo il suo perimetro?

E, poiché le regioni hanno tutte la stessa area, quale figura realizza il massimo perimetro?

La risposta ad entrambe le domande è il cerchio e la disuguaglianza isoperimetrica rappresenta la formalizzazione di quest'idea.

TEOREMA: (Disuguaglianza Isoperimetrica)

*Tra tutte le regioni del piano racchiuse da una curva di frontiera  $C^1$ , con area  $A$  e perimetro  $L$ , vale la relazione  $4\pi A \leq L^2$ . Se vale l'uguaglianza allora la regione è un cerchio.*

Supponiamo di avere quattro lati di lunghezza  $a, b, c, d$ . Quale quadrilatero nel piano delimitato dai lati  $a, b, c, d$  massimizza l'area? La soluzione è data dal quadrilatero<sup>1</sup> ciclico, quello i cui vertici giacciono

---

<sup>1</sup> TEOREMA:

Siano  $a, b, c, d$  quattro numeri non negativi tale che

$a \leq b+c+d, \quad b \leq c+d+a, \quad c \leq d+a+b, \quad d \leq a+b+c$ . Allora esiste un quadrilatero nel piano i cui lati hanno lunghezza, in ordine,  $a, b, c, d$ .

in ordine su una circonferenza, e si può provare che esiste un quadrilatero ciclico con i lati di lunghezza  $a, b, c, d$ .

Supponiamo di voler mostrare che tra i quadrilateri nel piano con quattro lati assegnati è proprio il quadrilatero ciclico quello di area massima. Questo problema potrebbe essere facilmente risolto con la disuguaglianza isoperimetrica, ma vogliamo usare altri due metodi dai quali poi dedurre tale disuguaglianza. Un metodo trigonometrico, la disuguaglianza di Brahmagupta, e un metodo ricavato dalla disuguaglianza di Tolomeo.

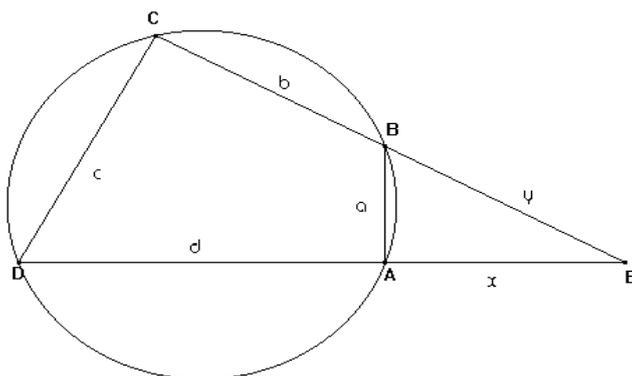
Consideriamo un quadrilatero ciclico con i lati assegnati. Assicuriamoci che possa essere costruito:

LEMMA 2.1:

*Prendiamo quattro numeri positivi  $a, b, c, d$  tali che  $a < b + c + d$ ,  $b < c + d + a$ ,  $c < d + a + b$ ,  $d < a + b + c$ . Allora esiste un quadrilatero ciclico nel piano i cui lati hanno lunghezza, in ordine,  $a, b, c, d$ .*

Dimostrazione:

Se  $a = c$  allora la figura è un trapezoide con i lati  $b$  e  $d$  paralleli.



Viceversa assumiamo che  $a < c$  e  $b \neq d$ . Possiamo allora costruire il quadrilatero ciclico di vertici  $ABCD$  con  $a = \overline{AB}$ ,  $b = \overline{BC}$ ,  $c = \overline{CD}$ ,  $d = \overline{DA}$ .

Prolungati i lati  $\overline{DA}$  e  $\overline{BC}$  chiamiamo  $E$  la loro intersezione e poniamo che  $\overline{DE} = x$  e  $\overline{BE} = y$ . I triangoli  $CED$  e  $AEB$  sono simili. La similitudine

implica che  $\frac{x}{y+b} = \frac{a}{c}$  e  $\frac{y}{d+x} = \frac{a}{c}$ . Poiché  $a < c$  possiamo ricavare

$x = a \frac{bc+ad}{c^2-a^2}$  e  $y = a \frac{ab+cd}{c^2-a^2}$ . In conclusione, se abbiamo potuto costruire

il triangolo di lati  $axy$  allora possiamo considerare

$A = a \cap x$ ,  $B = a \cap y$ ,  $E = x \cap y$ , prolungare  $\overline{EB}$  di una misura  $b$  e il lato

$\overline{EA}$  di una misura  $d$  fino ad incontrare rispettivamente la circonferenza

nei suoi punti  $C$  e  $D$ . Abbiamo così costruito il quadrilatero ciclico. Ma

$c-a < b+d$  e  $(c-a)(a+b+c-d) > 0$  implica che  $c^2 - a^2 + bc + ad > ab + cd$ , e

$(c-a)(a-b+c+d) > 0$  implica che  $c^2 - a^2 + ab + cd > bc + ad$ . Così:

$$x+y = \frac{a(b+d)}{c-a} > a,$$

$$a+x = \frac{a(c^2 - a^2 + bc + ad)}{c^2 - a^2} > \frac{a(ab+cd)}{c^2 - a^2} = y,$$

$$a+y = \frac{a(c^2 - a^2 + ab + cd)}{c^2 - a^2} > \frac{a(bc+ad)}{c^2 - a^2} = x.$$

ed il triangolo  $axy$  risulta costruito. □

Siano  $ABCD$  i suoi vertici su  $Z$ , la circonferenza che li contiene.

Immaginiamo che la regione di piano compresa tra i lati del quadrilatero ed la circonferenza sia costituita di un materiale plastico.

Così facendo la figura si può flettere nel piano. Il problema quindi di trovare la più grande area equivale a trovare l'area più grande racchiusa dal quadrilatero stesso o anche l'area più grande racchiusa tra i lati del quadrilatero e gli archi circolari poiché questa massa costituirà un determinata area. Per la disuguaglianza isoperimetrica l'area del cerchio racchiude l'area massima e così conseguentemente il quadrilatero ciclico contiene l'area maggiore. Quest'argomentazione è applicabile a poligoni con un certo numero di lati, per i quali, fissata la misura dei suoi lati, si ottiene l'area massima se e solo se è inscrittibile in un cerchio.

## 2.1 La disuguaglianza di Tolomeo

### TEOREMA 2.2:

*Siano  $ABCD$  quattro punti nel piano. Siano  $a, b, c, d$  le lunghezze dei lati  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$  e  $p$  e  $q$  le lunghezze delle due diagonali  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ .*

*Allora  $pq \leq ac + bd$ .*

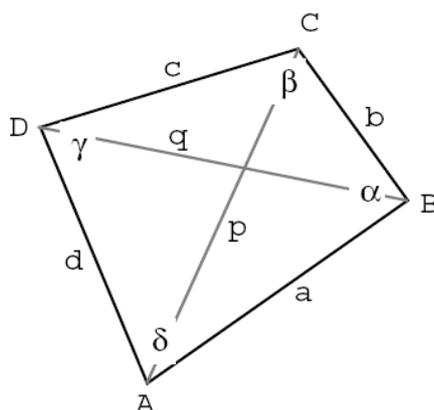
Se vale l'uguaglianza allora  $ABCD$  è ciclico o è contenuto in un segmento, cioè la lunghezza di uno dei suoi lati è uguale alla somma degli altri due.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup> Può accadere che il quadrilatero degeneri in un triangolo o in un punto, tutte figure cicliche comunque. Se vale l'uguaglianza allora la ciclicità implica che la figura è convessa. Inoltre il quadrilatero può anche degenerare in un segmento di lato pari alla somma degli altri tre. Allora i vertici non saranno contenuti in un cerchio, ma poiché la dimostrazione usa trasformazioni proiettive si può ricondurre un segmento al cerchio.

Dimostrazione:

Consideriamo i casi in cui i punti sia distinti tra loro e viceversa.



Consideriamo  $A$  distinto da  $BCD$ . Se i vertici  $ABCD$  assegniamo un numero complesso  $0, z_1, z_2, z_3$  con  $z_i \neq 0$ , allora

$a = |z_1|$ ,  $b = |z_1 - z_2|$ ,  $c = |z_2 - z_3|$ ,  $d = |z_3|$ ,  $p = |z_2|$ ,  $q = |z_1 - z_3|$ . Considerando

la disuguaglianza triangolare otteniamo:  $\left| \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_3} \right| \leq \left| \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right| + \left| \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_3} \right|$  e quindi

$\frac{|z_1 - z_3|}{|z_1||z_3|} \leq \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1||z_2|} + \frac{|z_2 - z_3|}{|z_2||z_3|}$ . Moltiplicando per  $|z_1||z_2||z_3|$  abbiamo

$|z_2||z_1 - z_3| \leq |z_3||z_1 - z_2| + |z_1||z_2 - z_3|$ , dove varrà l'uguaglianza se i punti

$z_1^{-1}$ ,  $z_2^{-1}$ ,  $z_3^{-1}$ ,  $\infty$  giacciono, in ordine, su una retta. Se la retta contiene

l'origine, allora il quadrilatero  $ABCD$  giace su una retta passante per

l'origine. Poiché  $z_2^{-1}$  giace tra  $z_1^{-1}$  e  $z_3^{-1}$  allora, in base a dove è

posizionata l'origine rispetto agli altri punti, la figura  $ABCD$  ha la

proprietà che uno dei lati ha lunghezza pari alla somma degli altri tre,

quindi  $B = C = D$  e la figura non è ciclica. Se poi la retta non passa per

l'origine, considereremo una circonferenza passante per l'origine, così

da imporre l'appartenenza di  $0, z_1, z_2, z_3$ . Può accadere che  $B=C$  oppure  $C=D$  e quindi coincidendo formino un triangolo. Ma, poiché i punti sono disposti in ordine su una circonferenza, il fatto che  $B=D$  implica che  $B=C=D$  oppure che la figura degenera.

L'ultimo caso da considerare è quello in cui nessuno dei punti sia distinto dagli altri quindi  $A=B=C=D$  e quindi la relazione da dimostrare si riduce a  $0=0$ . Ora se  $A=B \neq C=D$  allora  $a=c$  e  $b=d=p=q>0$  e quindi vale l'uguaglianza, cioè  $pq=ac+bd$ . Stessa conclusione se  $A=C \neq B=D$  e quindi  $p=q=0$  e  $a=b=c=d>0$  e se  $A=D \neq B=C$  e quindi  $b=d=0$  e  $a=c=p=q>0$ . □

Una disuguaglianza isoperimetrica per quadrilateri si basa su una netta limitazione per l'area del quadrilatero stesso, intendendo con area la misura della regione racchiusa dal poligono stesso.

Dalla disuguaglianza triangolare, ricaviamo che la lunghezza di ciascun lato è minore della somma degli altri tre lati. Viceversa, questa condizione sulle lunghezze è sufficiente a costruire un quadrilatero nel piano i cui lati siano lunghezze assegnate. Se poi un lato risulterà essere pari alla somma degli altri tre, questo degenera in un segmento.

La massima proprietà per i quadrilateri ciclici è stata osservata per la prima volta da Steiner:

**TEOREMA 2.3** ( Proprietà del massimo per i quadrilateri ciclici)

Siano  $ABCD$  i vertici di un quadrilatero nel piano. Siano  $a, b, c, d$  le lunghezze dei suoi lati  $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$  ed  $F$  la sua area. Allora:

$$16F^2 \leq (a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d).$$

Se vale l'uguaglianza, allora  $ABCD$  è ciclico o è contenuto su una retta ( con un lato pari alla somma degli altri tre).

Dimostrazione:

Se il quadrilatero degenera in una retta, allora  $F=0$  e se la seconda parte della disuguaglianza è zero allora ciascun termine sarà zero e quindi un lato risulterà pari alla somma degli altri tre.

Se invece  $ABCD$  è un quadrilatero convesso, possiamo considerare l'intersezione  $E$  di  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$ . Siano  $p_1, p_2, q_1, q_2$  le lunghezze di  $\overline{EC}, \overline{ED}, \overline{EA}, \overline{EB}$ , e sia  $\theta = \widehat{CED} = \widehat{AEB}$  e  $\pi - \theta = \widehat{DEA} = \widehat{BEC}$ . Allora l'area del quadrilatero sarà data dalla somma dell'area dei triangoli:

$$\begin{aligned} 2F &= p_1q_1\sin\theta + p_2q_1\sin(\pi - \theta) + p_2q_2\sin\theta + p_1q_2\sin(\pi - \theta) \\ &= (p_1q_1 + p_2q_1 + p_2q_2 + p_1q_2)\sin\theta \\ &= (p_1 + p_2)(q_1 + q_2)\sin\theta \\ &= pq\sin\theta \end{aligned}$$

Le lunghezze dei quattro lati saranno poi:

$$a^2 = p_2^2 + q_2^2 - 2p_2q_2\cos\theta$$

$$b^2 = p_1^2 + q_2^2 - 2p_1q_2\cos(\pi - \theta)$$

$$c^2 = p_1^2 + q_1^2 - 2p_1q_1\cos\theta$$

$$d^2 = p_2^2 + q_1^2 - 2p_2q_1\cos(\pi - \theta)$$

$$\text{E così: } a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = -2(p_2q_2 + p_1q_2 + p_1q_1 + p_1q_2)\cos\theta$$

$$\begin{aligned}
 &= -2(p_1 + p_2)(q_1 + q_2)\cos\theta \\
 &= -2pq\cos\theta
 \end{aligned}$$

E quindi usando la disuguaglianza di Tolomeo:

$$\begin{aligned}
 16F^2 &= 4p^2q^2\sin^2\theta \\
 &= 4p^2q^2 - 4p^2q^2\cos^2\theta \\
 &\leq 4(ac+bd)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 \\
 &= [2ac + 2bd + a^2 - b^2 + c^2 - d^2][2ac + 2bd - a^2 + b^2 - c^2 + d^2] \\
 &= [(a+c)^2 - (b-d)^2][(b+d)^2 - (a-c)^2] \\
 &= (a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)
 \end{aligned}$$

□

Se uno dei lati degenera, per esempio  $d=0$ , allora la figura risultante sarà un triangolo, che è pur sempre una figura ciclica. L'uguaglianza che ne segue non è altro che la Formula di Erone per l'area del triangolo:

$$4\text{Area}(ABC) = \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}.$$

## 2.2 La disuguaglianza di Brahmagupta

Brahmagupta era un matematico indiano che visse agli inizi del settimo secolo. Si interessò principalmente di teoria dei numeri e di soluzioni intere di equazioni; egli trovò molti triangoli e quadrilateri con lati di

misura intera che lo condussero ad una generalizzazione della formula di Erone per il calcolo dell'area del triangolo a partire dalla lunghezza dei lati nel caso nei quadrilateri: applicò la formula base ai quadrilateri ciclici. Con una dimostrazione trigonometrica è possibile adattare questa formula a tutti i quadrilateri nel piano. Un corollario immediato è la proprietà del massimo per i quadrilateri ottenuta da Steiner. Infatti, la formula di Brahmagupta fornisce il termine di errore nella disuguaglianza di Steiner. Ci sono diverse formulazioni equivalenti di questa formula.

**TEOREMA 2.4** (Formula del quadrilatero di Brahmagupta)

*Sia dato un quadrilatero PQRS nel piano, i cui lati siano  $a=\overline{PQ}$ ,  $b=\overline{QR}$ ,  $c=\overline{RS}$  e  $d=\overline{SP}$  e i cui angoli interni siano  $\alpha=\widehat{PQR}$ ,  $\beta=\widehat{ARS}$ ,  $\gamma=\widehat{RSP}$ ,  $\delta=\widehat{SPQ}$ ; allora l'area del quadrilatero  $F$  è data da:*

$$16F^2 = (a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d) - 16abcd \cos^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$$

L'uguaglianza implica che il quadrilatero è ciclico o che i vertici giacciono su un segmento tale che la lunghezza di un lato è la somma delle lunghezze degli altri tre lati.

**COROLLARIO 2.5** : (Proprietà del massimo per quadrilateri ciclici)

*Tra tutti i quadrilateri dati nel piano con lati  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  (che soddisfano le disuguaglianze triangolari per cui ciascun lato è più corto*

della somma degli altri tre,  $a \leq b+c+d$ ) l'area maggiore è ottenuta per il quadrilatero ciclico o per uno degenerare i cui vertici giacciono su una retta tale che la lunghezza di un lato è la somma delle lunghezze degli altri tre.

Dimostrazione:

Prendiamo in considerazione gli angoli nella formula di Brahmagupta.

Poiché gli angoli possono essere presi nel seguente modo:

$0 \leq \alpha + \gamma = 2\pi - \beta - \delta \leq 2\pi$ , il massimo si ha quando  $\alpha + \beta = \pi$  e  $\beta + \delta = \pi$  o uno

dei lati è zero (ad esempio  $d=0$ ). Se un lato ha lunghezza zero, la figura

degenera in un triangolo, un biangolo o un punto, che sono tutti

quadrilateri ciclici. Se tutte le lunghezze sono diverse da zero e uno

degli angoli è zero (ad esempio  $\alpha=0$ ), allora  $\gamma=\pi$  e  $S$  è un punto interno

del segmento  $\overline{RP}$ . Ne segue che i quattro punti sono collineari e

$a=b+c+d$  o  $b=c+d+a$ . Viceversa se  $\alpha=\pi$  allora  $\gamma=0$  e quindi anche

$a+b+c=d$  o  $d+a+b=c$ . Sia  $p=\overline{PR}$ . Se  $0 < \alpha < \pi$  allora la corda  $\overline{PR}$  della

circonferenza identificata da  $\widehat{PQR}$  sottende un angolo  $2\alpha$ . Analogamente,

la corda  $\overline{PR}$  della circonferenza identificata da  $\widehat{RSP}$  sottende un angolo

$2\gamma$ . Ma, poiché  $2\alpha + 2\gamma = 2\pi$ , le circonferenze coincidono e i due triangoli

$PQR$  e  $RSP$  sono su lati opposti della corda  $\overline{PR}$  poiché gli angoli sottesi

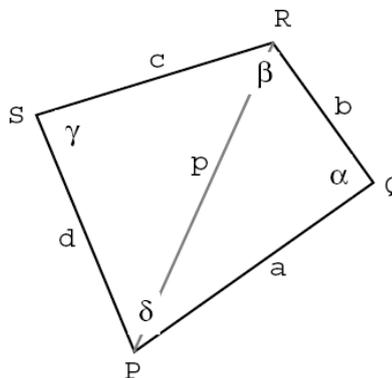
sono su lati opposti della circonferenza. Se  $\alpha = \gamma = \pi/2$  allora possiamo

ripetere un simile ragionamento e concludere che il quadrilatero è

ciclico. □

Dimostrazione: ( formula di Brahmagupta )

L'idea è che l'area del quadrilatero è la somma delle aree dei triangoli sui lati opposti della diagonale  $\overline{PR}$ .



Pertanto:

$$2F = 2\text{Area}(PQR) + 2\text{Area}(RSP) = ab \sin \alpha + cd \sin \gamma$$

Elevando ambo i membri al quadrato otteniamo:

$$\begin{aligned} 16F^2 &= 4(ab \sin \alpha + cd \sin \gamma)^2 \\ &= 4(a^2 b^2 \sin^2 \alpha + 2abcd \sin \alpha \sin \gamma + c^2 d^2 \sin^2 \gamma) \\ &= 4(a^2 b^2 - a^2 b^2 \cos^2 \alpha + 2abcd \sin \alpha \sin \gamma + c^2 d^2 - c^2 d^2 \cos^2 \gamma - 2abcd \cos \alpha \cos \gamma + 2abcd \cos \alpha \cos \gamma) \\ &= 4a^2 b^2 + 4c^2 d^2 - (2ab \cos \alpha - 2cd \cos \gamma)^2 - 8abcd \cos(\alpha + \gamma). \end{aligned}$$

Usando poi il fatto che le diagonali  $p = \overline{PR}$  possono essere espresse con

$$p^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = c^2 + d^2 - 2cd \cos \gamma,$$

quindi  $2ab \cos \alpha - 2cd \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$  e  $\cos(\alpha + \gamma) = 2 \cos^2 \left( \frac{\alpha + \gamma}{2} \right) - 1$ .

Otteniamo perciò che:

$$\begin{aligned}
 16F^2 &= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) - 16abcd \cos^2\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) + 8abcd \\
 &= (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) - 16abcd \cos^2\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) \\
 &= (2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2) - 16abcd \cos^2\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) \\
 &= ((a+b)^2 - (c-d)^2)((c+d)^2 - (a-b)^2) - 16abcd \cos^2\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) \\
 &= (a+b+c-d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d) - 16abcd \cos^2\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right)
 \end{aligned}$$

□

## Capitolo 3

# CENNI DI TEORIA GEOMETRICA DELLA MISURA

### 3.1 Basi di teoria della misura

Sia  $X$  uno spazio euclideo  $n$ - dimensionale in  $\mathbb{R}^n$ . Una collezione non vuota  $\mathfrak{F}$  di sottoinsiemi di  $X$  è chiamato sigma- campo ( $\sigma$ -campo) se  $\mathfrak{F}$  è chiuso sotto il complementare e sotto l'unione finita. . Un  $\sigma$ -campo è chiuso anche rispetto l'intersezione finita e  $X$  e l'insieme vuoto sono contenuti in esso.

Sia quindi  $C$  una collezione di sottoinsiemi di  $X$ . Allora il  $\sigma$ -campo generato da  $C$ ,  $\mathfrak{F}(C)$ , è l'intersezione di tutti i  $\sigma$ -campi contenenti  $C$ .

Formalmente una misura numerabilmente additiva  $\mu$  è una funzione definita sopra una sigma-algebra  $\mathfrak{F}$  di sottoinsiemi di un certo insieme  $X$  con valori nell'intervallo esteso  $[0;+\infty]$  tale da soddisfare le seguenti proprietà:

- L'insieme vuoto ha misura nulla:  $\mu(\emptyset)=0$ .

- Additività numerabile o  $\sigma$ -additività: se  $E_1, E_2, E_3, \dots$  è una successione di insiemi mutuamente disgiunti in  $\mathfrak{F}$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(E_i),$$

I membri di  $\mathfrak{F}$  sono detti insiemi misurabili e la struttura  $(X, \mathfrak{F}, \mu)$  viene detta spazio di misura. Le proprietà possono essere derivate dalla definizione stessa:

- Monotonia: Se  $E_1$  ed  $E_2$  sono insiemi misurabili

$$E_1 \subseteq E_2 \implies \mu(E_1) \leq \mu(E_2)$$

- Se  $E_1, E_2, E_3, \dots$  sono insiemi misurabili ed  $E_n$  è un sottoinsieme di  $E_{n+1}$  per tutti gli  $n$ , allora l'unione degli insiemi  $E_n$  è misurabile

$$\mu\left(\bigcup_i E_i\right) = \lim_i \mu(E_i)$$

- Se  $E_1, E_2, E_3, \dots$  sono insiemi misurabili ed  $E_{n+1}$  è un sottoinsieme di  $E_n$  per tutti gli  $n$ , allora l'intersezione degli insiemi  $E_n$  è misurabile; inoltre se almeno uno degli  $E_n$  ha misura finita, allora

$$\mu\left(\bigcap_i E_i\right) = \lim_i \mu(E_i)$$

**TEOREMA 3.1** ( continuità della misura )

Sia  $\mu$  una misura su un  $\sigma$ -campo  $\mathfrak{F}$  di sottoinsiemi di  $X$ .

a) Se  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$  è una successione crescente di insiemi in  $\mathfrak{F}$ , allora

$$\mu\left(\lim_{j \rightarrow \infty} E_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j);$$

b) Se  $F_1 \supset F_2 \supset \dots$  è una successione decrescente di insiemi in  $\mathfrak{F}$ ,

$$\text{allora } \mu\left(\lim_{j \rightarrow \infty} F_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(F_j);$$

c) Per una qualche successione di insiemi  $\{F_j\}$  in  $\mathfrak{F}$ ,

$$\mu\left(\lim_{j \rightarrow \infty} F_j\right) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(F_j). \quad \square$$

Successivamente introduciamo le misure esterne che sono essenzialmente misure con proprietà di additività, indebolita alla sub-additività. Formalmente una misura esterna  $\nu$  su un insieme  $X$  è una funzione definita su tutti i sottoinsiemi di  $X$  con valori in  $[0; +\infty]$  tale che:

$$\nu(\emptyset) = 0, \quad \nu(A) \leq \nu(A') \text{ se } A \subset A'$$

e  $\nu\left(\bigcup_1^{\infty} A_j\right) \leq \sum_1^{\infty} \nu(A_j)$  per un qualche sottoinsieme  $\{A_j\}$  di  $X$  (\*).

Le misure esterne sono utili perché c'è sempre un  $\sigma$ -campo di sottoinsiemi sui quali essi si comportano come misure; per misure esterne ragionevolmente definite questo  $\sigma$ -campo può essere abbastanza grande.

Un sottoinsieme  $E$  di  $X$  è detto  $\nu$ -misurabile o misurabile rispetto alla misura esterna  $\nu$  se esso decompone ogni sottoinsieme di  $X$  in modo additivo, cioè se  $\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$  per tutti gli “insiemi test”  $A$  contenuti in  $X$ . Per mostrare che un insieme  $E$  è  $\nu$ -misurabile, basta verificare che  $\nu(A) \geq \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$  poiché la disuguaglianza opposta è inclusa in (\*). È immediato che se  $\nu(E) = 0$  allora  $E$  risulta essere  $\nu$ -misurabile.

### TEOREMA 3.2:

*Sia  $\nu$  una misura esterna allora collezione  $M$  di insieme  $\nu$ -misurabili forma un  $\sigma$ -campo, e la restrizione di  $\nu$  ad  $M$  è una misura.*

Dimostrazione:

Chiaramente  $\emptyset \in M$ , e quindi  $M$  è un insieme non vuoto. Allora  $A \in M$  se e solo se  $X \setminus A \in M$ . Quindi  $M$  è chiuso al complementare. Per provare che risulta chiuso per l'unione finita, supponiamo che  $E_1, E_2, \dots \in M$  e sia  $A$  un qualche insieme. Allora applicando il fatto che  $\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$  a  $E_1, E_2, \dots$  otteniamo che:

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \nu(A \cap E_1) + \nu(A \setminus E_1) \\ &= \nu(A \cap E_1) + \nu((A \setminus E_1) \cap E_2) + \nu(A \setminus E_1 \setminus E_2) \\ &= \dots \\ &= \sum_{j=1}^k \nu\left(\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i\right) \cap E_j\right) + \nu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^k E_j\right) \end{aligned}$$

quindi:  $\nu(A) \geq \sum_{j=1}^k \nu\left(\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i\right) \cap E_j\right) + \nu\left(A \setminus \bigcup_{j=1}^k E_j\right)$  per tutti i  $k$ , e così:

$$\nu(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \nu \left( \left( A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i \right) \cap E_j \right) + \nu \left( A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right)$$

Allora  $A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left( \left( A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i \right) \cap E_j \right)$ , e ricaviamo:

$$\begin{aligned} \nu(A) &\leq \nu \left( A \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) + \nu \left( A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu \left( \left( A \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i \right) \cap E_j \right) + \nu \left( A \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) \leq \nu(A). \end{aligned}$$

Ne segue che  $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in M$ , così  $M$  è un  $\sigma$ -campo. Siano ora  $E_1, E_2, \dots$

insiemi disgiunti di  $M$  e sia  $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ , allora  $\nu \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j)$  così

che  $\nu$  è una misura per  $M$ . □

Diciamo che una misura esterna  $\nu$  è regolare se per ogni insieme  $A$  esiste un insieme  $E$   $\nu$ -misurabile e contenente  $A$  con  $\nu(A) = \nu(E)$ .

**LEMMA 3.3:**

Se  $\nu$  è una misura esterna regolare e  $\{A_j\}$  è una successione crescente di

insiemi, allora  $\lim_{j \rightarrow \infty} \nu(A_j) = \nu \left( \lim_{j \rightarrow \infty} A_j \right)$ . □

Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico, con  $X$  spazio euclideo  $n$ -dimensionale,  $\mathbb{R}^n$ , con  $d$  la funzione distanza usuale. Gli insiemi che dipendono dal  $\sigma$ -campo generato dai sottoinsiemi chiusi di  $X$  sono detti insiemi di

Borel dello spazio. Gli insiemi di Borel includono gli insiemi aperti, in quanto complementari di insiemi chiusi, gli insiemi  $F_\sigma$ , cioè le unioni numerabili di insiemi chiusi, gli insiemi  $G_\delta$ , le intersezioni numerabili di insiemi aperti.

Una misura esterna  $\nu$  di  $X$  è chiamata misura esterna metrica se  $\nu(E \cup F) = \nu(E) + \nu(F)$  ogni qual volta  $E$  e  $F$  sono positivamente separati, cioè ogni qual volta  $d(E, F) = \inf \{d(x, y) : x \in E, y \in F\} > 0$ .

Mostriamo che se  $\nu$  è una misura esterna metrica, allora la collezione di insiemi  $\nu$ -misurabili include gli insiemi di Borel. La dimostrazione si basa sul seguente:

**LEMMA 3.4** ( Lemma di Caratheodory )

*Sia  $\nu$  una misura esterna metrica su  $(X, d)$ . Sia  $\{A_j\}_1^\infty$  una successione crescente di insiemi di  $X$  con  $A = \lim_{j \rightarrow \infty} A_j$ , e si supponga che  $d(A_j, A \setminus A_{j+1}) > 0$  per ciascun  $j$ . Allora  $\nu(A) = \lim_{j \rightarrow \infty} \nu(A_j)$ . □*

**TEOREMA 3.5**

*Se  $\nu$  una misura esterna metrica su  $(X, d)$ , allora tutti i sottoinsiemi di Borel di  $X$  sono  $\nu$ -misurabili.*

Dimostrazione:

Poiché gli insiemi  $\nu$ -misurabili costituiscono un  $\sigma$ -campo, e gli insiemi di Borel formano il più piccolo  $\sigma$ -campo contenente i

sottoinsiemi chiusi di  $X$ , allora è sufficiente mostrare che  $\nu(A) \geq \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E)$  quando  $E$  è chiuso ed  $A$  arbitrario.

Sia  $A_j$  un insieme di punti in  $A \setminus E$  con distanza al massimo  $1/j$  da  $E$ .

Allora  $d(A \cap E, A_j) \geq 1/j$ , così  $\nu(A \cap E) + \nu(A_j) = \nu((A \cap E) \cup A_j) \leq \nu(A)$  per

ciascun  $j$ . Così  $\nu$  è una misura metrica esterna. La successione di

insiemi  $\{A_j\}$  è crescente e, poiché  $E$  è chiuso,  $A \setminus E = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ . Quindi,

provando che  $d(A_j, A \setminus E \setminus A_{j+1}) > 0$  per tutti i  $j$ , dal lemma 2.4 abbiamo

che  $\nu(A \setminus E) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \nu(A_j)$ . Ma se  $x \in A \setminus E \setminus A_{j+1}$  allora esiste  $z \in E$  con

$d(x, z) < 1/(j+1)$ , così se  $y \in A_j$  allora

$d(x, y) \geq d(y, z) - d(x, z) > 1/j - 1/(j+1) > 0$ , e così  $d(A_j, A \setminus E \setminus A_{j+1}) > 0$ .  $\square$

C'è un'altra classe importante di insiemi che, a differenza degli insiemi di Borel, sono definiti esplicitamente in termini di unioni ed intersezioni di insiemi chiusi. Se  $(X, d)$  è uno spazio metrico, gli insiemi di Souslin

sono insiemi della forma  $E = \bigcup_{i_1, i_2, \dots} \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ , dove  $E_{i_1, i_2, \dots, i_k}$  è l'insieme chiuso

per ciascuna successione finita  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  degli interi positivi. Potrebbe

esser dimostrato che ogni insieme di Borel è un insieme di Souslin e

che, se gli spazi metrici in questione sono completi, allora ogni

qualunque immagine continua di un insieme di Souslin è un insieme di

Souslin. Inoltre se  $\nu$  è una misura esterna su uno spazio metrico

$(X, d)$ , allora gli insiemi di Souslin sono  $\nu$ -misurabili purchè gli insiemi chiusi siano  $\nu$ -misurabili.

### 3.2 La misura di Hausdorff

Lavoriamo in uno spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ . Se  $U$  è un sottoinsieme non vuoto di  $\mathbb{R}^n$ , definiamo diametro di  $U$ :  $diam|U| = \sup\{|x-y|: x, y \in U\}$ . Se  $E \subset \bigcup_i U_i$  e  $0 < |U_i| \leq \delta$  diciamo che la successione  $\{U_i\}$  è un  $\delta$ -ricoprimento di  $E$ .

Sia  $E$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $s$  un numero positivo. Per  $\delta > 0$  definiamo  $H_\delta^s(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s$ , dove l'inf è su tutti i  $\delta$ -ricoprimenti  $\{U_i\}$  di  $E$  numerabili. È evidente che  $H_\delta^s$  è una misura esterna di  $\mathbb{R}^n$ .

Per ottenere la misura esterna di Hausdorff  $s$ -dimensionale di  $E$  lasciamo che  $\delta \rightarrow 0$ . Così  $H^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(E) = \sup_{\delta > 0} H_\delta^s(E)$ .

Il limite esiste ma può essere infinito, poiché  $H_\delta^s$  cresce al decrescere di  $\delta$ .  $H^s$  è semplicemente una misura esterna, ma è anche una misura esterna metrica. Se  $\delta$  è più piccolo della distanza tra insiemi positivamente separati  $E$  e  $F$ , allora nessun insieme in un  $\delta$ -ricoprimento di  $E \cup F$  può intersecare sia  $E$  che  $F$  così che  $H_\delta^s(E \cup F) = H_\delta^s(E) + H_\delta^s(F)$ , che porta ad un'uguaglianza simile per  $H^s$ .

La restrizione di  $H^s$  al  $\sigma$ -campo di insiemi  $H^s$ -misurabili, che include anche gli insiemi di Borel e di Souslin, è detta misura di Hausdorff  $s$ -dimensionale. Si nota che una definizione equivalente della misura di Hausdorff è ottenuta se l'*inf* è preso sui  $\delta$ -ricoprimenti di  $E$  mediante insiemi convessi, piuttosto che insiemi arbitrari, poiché ogni insieme giace in un insieme convesso dello stesso diametro. Allo stesso modo è a volte conveniente considerare i  $\delta$ -ricoprimenti di insiemi aperti, o alternativamente  $E$  di insiemi chiusi. In ciascun caso, sebbene un differente valore di  $H_\delta^s$  può essere ottenuto per  $\delta > 0$ , il valore del limite  $H^s$  è lo stesso.

Per alcuni  $E$  è chiaro che  $H^s(E)$  è non crescente poiché  $s$  cresce da zero ad infinito. Inoltre se  $s < t$  allora  $H_\delta^s(E) \geq \delta^{s-t} H_\delta^t(E)$ , che implica che se  $H^t(E)$  è positiva, allora  $H^s(E)$  è infinita. Così c'è un valore unico,  $\dim E$ , chiamato dimensione di Hausdorff di  $E$ , tale che

$$H^s(E) = \infty \text{ se } 0 \leq s < \dim E, \quad H^s(E) = 0 \text{ se } \dim E < s < \infty.$$

Un insieme  $E$ ,  $H^s$ -misurabile, con  $E \subset \mathbb{R}^n$ , per il quale  $0 < H^s(E) < \infty$  è detto un  $s$ -insieme; un 1-insieme è talvolta chiamato insieme linearmente misurabile. Chiaramente la dimensione di Hausdorff di un  $s$ -insieme è uguale ad  $s$ , ma è importante notare che un  $s$ -insieme è qualcosa di molto più specifico di un insieme con misura di Hausdorff  $s$ . Effettivamente, Besicovitch (1942) mostra che un insieme può essere

espresso come un'unione disgiunta di una moltitudine continua di insiemi della stessa dimensione.

Proviamo adesso che  $H^s$  è una misura regolare, e che è possibile approssimare a  $s$ -insiemi da sottoinsiemi chiusi.

**TEOREMA 3.6:**

- a) Se  $E$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  c'è un  $G_\delta$ -insieme  $G$  che contiene  $E$  con  $H^s(G) = H^s(E)$ . In particolare,  $H^s$  è una misura esterna
- b) Un insieme  $H^s$ -misurabile, di  $H^s$  misura finita, contiene un  $F_\sigma$ -insieme di ugual misura, e quindi contiene un insieme chiuso che differisce da questo di una misura arbitrariamente piccola.

Dimostrazione:

- a) Se  $H^s(E) = \infty$ , allora  $\mathbb{R}^n$  è un insieme aperto di ugual misura, così possiamo supporre che  $H^s(E) < \infty$ . Per ciascun  $i = 1, 2, \dots$  scegliamo un  $2/i$ -ricoprimento di  $E$ ,  $\{U_{ij}\}_j$ , tale che  $\sum_{j=1}^{\infty} |U_{ij}|^s < H_{1/i}^s(E) + 1/i$ .
- Allora  $E \subset G$ , con  $G = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} U_{ij}$ , è un  $G_\delta$ -insieme. Dato che  $\{U_{ij}\}_j$  è un  $2/i$ -ricoprimento di  $G$ ,  $H_{2/i}^s(G) \leq H_{1/i}^s(G) + 1/i$ , ne segue che per  $i \rightarrow \infty$   $H^s(E) = H^s(G)$ . Quindi i  $G_\delta$ -insiemi sono misurabili e  $H^s$  è una misura esterna regolare per questi.
- b) Sia  $E$  un insieme  $H^s$ -misurabile con  $H^s(E) < \infty$ . Utilizzando a) possiamo trovare degli insiemi aperti  $O_1, O_2, \dots$  che contengono  $E$ ,

c) con  $H^s\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} O_i \setminus E\right) = H^s\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} O_i\right) - H^s(E) = 0$ . Un sottoinsieme aperto

di  $\mathbb{R}^n$  è un  $F_{\sigma}$ -insieme, così supponiamo  $O_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_{ij}$  per ciascun  $i$ ,

dove  $\{F_{ij}\}_j$  è una successione crescente di insiemi chiusi. Allora

per la continuità di  $H^s$ ,  $\lim_{j \rightarrow \infty} H^s(E \cap F_{ij}) = H^s(E \cap O_i) = H^s(E)$ . Quindi,

dato un  $\varepsilon > 0$ , possiamo trovare un  $j_i$  tale che

$$H^s(E \setminus F_{ij_i}) < 2^{-i} \varepsilon \quad (i=1,2,\dots). \text{ Se } F \text{ è l'insieme chiuso } \bigcap_{i=1}^{\infty} F_{ij_i},$$

allora:

$$H^s(F) \geq H^s(E \cap F) \geq H^s(E) - \sum_{i=1}^{\infty} H^s(E \setminus F_{ij_i}) > H^s(E) - \varepsilon$$

Poiché  $F \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} O_i$ , allora . dal punto a) sappiamo che  $F \setminus E$  è

contenuto in un qualche  $G_{\delta}$ -insieme con  $H^s(G) = 0$ . Così  $F \setminus G$  è

un  $F_{\sigma}$ -insieme contenuto in  $E$  con

$H^s(F \setminus G) \geq H^s(F) - H^s(G) > H^s(E) - \varepsilon$ . Considerando poi l'unione

numerabile di questi  $F_{\sigma}$ -insiemi su  $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$  abbiamo un

$F_{\sigma}$ -insieme contenuto in  $E$  e di misura pari a quella di  $E$ .

□

Il prossimo lemma stabilisce che ogni tentativo di stimare la misura di Hausdorff di un insieme utilizzando un ricoprimento di insiemi

sufficientemente piccoli, da una risposta non molto più piccola della misura di Hausdorff attuale:

**LEMMA 3.7:**

Sia  $E$  un insieme  $H^s$ -misurabile con  $H^s(E) < \infty$ , e sia  $\varepsilon$  un numero positivo. Allora esiste un  $\rho > 0$ , dipendente solo da  $E$  e da  $\varepsilon$ , tale che, per una qualche collezione di insiemi di Borel  $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$  con  $0 < |U_i| < \rho$ , abbiamo

$$H^s\left(E \cap \bigcup_i U_i\right) < \sum_i |U_i|^s + \varepsilon. \quad \square$$

### 3.3 Teoremi di ricoprimento

Data una collezione sufficientemente grande di insiemi che ricoprono un qualche insieme  $E$ , il Teorema di Vitali seleziona una sottocollezione disgiunta che ricopre al più tutto  $E$ . Una collezione di insiemi è semi-disgiunta se nessun elemento della collezione è contenuto in un qualche differente altro elemento.

Consideriamo una collezione  $C$  di sfere contenute in un sottoinsieme limitato di  $\mathbb{R}^n$ . Si può mostrare che è possibile trovare una sottocollezione disgiunta finita o infinitamente numerabile  $\{B_i\}$  tale che

$$\bigcup_{B \in C} B \subset \bigcup_i B'_i, \text{ dove } B'_i \text{ è la sfera concentrica a } B_i \text{ di raggio quintuplo.}$$

Una collezione di insiemi  $V$  è detta classe di Vitali per  $E$  se per ciascun  $x \in E$  e  $\delta > 0$  esiste  $U \in V$  con  $x \in U$  e  $0 < |U| \leq \delta$ .

**TEOREMA 3.8:** ( Teorema di Ricoprimento di Vitali)

a) Sia  $E$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$   $H^s$  – misurabile e sia  $V$  una classe di Vitali di insiemi chiusi per  $E$ . Allora possiamo selezionare una successione disgiunta  $\{U_i\}$ , finita o numerabile, tale che o

$$\sum |U_i|^s = \infty \text{ oppure } H^s \left( E \setminus \bigcup_i U_i \right) = 0.$$

b) Se  $H^s(E) < \infty$ , allora, dato  $\varepsilon > 0$ , si ha  $H^s(E) \leq \sum_i |U_i|^s + \varepsilon$ .

□

### 3.4 La misura di Lebesgue

Otteniamo la  $n$ – dimensionale misura di Lebesgue come un'estensione della definizione di volume in  $\mathbb{R}^n$ .

La costruzione moderna della misura di Lebesgue,  $L^n$ , basata sulle misure esterne, è dovuta a Carathéodory. Procedo nel modo seguente:

per ogni sottoinsieme  $E$  di  $\mathbb{R}^n$ , possiamo definire  $\lambda^*(E) = \inf \{ \text{vol}(M) : M \supseteq E \}$  con  $M$  unione numerabile di prodotti di intervalli. Ora,  $\text{vol}(M)$  è la somma dei prodotti delle lunghezze degli

intervalli coinvolti. Si definisce quindi l'insieme  $A$  misurabile secondo Lebesgue se

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A - E)$$

per tutti gli insiemi  $E$ . Questi insiemi Lebesgue-misurabili formano una  $\sigma$ -algebra, e la misura di Lebesgue è definita da  $\lambda(A) = \lambda^*(A)$  per ogni insieme Lebesgue-misurabile  $A$ . Secondo il teorema di Vitali, se si ammette l'assioma della scelta, esiste un sottoinsieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$  che non è Lebesgue-misurabile. In caso contrario tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$  sono Lebesgue-misurabili.

### 3.5 Curve e continuità

Abbiamo visto come un insieme  $E$ ,  $H^s$ -misurabile, con  $E \subset \mathbb{R}^n$ , per il quale  $0 < H^s(E) < \infty$ , è detto un  $s$ -insieme; un 1-insieme è talvolta chiamato insieme linearmente misurabile.

Un  $s$ -insieme si divide in una parte regolare ed in una irregolare andando a formare due insiemi con proprietà nettamente differenti. Vogliamo caratterizzare gli insiemi come sottoinsiemi di unioni numerabili di curve o superfici rettificabili, e così collegarli ad una misura teorica e ad una descrizione topologica.

Presentiamo così una teoria degli insiemi misurabili linearmente, cioè degli 1-insiemi in  $\mathbb{R}^2$ .

Un 1–insieme regolare ed una curva rettificabile sono profondamente collegati. Un 1–insieme regolare è, all'interno di un insieme di misura zero, un sottoinsieme di una collezione numerabile di curve rettificabili.

Una curva di Jordan  $\Gamma$  è l'immagine di un'iniezione continua  $\psi:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}^n$ , dove  $[a,b]\subset\mathbb{R}$  è un intervallo chiuso. La curva risulta un compatto connesso. A maggior ragione quindi l'immagine continua di un insieme compatto connesso sarà un compatto connesso. In particolare, una curva

è un insieme di Borel e così  $H^s$ –misurabile. In più, una biezione continua tra insiemi compatti ha inversa continua, così possiamo definire la curva come l'immagine di un omeomorfismo di intervalli chiusi.

La lunghezza della curva  $\Gamma$  sarà data da:

$$L(\Gamma) = \sup \sum_{i=1}^m |\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})| \quad \text{con } a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b.$$

Se  $L(\Gamma) < \infty$  allora la curva  $\Gamma$  è rettificabile.

### LEMMA 3.9:

*Sia  $\psi:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}^n$  una mappa continua, con  $\psi(a)\neq\psi(b)$ . Allora  $\psi[a,b]$  contiene una curva che unisce  $\psi(a)$  a  $\psi(b)$ .*

*Dimostrazione:*

Per ciascun punto multiplo  $x$  di  $[a,b]$  sia  $I_x$  il più grande intervallo chiuso  $[t_1, t_2]$  con  $\psi(t_1) = \psi(t_2) = x$ . Sia  $\mathfrak{I}$  la collezione di quegli intervalli

che sono contenuti in nessun altro intervallo, questa sarà allora una collezione numerabile di intervalli propri disgiunti. Possiamo così costruire un'iniezione suriettiva  $f:[a,b] \rightarrow [0,1]$  tale che  $f(a)=0, f(b)=1$  e tale che, se  $t_1 \leq t_2$  allora  $f(t_1) \leq f(t_2)$ , con l'uguaglianza valida se e solo se  $t_1$  e  $t_2$  giacciono in uno stesso intervallo di  $\mathfrak{I}$ . Definiamo  $\psi:[0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  in modo che  $\psi_0(u) = x$  se  $f^{-1}(u) = I_x$  per un qualche  $I_x \in \mathfrak{I}$ , oppure  $\psi_0(u) = \psi(f^{-1}(u))$  altrimenti.  $\psi_0$  risulta così essere un'iniezione continua con  $\psi_0(0) = \psi(a)$  e  $\psi_0(1) = \psi(b)$ .  $\square$

È sempre possibile parametrizzare una curva rettificabile  $\Gamma$  attraverso la lunghezza dell'arco che rappresenta  $\Gamma$  come l'immagine di una funzione  $\psi_0:[0, L(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{R}$ , tale che la lunghezza di  $\psi_0[0, t]$  sia proprio  $t$ . Questo può essere ottenuto ponendo  $\psi_0(t)$  come l'unico punto  $\psi(u)$  per il quale  $L(\psi[au]) = t$ . Se  $\psi$  la curva rettificabile dalla lunghezza dell'arco, allora:

$$|\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})| \leq |t_i - t_{i-1}|.$$

In particolare, questo implica che  $\psi$  è una funzione assolutamente continua.

### LEMMA 3.10:

Se  $\Gamma$  è una curva, allora  $H^1(\Gamma) = L(\Gamma)$ .

Dimostrazione:

Sia  $\Gamma$  la curva che unisce  $z$  e  $w$ . Denotiamo con  $proj$  la proiezione ortogonale da  $\mathbb{R}^n$  nella retta che passa per  $z$  e  $w$ . Allora  $|projx - projy| \leq |x - y|$  se  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , quindi:

$$H^1(\Gamma) \geq H^1(proj\Gamma) \geq H^1([z, w]) = L([z, w]) = |z - w| \text{ poich\`e } proj\Gamma \supset [z, w].$$

Supponiamo che  $\Gamma$  sia definita da  $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , e quindi  $H^1(\psi[t, u]) \geq |\psi(t) - \psi(u)|$  per un qualche  $t$  e  $u$ . Allora se  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$  è una sezione di  $[a, b]$ ,

$$\sum_i |\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})| \leq \sum_i H^1(\psi[t_{i-1}, t_i]) = H^1(\Gamma),$$

poich\`e gli archi  $\psi[t_{i-1}, t_i]$  di  $\Gamma$  sono disgiunti, estremi a parte. Cos\`i  $L(\Gamma) \leq H^1(\Gamma)$ . Assumiamo infine che  $L(\Gamma) < \infty$  e che  $\psi$  parametrizzi  $\Gamma$  attraverso la lunghezza d'arco. Poich\`e  $\psi$  è una suriezione da  $[0, L(\Gamma)]$  a  $\Gamma$ , allora  $H^1(\Gamma) \leq H^1([0, L(\Gamma)]) = L(\Gamma)$ .  $\square$

Una conseguenza di questo lemma è che se  $\Gamma$  è una curva rettificabile, allora  $H^s(\Gamma)$  è infinito se  $s < 1$  e zero altrimenti.

### COROLARIO 3.11:

*Sia  $\psi$  che parametrizza la curva rettificabile  $\Gamma$  mediante la lunghezza dell'arco. Se  $E$  è un sottoinsieme misurabile secondo Lebesgue di*

$[0, L(\Gamma)]$ , allora  $\psi(E)$  è un sottoinsieme  $H^1$ -misurabile di  $\mathbb{R}^n$  e  $H^1(\psi(E)) = L^1(E)$ .

Dimostrazione:

Dal lemma 3.10 le funzioni di insiemi additivi  $H^1(\psi(\cdot))$  e  $L^1(\cdot)$  si equivalgono su intervalli chiusi, e così mediante il processo tipico di estensione delle misure si equivalgono sui sottoinsiemi  $[0, L(\Gamma)]$  misurabili secondo Lebesgue.  $\square$

Questo corollario consente di trasferire tutti i risultati usuali sulla misura di Lebesgue sulla retta alle curve.

Per esempio, dal teorema della densità di Lebesgue<sup>1</sup>, segue che se  $E$  è un sottoinsieme  $H^1$ -misurabile di una curva  $\Gamma$ , allora per quasi tutti gli  $x \in E$  abbiamo  $H^1(F \cap I)/H^1(I) \rightarrow 1$  come  $H^1(I) = 0$ , dove  $I$  è un sotto-arco contenente  $x$ .

### LEMMA 3.12:

Sia  $E$  un insieme continuo che contiene  $x$  e  $y$ . Se  $|x - y| = \rho$ , allora

$$H^1(E \cap B_\rho(x)) \geq \rho. \text{ In particolare, } H^1(E) \geq |E|.$$

---

<sup>1</sup> Sia  $E$  un sottoinsieme  $L^n$ -misurabile di  $R^n$ . Allora la densità di Lebesgue di  $E$  in  $x$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{L^n(E \cap B_r(x))}{L^n(B_r(x))},$$

esiste ed è pari ad 1 se  $x \in E$  e 0 se  $x \notin E$ , eccetto che per un insieme di  $x$  di

$L^n$ -misura zero.

Dimostrazione:

Sia  $f: R^n \rightarrow [0, \infty)$  definita da  $f(z) = |z - x|$ . Allora  $f$  è una mappa continua tale che  $|f(z) - f(w)| \leq |z - w|$  ( $z, w \in R^n$ ). L'insieme  $f(E \cap B_\rho(x))$  contiene l'intervallo  $[0, \rho]$ , e per qualche  $r$ , con  $0 < r < \rho$ ,  $E = (E \cap B_r(x)) \cup (E \setminus B_r(x))$  sarà una decomposizione di  $E$  in insiemi chiusi disgiunti. Avremo allora:

$$H^1(E \cap B_\rho(x)) \geq H^1(f(E \cap B_\rho(x))) \geq H^1([0, \rho]) = L^1([0, \rho]) = \rho. \quad \square$$

Ne deduciamo la proprietà base di densità di curve rettificabili:

**LEMMA 3.13:**

*Una curva rettificabile è un 1-insieme.*

Dimostrazione:

Se  $\Gamma$  è rettificabile,  $L(\Gamma) < \infty$ , così dal lemma 3.10,  $H^1(\Gamma) < \infty$ . Così  $\Gamma$  contiene almeno due punti distinti, e dal lemma 3.12,  $H^1(\Gamma) > 0$ , e quindi  $\Gamma$  è un 1-insieme. Sia  $x$  un punto di  $\Gamma$  al di fuori degli estremi, e supponiamo che  $x$  divida  $\Gamma$  in due sotto-curve rettificabili  $\Gamma_-, \Gamma_+$ . Sempre dal lemma 3.4,  $H^1(\Gamma_- \cap B_\rho(x)) \geq \rho$  e  $H^1(\Gamma_+ \cap B_\rho(x)) \geq \rho$  se  $\rho$  è sufficientemente piccolo, e quindi  $H^1(\Gamma \cap B_\rho(x)) \geq 2\rho$ . Così per tutti i

punti di  $\Gamma$  oltre gli estremi si ha che  $\underline{D}^1(\Gamma, x) \geq 1^2$  ed in più  $D^1(\Gamma, x)$  esiste ed è proprio pari ad 1. □

Andiamo ora a discutere l'esistenza delle tangenti alle curve rettificabili.

Diciamo che un  $s$ -insieme  $E$  in  $\mathbb{R}^n$  ha una tangente nel punto  $x$  in direzione  $\pm\theta$  se  $\overline{D}^s(E, x) > 0$  e per ogni angolo  $\phi > 0$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-s} H^s E = \left( E \cap \left( B_r(x) \setminus S_r(x, \theta, \phi) \setminus S_r(x, -\theta, \phi) \right) \right) = 0$$

(Naturalmente la retta attraverso  $X$  in direzione  $\theta$  è chiaramente la retta tangente.) Chiaramente un  $s$ -insieme può avere al più una tangente in ogni suo punto.

**LEMMA 3.14:**

*Sia  $\Gamma$  una curva rettificabile di estremi  $x$  e  $y$  e sia  $\phi$  un angolo positivo.*

*Sia  $E$  un insieme di punti su  $\Gamma$  che individua coppie di sotto archi di  $\Gamma$  arbitrariamente piccoli, che sottendono corde che formano un angolo maggiore di  $2\phi$  l'una con l'altra. Allora  $H^1(E) \leq (L(\Gamma) - |x - y|) / (1 - \cos \phi)$ .*

**Dimostrazione:**

Supponiamo che  $L$  denoti la retta per  $x$  e  $y$  e sia  $V$  la collezione di sotto-archi chiusi di  $\Gamma$  che sottendono corde che formano angoli

<sup>2</sup> Sia  $B_r(x)$  una palla chiusa di centro  $x$  e raggio  $r$ , tale che  $|B_r(x)| = 2r$ . Allora la densità superiore  $\overline{D}^s$  e la densità inferiore  $\underline{D}^s$  (o densità circolare) di un  $s$ -insieme  $E$  in un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  è definita da:

$$\overline{D}^s(E, x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{H^s(E \cap B_r(x))}{(2r)^s} \quad \text{e} \quad \underline{D}^s(E, x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{H^s(E \cap B_r(x))}{(2r)^s}.$$

maggiori di  $\phi$  con  $L$ . per le condizioni del lemma,  $V$  è una classe di Vitali per  $E$ . Quindi usando il teorema del ricoprimento 3.8, per un qualunque  $\varepsilon > 0$ , possiamo trovare una collezione finita  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_M$  di sotto-archi di  $\Gamma$  dipendenti da  $V$  tale che  $H^1(E) \leq \sum_{i=1}^m |\Gamma_i| + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^m L(\Gamma_i) + \varepsilon$ .

Se  $\Gamma'_1, \dots, \Gamma'_M$  poi sono gli archi complementari, possibilmente non nulli, allora proiettando ortogonalmente in  $L$  ed usando che nel proiettare non si aumenta la lunghezza, avremo che:  $\cos \phi \sum_i L(\Gamma_i) + \sum_i L(\Gamma'_i) \geq |x - y|$ .

Poiché  $\sum_i L(\Gamma_i) + \sum_i L(\Gamma'_i) = L(\Gamma)$ , si ha

$$H^1(E) - \varepsilon \leq \sum_i L(\Gamma_i) \leq (L(\Gamma) - |x - y|) / (1 - \cos \phi). \quad \square$$

**COROLLARIO 3.15:**

*Sia  $\phi > 0$  e sia  $E$  un insieme di punti su  $\Gamma$  che individua coppie di sotto-archi di  $\Gamma$  arbitrariamente piccoli, che sottendono corde che formano un angolo maggiore di  $2\phi$  l'una con l'altra, allora  $H^1(E) = 0$ .*

Dimostrazione:

Dato  $\varepsilon > 0$  possiamo prendere su  $\Gamma$  i punti  $x_0, x_1, \dots, x_m$ , con estremi  $x_0$  e

$x_m$  di  $\Gamma$ , tali che  $L(\Gamma) < \sum_{i=1}^m |x_i - x_{i-1}| + \varepsilon$ . Indichiamo con  $\Gamma_i$  la porzione di  $\Gamma$

compresa tra  $x_{i-1}$  e  $x_i$ . Applicando il lemma 3.16 a ciascun  $\Gamma_i$  abbiamo:

$$\begin{aligned}
 H^1(E) &= H^1 \sum_{i=1}^m (E \cap \Gamma_i) \leq \sum_{i=1}^m (L(\Gamma_i) - |x_i - x_{i-1}|) / (1 - \cos \phi) \\
 &= \left( L(\Gamma_i) - \sum_{i=1}^m |x_i - x_{i-1}| \right) / (1 - \cos \phi) < \varepsilon / (1 - \cos \phi).
 \end{aligned}$$

E così  $H^1(E) = 0$ .

□

**TEOREMA 3.16:**

*Una curva rettificabile  $\Gamma$  ha una tangente al più in tutti i suoi punti.*

Dimostrazione:

La curva  $\Gamma$  ha almeno due punti e quindi, dal lemma 3.12, abbiamo che

$\bar{D}^s(E, x) \geq 1/2$  per tutti gli  $x \in \Gamma$ . Sia  $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione di

definizione per  $\Gamma$ . Dal corollario 3.15 abbiamo che per  $x \in \Gamma$  possiamo

trovare un vettore unitario  $\theta$  tale che, dato  $\phi > 0$ , allora

$\psi(u) \in S(x, \theta, \psi) \cup S(x, -\theta, \psi)$  se  $|u - t| < \varepsilon$ , dove  $\phi(t) = x$ . Inoltre se  $\rho$  è

positivo,  $\psi(u) \notin B_\rho(x)$  se  $|u - t| > \varepsilon$ . Così

$\Gamma \cap (B_\rho(x) \setminus S_\rho(x, \theta, \phi) \setminus S_\rho(x, -\theta, \phi)) = \emptyset$ . □

Poiché le tangenti alle curve sono spesso pensate in termini di differenziabilità, una variante del teorema 3.16 mostra che un curva rettificabile definita da una funzione  $\psi$  ha per tangente  $\psi(t)$ , laddove  $\psi'(t)$  esiste e non risulta essere nulla.

Cerchiamo ora di adattare la definizione di tangente di una curva ad insiemi di infinita misura lineare.

Un 1- insieme contenuto in un'unione numerabile di curve rettificabile è detto  $Y$ - insieme. Questo risulta essere sia un 1- insieme regolare e sia mostra avere al più una tangente in tutti i suoi punti.

Un tale insieme è comunemente chiamato insieme Lipschitziano.

LEMMA 3.17:

*Sia  $E$  un sottoinsieme limitato di  $\mathbb{R}^n$  tale che, se  $x, y \in E$ , il segmento  $[x, y]$  formi un angolo  $\phi < \frac{1}{2}\pi$  con una fissata retta  $L$ . Allora  $E$  è un sottoinsieme di una curva rettificabile.*

Dimostrazione:

Consideriamo  $E$  chiuso. Sia  $\Pi(t)$  l'iperpiano perpendicolare ad  $L$  a distanza  $t$  dall'origine, e siano  $a$  e  $b$  gli estremi di  $t$  per i quali  $\Pi(t)$  interseca  $E$ . Allora  $\Pi(t)$  può contenere, al massimo, un punto di  $E$  per ciascun  $t$ ; sia  $\psi(t)$  questo punto, qualora esista, altrimenti, se  $a < t < b$ , sia  $\psi(t)$  il punto di  $\Pi(t)$  sulla retta che congiunge i punti di  $E$  più vicini a  $\Pi(t)$ . Il segmento  $[\psi(t_1), \psi(t_2)]$  forma un angolo al più  $\phi$  con  $L$  se  $t_1 \neq t_2$ , e così  $|\psi(t_1) - \psi(t_2)| \leq |t_1 - t_2| / \cos \phi$ .  $\psi$  è così rettificabile.  $\square$

Si può inoltre mostrare che un insieme continuo di  $H^1$ -misura finita è, insieme all'insieme di misura zero, una collezione numerabile di curve rettificabili, e perciò regolari.

Il seguente risultato rappresenta una delle basi per la dimostrazione dell'esistenza di una curva di massima misura con specifiche proprietà.

Se  $E \subset \mathbb{R}^n$ , il  $\delta$ -corpo parallelo di  $E$  è l'insieme chiuso dei punti con distanza  $\delta$  di  $E$ , per i quali  $[E]_\delta = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \inf_{y \in E} |x - y| \leq \delta \right\}$ . La metrica di Hausdorff  $\delta$  è definita su una collezione di sottoinsiemi non vuoti e compatti di  $\mathbb{R}^n$  da:

$$\delta(E, F) = \inf \left\{ \delta : E \subset [F]_\delta \text{ e } F \subset [E]_\delta \right\}.$$

**TEOREMA 3.18:** ( Teorema di Blaschke )

*Sia  $C$  un'infinita collezione di insiemi compatti e non vuoti tutti giacenti in una porzione limitata  $B$  di  $\mathbb{R}^n$ . Allora esiste una successione  $\{E_j\}$  di insiemi distinti di  $C$  convergenti, per la metrica di Hausdorff, a un insieme compatto e non vuoto  $E$ .*

Dimostrazione:

costruiamo prima di tutto una successione di Cauchy di insieme da  $C$ .

Sia  $\{E_{1,i}\}_i$  una successioni di insiemi distinti di  $C$ . Definiamo per

ciascun  $k > 1$  un sottosuccessione  $\{E_{k,i}\}_i$  di  $\{E_{k-1,i}\}_i$  così come segue: sia

$B_k$  una collezione finita di sfere chiuse di diametro al più  $1/k$  ricoprenti

$B$ . Ciascun  $E_{k-1,i}$  interseca alcune specifiche combinazioni di queste

sfere. così c'è un'infinita sottosuccessione  $\{E_{k,i}\}_i$  di  $\{E_{k-1,i}\}_i$  per cui tutte le

intersezioni sono esattamente pari a tutte le sfere che ricoprono  $B_k$ . Se

$F$  è l'unione di tutte le sfere di  $B_k$  in questa particolare combinazione, allora  $E_{k,i} \subset F \subset [E_{k,i}]_{1/k}$  per tutti gli  $i, j$  tali che  $\delta(E_{k,i}, F) \leq 1/k$ , dando poi  $\delta(E_{k,i}, E_{k,j}) \leq 2/k$  per tutti gli  $i, j$ . Prendendo  $E_i = E_{i,i}$  si ha  $\delta(E_i, E_j) \leq 2/\min\{i, j\}$  e così ricaviamo che  $\{E_{1,i}\}_i$  è una successione di Cauchy. Sia ora  $E = \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i}$  un insieme non vuoto compatto, dato dall'intersezione di una successione decrescente di insieme non vuoti e compatti. Ricaviamo che  $\bigcup_{i=j}^{\infty} E_i \subset [E_j]_{2/j}$  e così  $E \subset [E_j]_{2/j}$  per tutti i  $j$ .

D'altra parte, se  $x \in E_j$  allora  $x \in [E_j]_{2/j}$  se  $i \geq j$ , e così  $x \in \left[ \bigcup_{i=k}^{\infty} E_i \right]_{2/j}$  se  $k \geq j$ . Scegliamo  $y_k \in \overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i}$  con  $|x - y_k| \leq 2/j$ ; una sottosuccessione  $\{y_k\}$  converge a qualche  $y \in \mathbb{R}^n$  con  $|x - y| \leq 2/j$ . Ma  $y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} E_i} = E$ , così  $x \in [E]_{2/j}$ . Allora  $E_j \subset [E]_{2/j}$  e quindi  $\delta(E, E_j) \leq 2/j$ . Così  $\{E_j\}$  converge ad  $E$  nella metrica di Hausdorff.  $\square$

Un insieme continuo in cui ciascuna coppia di punti è collegata da un unico "cammino" rettificabile è detto albero. Si può provare quindi la semicontinuità per successioni di alberi ed estendere, per approssimazione, poi il risultato a un concetto di continuità generale.

**TEOREMA 3.19:**

Sia  $\{E_j\}$  un successione continua in  $\mathbb{R}^n$  convergente nella metrica di Hausdorff ad un insieme compatto  $E$ . Allora  $E$  è un insieme continuo e

$$H^1(E) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} H^1(E_j).$$

Dimostrazione:

Se  $E$  non è connesso, allora esiste una sua decomposizione disgiunta  $E = G_1 \cup G_2$ , dove  $G_1$  e  $G_2$  sono insiemi chiusi non vuoti con distanza  $\delta > 0$  tra  $G_1$  e  $G_2$ . Allora, per un qualche  $j$  sufficientemente grande,  $E_j \subset [G_1]_{1/4\delta} \cup [G_2]_{1/4\delta}$ , dove  $[G_1]_{1/4\delta}, [G_2]_{1/4\delta}$  sono corpi paralleli disgiunti contenenti punti di  $E_j$ , e questo va in contraddizione con la non connessione di  $E_j$ .  $E$  deve così essere un insieme continuo. Per provare ora la disuguaglianza assumiamo  $H^1(E) \leq c < \infty$  per ogni  $j$ . Scegliamo per ciascuno di essi un sottoinsieme finito  $S_j$  di  $E_j$  in modo  $S_j$  che sia convergente ad  $E$  nella metrica di Hausdorff. Poiché gli insiemi  $E_j$  sono connessi per archi, possiamo trovare alberi  $F_j$  con  $S_j \subset F_j \subset E_j$ . Allora  $F_j \rightarrow E$  nella metrica di Hausdorff. Fissiamo ora  $\delta > 0$ . Possiamo decomporre ciascun albero  $F_j$  in modo che  $F_j = \bigcup_{i=1}^k F_{ji}$ , dove  $|F_{ji}| \leq \delta$  per ogni  $j, i$  e dove  $\sum_{i=1}^k |F_{ji}| \leq H^1(F_j)$  per ogni  $j$ . Applicando ora il Teorema di selezione di Blaschke a  $\{F_{ji}\}_j$ , assumiamo che  $\{F_{ji}\}_j$  converga nella

metrica di Hausdorff ad un insieme compatto non vuoto  $H_i$  per  $1 \leq i \leq k$ .

Certamente allora  $|H_i| \leq \delta$  per ogni  $i$ , e  $E \subset \bigcup_i^k H_i$ . Così:

$$H_\delta^1(E) \leq \sum_i |H_i| = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_i |F_{ji}| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} H^1(F_j) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} H^1(E_j)$$

Ed otteniamo il risultato cercando ponendo poi  $\delta \rightarrow 0$ . □

### COROLLARIO 3.20:

*Sia  $C$  un'infinita collezione di insiemi continui, tutti di misura  $H^1$ , e giacenti in una porzione limitata di  $\mathbb{R}^n$ . Allora esiste una successione di insiemi distinti in  $C$  convergenti nella metrica di Hausdorff ad un insieme continuo  $E$  con  $H^1(E) \leq c$ .*

Dimostrazione:

Applicando il teorema 3.18 otteniamo una successione  $\{E_j\}$  da  $C$  convergente ad un insieme compatto non vuoto  $E$ . Per il teorema 3.19 poi,  $E$  risulterà essere un insieme continuo con  $H^1(E) \leq c$ . □

## Capitolo 4

# ALCUNI PROBLEMI DI MASSIMO E MINIMO

### 4.1 Il problema di Didone

Questo rappresenta il classico problema isoperimetrico. Possiamo tradurre il problema in: data una retta  $R$  e assegnata una lunghezza  $L > 0$ , tra tutte le curve piane che hanno entrambi gli estremi sulla retta  $R$ , trovare quella che racchiude area maggiore.

Seguendo un approccio puramente geometrico si può arrivare alle seguenti osservazioni:

1. La regione  $A$  racchiusa da una curva deve essere convessa.
2. Per risolvere il problema isoperimetrico, basta risolvere il Problema di Didone e raddoppiare la figura ottenuta.
3. Se una soluzione del problema esiste essa è una circonferenza.

Le prime due osservazioni sono banali perchè, se la regione ha rientranze è sempre possibile deformare la figura fino ad ottenerne una di area maggiore e perimetro non superiore alla lunghezza di  $\gamma$ .

Dimostriamo quindi l'ultima osservazione e consideriamo il problema

di Didone.

Risolvi il problema con un approccio puramente geometrico dovuto a Steiner.

Chiamiamo  $P$  e  $Q$  gli estremi del segmento di base che coincidono con gli estremi della curva  $\gamma$ . Prendendo un punto  $M$  su  $\gamma$  facciamo vedere che l'angolo  $PMQ$  è retto; perchè ogni punto  $M$  sul semicerchio di diametro  $PQ$  ha questa proprietà. Preso il punto  $M$  sulla curva eseguiamo un'operazione che viene chiamata "manovra di Steiner": immaginiamo che in  $M$  ci sia una cerniera e che la zona tra la curva e il triangolo  $PMQ$  sia fatta di due pezzi incernierati in  $M$ . (Fig. 4.1) Allargando o restringendo l'angolo in  $M$ , la lunghezza della curva non cambia, mentre varia l'area tra la curva e il segmento  $PQ$ . Ovvero i pezzi incernierati restano uguali e varia l'area del triangolo  $PMQ$ . Quindi dobbiamo verificare che l'area del triangolo è massima quando l'angolo in  $M$  è retto.

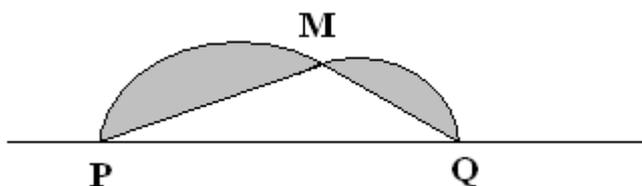


Fig. 4.1

Fissiamo ora le lunghezze di due lati del triangolo (ipotizziamo che uno dei due sia la base) e facciamo variare l'angolo fra i due lati. L'area massima si ottiene per il triangolo rettangolo (quindi l'angolo retto) perchè ha l'altezza massima. La dimostrazione è terminata.

## 4.2 Il quadrato opaco

Il seguente problema fu esposto da Fred Almgren: immaginiamo un pezzo di terra quadrato di lato unitario. Il proprietario è una persona molto poco piacevole e così non gradisce che i suoi vicini possano comunicare tra loro attraverso la sua proprietà. Vuol così costruire un muro intorno al suo terreno in modo da poter bloccare ogni tipo di comunicazione. Il proprietario è inoltre una persona un po' tirchia e così vuole spendere il meno possibile, costruendo però il miglior muro.

Qual è il più piccolo muro costruibile utile a bloccare qualsiasi tipo di comunicazione attraverso la proprietà?

Trovare il cammino più corto che connette quattro punti è meglio conosciuto come un classico problema di ottimizzazione. La sua soluzione è l'albero di Steiner rappresentata figura 4.2:

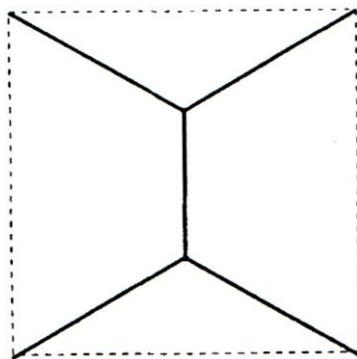


Fig. 4.2: L'albero di Steiner

La sua lunghezza è  $1+\sqrt{3}$ , circa quindi  $\approx 2.73$ . Quest'albero ha solamente due riflessioni simmetriche, sebbene il quadrato ne abbia

quattro. L'albero di Steiner non è simmetrico rispetto alle diagonali. In realtà un cammino ancora più breve fu trovato da Maurice Poirier, un insegnante di una scuola secondaria in Ontario, che seguì l'ispirazione di alcuni suoi alunni. La sua proposta è rappresentata in figura 4.3 e consiste di due componenti, dette albero di Steiner connesso su tre angoli. La sua lunghezza è pari a  $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \approx 2.64$  ed è ottenuta attraverso un'unica riflessione simmetrica.

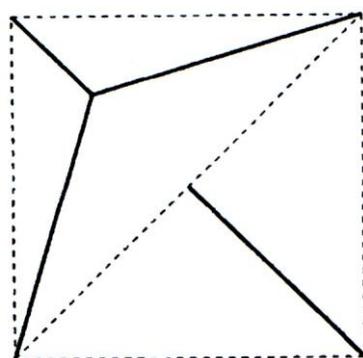


Fig. 4.3: Il cammino più breve

Una dimostrazione del fatto che il cammino descritto in figura 4.3 sia la soluzione ottimale è fornita dal fatto che questo rappresenta proprio la curva che minimizza la misura 1-dimensionale di Hausdorff nella classe di tutte le curve connesse  $C$ , che ha la proprietà di intersecare sia il quadrato  $D$  sia  $C$ .

Consideriamo  $C \subset \mathbb{R}^n$  ricordiamo che la misura 1-dimensionale di Hausdorff di  $C$  è definita come:

$$H^1 C = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam } U_i \mid U_i \text{ ricopra } C \text{ con diametro } \leq \delta \right\}.$$

Siano poi  $E, F$  sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$ , e sia  $E_\delta, F_\delta$  il loro  $\delta$ -intorno, allora la loro distanza di Hausdorff è definita come:

$$\delta(E, F) = \inf \{ \delta \mid E \subset F_\delta \text{ e } F \subset E_\delta \}.$$

Questa distanza induce una metrica, detta metrica di Hausdorff.

#### TEOREMA 4.1:

*Per ciascun massimo numero  $k \in \mathbb{N}$  di componenti e per ciascun compatto connesso  $D \subset \mathbb{R}^n$ , esiste una curva  $C_k \subset D$  che minimizza la misura 1-dimensionale di Hausdorff sotto la limitazione del lato geometrico, e per la quale ciascuna retta interseca sia  $D$  sia la curva.*

Dimostrazione:

La misura 1-dimensionale di Hausdorff è chiaramente limitata inferiormente e così esiste una successione minimizzante  $C^j$  di insiemi ammissibili, composto ciascuno di  $k$  componenti  $C_1^j, \dots, C_k^j$  a due a due disgiunti. Per il teorema 3.18 di selezione di Blaschke, per  $m=1, \dots, k$  e dopo esser passati ad una sottosuccessione, la successione di insiemi connessi  $C_m^j$  converge nella metrica di Hausdorff ad un insieme limite connesso  $C_m^\infty$ . La metrica di Hausdorff è semicontinua lungo questa sottosuccessione e quindi  $H^1 C_m^\infty \leq H^1 C_m^j$ . L'unione su  $m=1, \dots, k$  di questi  $C_m^\infty$  è un minimizzatore  $C_k$  poiché dalla sub-additività di  $H^1$

abbiamo che  $H^1 C_k \leq \sum_{m=1}^k H^1 C_m^j = H^1 C^j$ . Notiamo che l'ultima

uguaglianza segue per ciascun  $j$  fissato dalla coppia disgiunta di insiemi  $C_m^j$ , che la limitazione geometrica è conservata dalla convergenza degli insiemi nella metrica di Hausdorff così che  $C_k$  blocchi la visione come faceva già ciascun  $C^j$ , e che è possibile che  $C_k$  abbia meno di  $k$  componenti poiché alcuni  $C_m^\infty$  potrebbero avere intersezioni a due a due non vuote. Questo prova l'esistenza di un  $C_k$  minimizzante per ogni  $k$ . Per verificare la limitazione geometrica consideriamo semplicemente che i punti  $x_j$  di intersezione di una data retta con  $C^j$  convergono ad un punto o in  $C^\infty$  oppure su una data retta.

□

Ora  $C_1$  e  $C_2$  sono mostrate in figura 4.2 e 4.3, e supponiamo che  $C_1 = C_2$  per un qualche numero naturale  $k \geq 2$ . Cosa accade se  $k \rightarrow \infty$ ? Non si conosce il risultato per classi di curve ammissibili con un numero numerabile di componenti. La difficoltà sta nel fatto che la risultante semicontinuità non è più assicurata se gli insiemi  $C^j$  hanno un numero numerabile di componenti.

Perché  $C^2$  rappresentata in figura 4.3 è la soluzione ottimale nella classe di curve doppiamente connesse? Verrebbe naturale pensare che il cammino ottimale  $C$  dovrebbe contenere tutti e quattro gli angoli per evitare che si possa vedere oltre. Perciò le sue due componenti connesse e disgiunte  $C^1$  e  $C^2$  devono provenire dagli angoli del quadrato. Sono

varie le possibilità. Se  $C^1$  contiene esattamente i due angoli delle diagonali, allora  $C^2$  deve attraversare  $C^1$  stessa e questo è in contraddizione con il loro essere disgiunte. Se  $C^1$  contiene due angoli adiacenti, allora gli involucri convessi di  $C^1$  e  $C^2$  dovranno essere intersezioni non vuote. Sia  $z$  allora un punto di intersezione: connettendo tutti e quattro gli angoli con una semiretta da  $z$  si otterrà una curva, semplicemente connessa, più corta, altrimenti di nuovo una contraddizione. Così rimane da provare il caso che  $C^1$ , o equivalentemente  $C^2$ , contengano esattamente tre angoli. Se  $C^1$  resta nel triangolo generato da questi tre angoli, deve essere necessariamente l'albero di Steiner (Fig 4.3), ed allora  $C^2$  è metà di una delle diagonali, così da formare le due componenti della Figura 4.3. Infine consideriamo il caso in cui  $C^1$  superi il triangolo generato da i suoi tre angoli  $a, b, c$ . Allora affinché  $C^2$  non sia collegata a  $C^1$  e blocchi comunque la visione, questa deve toccare l'involucro convesso di  $C^1$ , ma non  $C^1$  in un qualche punto  $g$ . Così  $g$  giace su un segmento, ed gli estremi di questo,  $e$  ed  $f$ , sono elementi di  $C^1$ . (Fig. 4.5)

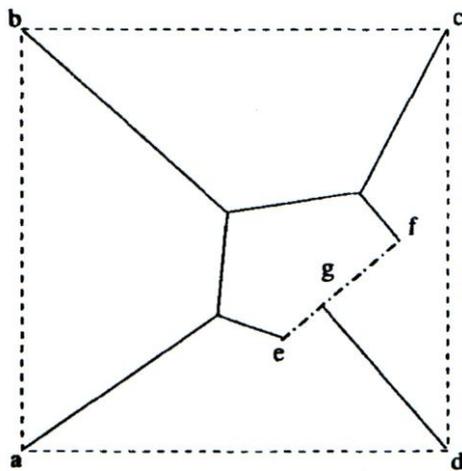


Fig. 4.4: Una situazione non ottimale

Poiché  $C^2$  minimizza la distanza dal quarto angolo  $d$  al convesso *hull* di  $C^1$ , i segmenti  $ef$  e  $dg$  devono essere ortogonali agli altri. Ora muoviamo  $e$  ed  $f$  dal quarto angolo  $d$  in direzione di  $dg$ . Ora questo sarà il cammino minimo che connette  $a, b, c, e, f$  ed in più allungherà quello da  $g$  ad  $f$

E questo completa la dimostrazione del fatto che la soluzione proposta in figura 4.3 rappresenti davvero la soluzione ottimale nella classe di curve con al massimo due componenti.

## Capitolo 5

# IL TEST NELLE SCUOLE

Il test, disponibile in appendice, è stato proposto, nell'anno scolastico appena terminato, in istituti di istruzione secondaria superiore della provincia di Roma su un campione di 200 studenti iscritti alle ultime classi. L'obiettivo era quello di mostrare come problemi di carattere superiore possano essere risolti con mezzi matematici, logici e deduttivi già in possesso di un liceale frequentate il triennio di un liceo scientifico (di indirizzo tradizionale e non).

Il questionario è stato articolato in tre parti.

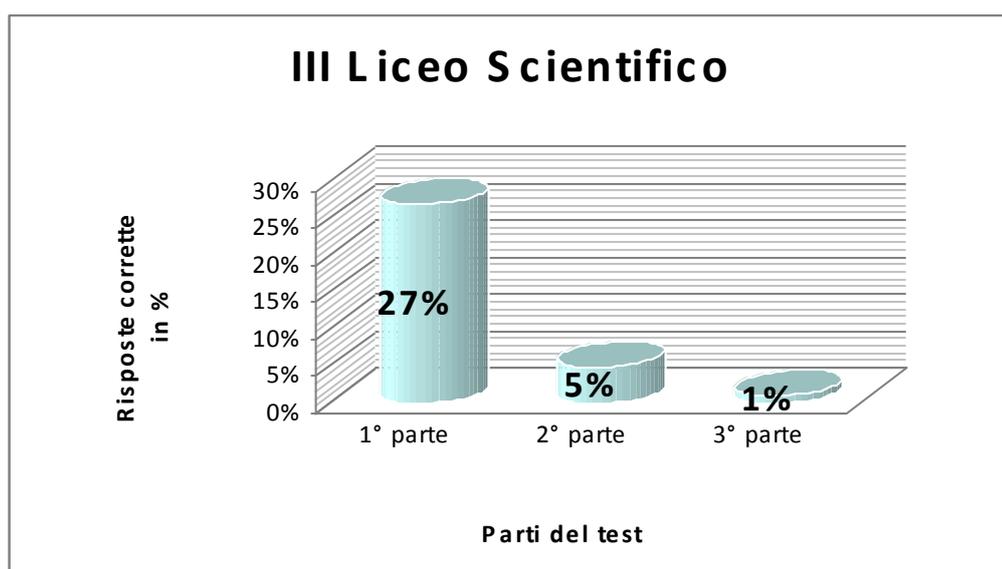
Nella prima parte si proponevano problemi immediati e noti di massimo e minimo reperiti direttamente da libri di testo per licei scientifici.

La seconda parte presentava il classico problema di Didone ed il moderno problema del quadrato opaco. Mentre del primo non si suggeriva alcuna soluzione, del secondo si proponevano due possibili figure per le quali si chiedeva quale rappresentasse la soluzione ottimale del problema.

Infine, nella terza parte, il problema è stato spostato ad un poligono in generale ( pentagono prima, esagono poi ). Sempre attraverso la proposta di figure rappresentati possibili soluzioni si richiedeva quale e perché si riteneva essere quella ottimale.

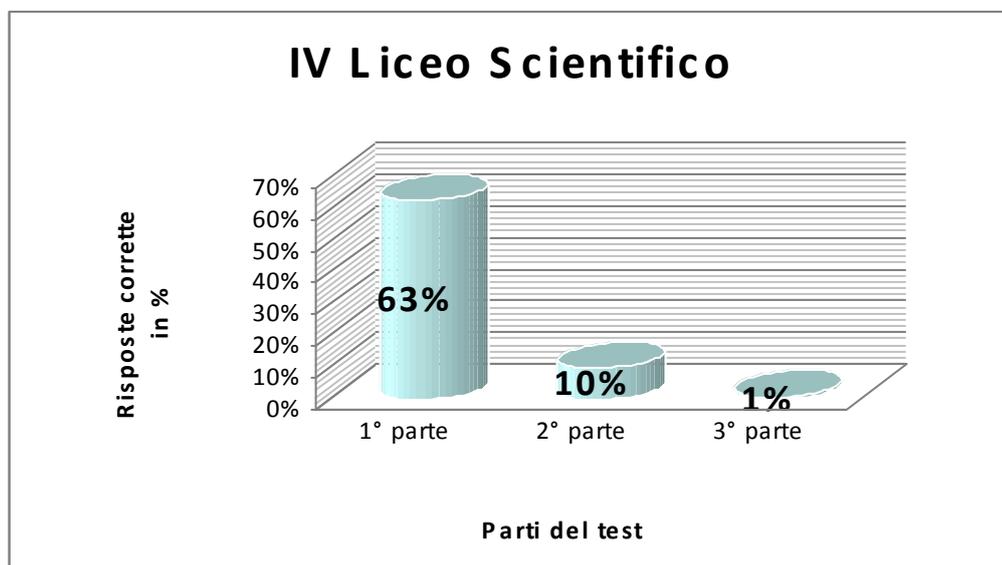
Possiamo riassumere i risultati ottenuti in base alla classe di appartenenza:

- per le prime classi del triennio, su un campione di 49 alunni, le risposte corrette hanno avuto la seguente distribuzione:

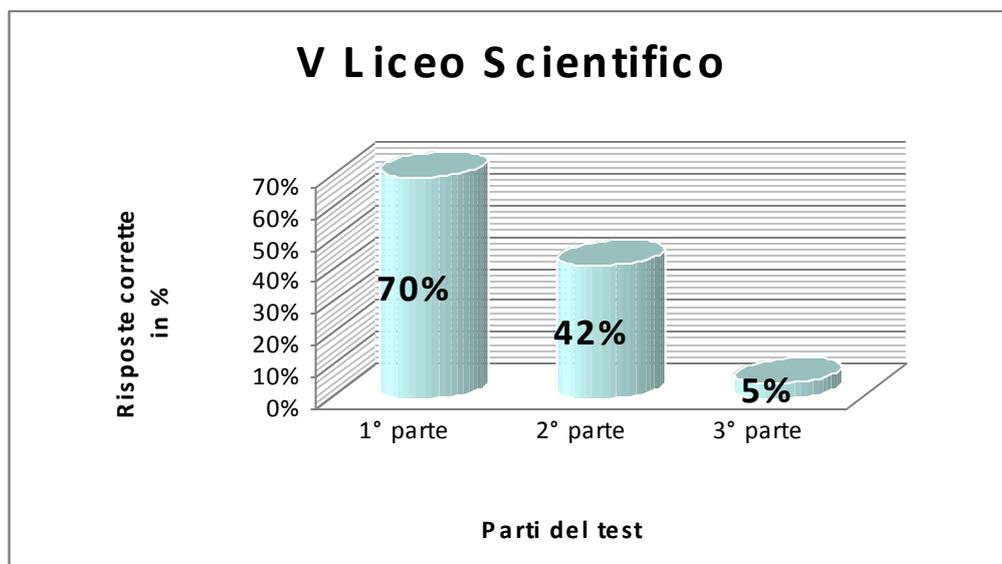


Come vediamo, nonostante la prima parte del test rappresentasse la parte più semplice ed immediata, solamente il 27% degli studenti sono stati in grado di fornire una risposta corretta, senza neanche saperla giustificare o comunque sentire la necessità di doverla giustificare. Solamente l'1% del campione si è cimentato nella soluzione autonoma di uno dei problemi proposti nella terza parte del test: laddove si richiedeva un impegno individuale nel proporre una qualche soluzione, hanno tutti preferito lasciare i fogli in bianco.

- per i IV Liceo la situazione risulta cambiata di poco, eccetto che per la prima parte del test: avendo studiato la trigonometria nel corso dell'anno scolastico, ben il 63%, di un campione di 52 studenti, ha saputo rispondere in modo corretto, giustificando, in modo più o meno esauriente, le risposte date. Sempre minimo il risultato sulla terza parte del test per cui si mostra ancora una volta come solamente l'1% del campione abbia tentato di dare una soluzione propria al problema, senza discostarsi, però, da quelle già proposte nel test.



- situazione ben diversa è quella riscontrata per le classi quinte:



su un totale di 99 studenti, ben il 70% ha risposto in modo corretto e completo alla prima parte del test, dimostrando i risultati ottenuti sia per via trigonometrica sia attraverso l'applicazione della geometria sintetica. Una discreta percentuale ha affrontato il problema di Didone e del quadrato opaco intuendo la soluzione ottimale, ma non supportando le proprie scelte con calcoli. Interessante come un 5% abbia presentato delle possibili soluzioni, sebbene non corrette e non dimostrate, ai problemi nella terza parte del test.

## 5.1 Conclusioni

La trattazione di problemi di massimo e minimo risulta di notevole importanza per la risoluzione di questioni nel campo di molte discipline quali la fisica, l'economia, l'ingegneria, l'architettura. Anche nel quotidiano spesso ci troviamo a far fronte a situazioni o a fenomeni che nascondono problemi di tale natura, ossia di ottimizzazione.

La trattazione di problemi di massimo e minimo ad oggi, nella nostra scuola, rappresenta per gli studenti di quinto liceo un'applicazione delle prime tecniche di calcolo infinitesimale e, per gli studenti di terzo e quarto liceo, una fantastica applicazione da parte del professore rispettivamente alla geometria analitica ed alla trigonometria.

In realtà prima la geometria piana e poi l'analisi matematica hanno fornito metodi d'indagine nella risoluzione di tali problemi.

Da questa coscienza è nata l'idea di questa indagine nella scuola: un ragazzo, frequentante il triennio di un liceo scientifico, è conscio di come la matematica da lui imparata abbia applicazioni nel suo quotidiano e di come le sue varie sfaccettature permettano di risolvere, in modo esaustivo, problemi, indipendentemente da quale mezzo matematico scelga di usare?

La risposta sembra essere no. Se non aiutati e guidati, anche nell'intuizione, sono sempre meno i ragazzi capaci di non impoverire la matematica ad un insieme di nozioni classificate a seconda dell'anno scolastico di riferimento. Sono sempre meno i ragazzi pronti ad impegnarsi a "vedere" la matematica, decisi a mettersi in gioco per diventare, non

senza sacrifici, padroni nella gestione e nel controllo degli strumenti base del conoscere e del capire.

Come è emerso chiaramente anche nell'ultimo esame di maturità (ben due problemi di ottimizzazione nel compito del liceo scientifico tradizionale), i problemi di massimo e minimo possono essere risolti, infatti, anche per via elementare.

La nostra scuola è in grado, quindi, di insegnare anche a gestire le conoscenze acquisite rendendo autonomi nell'individuazione di procedimenti che permettono di evitare calcoli inutili?

Sicuramente c'è necessità di rinnovamento nella prassi didattica italiana e le risorse offerte dalle nuove tecnologie nella didattica potrebbero rappresentare questo cambiamento. Gli aspetti interessanti sono essenzialmente tre: l'ambiente che il software utilizzato (per lo più Cabri Géomètre II Plus) mette a disposizione degli studenti favorendo continue transizioni fra gli aspetti numerici, grafici e simbolici; la possibilità di anticipare lo studio delle grandezze che variano prima di possedere tecniche di calcolo infinitesimale; infine, l'opportunità di recuperare ragionamenti ed approcci tipici delle origini.

Concludendo, la prassi didattica dovrebbe aprirsi maggiormente ad un lavoro che, stimolando curiosità, fantasia e intuito, implichi sempre il coinvolgimento e l'utilizzo delle conoscenze acquisite e, usando una frase del reverendo Edwin A. Abbott, non dimentichiamo che "porsi delle domande è spesso la maniera più efficace di rispondervi".

# **APPENDICE**



## ***Problemi isoperimetrici***

1. Tra tutti i triangoli rettangoli di data ipotenusa qual è quello di area massima?
2. Tra tutti i rettangoli inscritti in un cerchio qual è quello di area massima?
3. Tra tutti i triangoli isosceli di perimetro costante qual è quello di massima area?
4. Tra tutti i rettangoli di perimetro fissato quale ha area massima?
5. Tra tutte le figure piano che hanno lo stesso perimetro, qual è quella di area più grande?
6. Dati quattro lati  $a$   $b$   $c$   $d$  di lunghezza fissata, quale quadrilatero composto da questi quattro lati ha area massima?

### *Il problema di Didone:*

Iarba, re della Libia, offrì alla principessa Didone tanta terra quanta la pelle di un bue potesse circondarne. Didone accettò la sfida e riuscì ad occupare la terra necessaria per fondare Cartagine: chiese un paio di forbici, tagliò in strisce sottilissime la pelle, le annodò e con il filo ottenuto, recintò un bel pezzo di terreno a forma di.....????.....

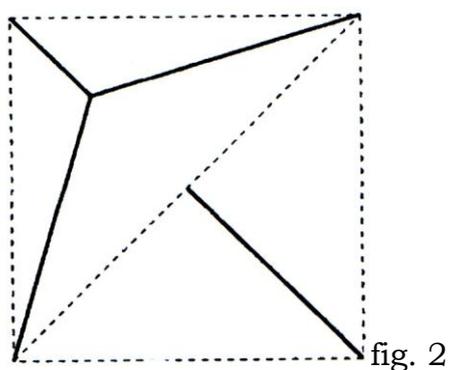
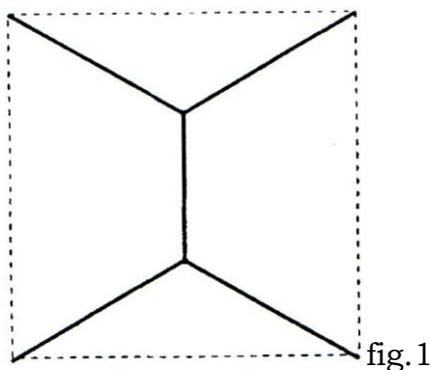
Matematicamente parlando potremmo così tradurre il problema: Fra tutte le curve chiuse nel piano di fissato perimetro, quale curva (se esiste) massimizza l'area della regione inclusa?

### *Il problema di Fred Almgren:*

Immaginiamo un pezzo di terra quadrato di lato unitario. Il proprietario è una persona molto poco piacevole e così non gradisce che i suoi vicini possano comunicare tra loro attraverso la sua proprietà. Vuol così costruire un muro intorno al suo terreno in modo da poter bloccare ogni tipo di comunicazione. Il proprietario è inoltre una persona un po' turchia e così vuole spendere il meno possibile, costruendo però il miglior muro.

Qual è il più piccolo muro costruibile utile a bloccare qualsiasi tipo di comunicazione attraverso la proprietà?

Tra quelli che si occuparono di risolvere il problema di Almgren, interessante sono le soluzioni di Steiner (fig. 1) e di Poirier (fig. 2).



- Quale ti sembra la migliore? Perché?
- Immaginiamo adesso che il terreno sia un pentagono regolare. La situazione non cambia di molto, ad esempio una possibile soluzione è la seguente:

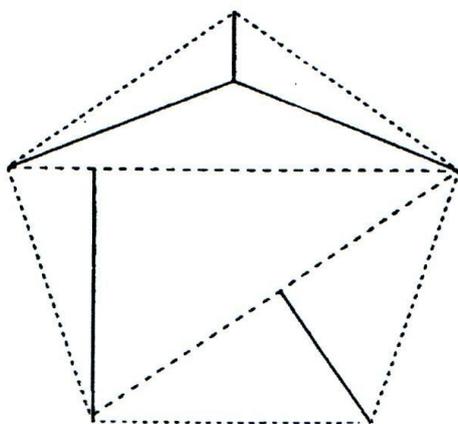


fig. 3

Riusciresti a trovare altre possibili recinzioni di perimetro minimo che massimizzano l'area?

Alcuni partecipanti ad una scuola estiva hanno suggerito le seguente soluzione:

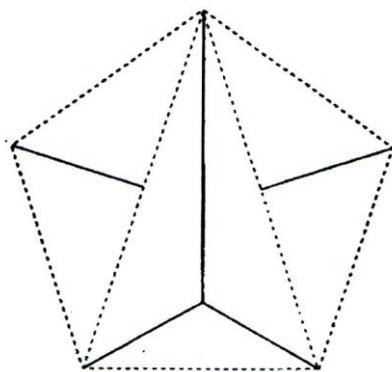


fig. 4

Ti sembra migliore della precedente? Perché?

- Cosa accadrebbe adesso se avessimo un terreno di forma esagonale? Tra quelle proposte quale ti sembra la soluzione ottimale? Perché?

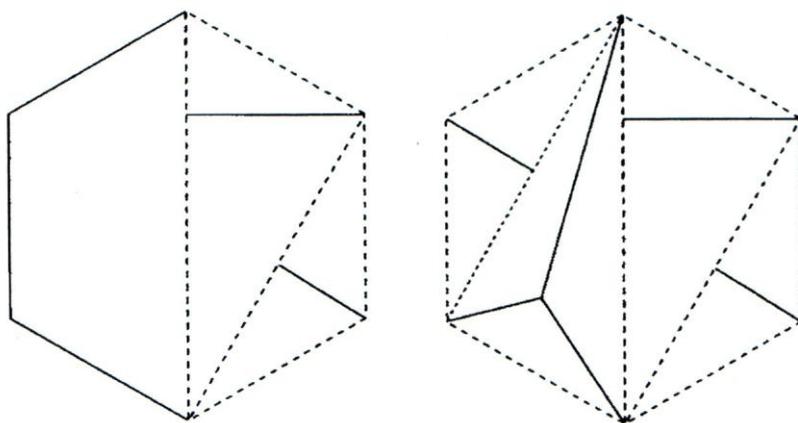


fig. 5

Alunno.....

Scuola.....Classe.....

# BIBLIOGRAFIA

- [1] E. Giusti, *Analisi Matematica 2*, Bollati Borighieri, 1988
- [2] C.D. Pagani & S.Salsa, *Analisi Matematica 2*, Masson 1998
- [3] I. Chavel, *Isoperimetric inequalities. Differential geometric and analytic perspectives*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2001
- [4] Yu. D. Burago & A. Zalgaller, *Geometric inequalities*, Springer-Verlag, Berlin 1992
- [5] P.D'Ancona & E. Montefusco, *Il dubbio di Didone*, in “Ricordando Franco Conti”, 59-79, Pubbl. Cent. Ric. Mat. Ennio Giorgi, Scuola Norm. Sup., Pisa, 2004
- [6] I. Chavel, *On A. Harwitz' method in isoperimetric inequalities*, Proc. A.M.S., vol. 71, 275-279, 1978
- [7] A. Treibergs, *Inequalities that imply the isoperimetric inequality*, dispense
- [8] L.E. Payne, *Isoperimetric inequalities and their applications*, SIAM Review, vol. 9, 453-488, 1967

- [9] B. Kawohl, Some nonconvex shape optimization problems, in  
“Optimal shape design” ( Troia 1998), 7-46, Lect. Notes in Math  
1740, Springer-Verlan, Berlin, 2000
- [10] Lamberti- Meren- Nanni, Matematica Tre, ETAS 2007
- [11] Bergamini- Trifone- Barozzi, Corso base blu di matematica 5,  
Zanichelli 2007