UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA

S.S.I.S. Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario

Indirizzo: Matematico - Fisico - Informatico

Classe di concorso A049

Relazione finale di Tirocinio

A cura della tirocinante:

Dott.ssa Stefania Gervasi

Il Supervisore di tirocinio

Prof.ssa Maria Pisani

Anno Accademico 2006/2007

Indice

Premessa **1**

1 La Scuola **3**

1.1 Il liceo scientifico "E.Fermi" 4

1.2 Il POF 6

1.3 L'insegnante di classe 7

1.4 Le classi 8

2 I Laboratori **12**

2.1 Traslazione e Simmetria assiale 12

2.1.1 Elementi di programmazione didattica 12

2.1.2 Prima lezione 14

2.1.3 Scheda "alla scoperta" della Traslazione 17

2.1.4 La Simmetria assiale 26

2.1.5 Scheda "alla scoperta" della Simmetria Assiale 27

2.1.6 Alcune curiosità 36

2.1.7 Seconda lezione 38

2.1.8 La Traslazione come trasformazione del piano in sè 38

2.1.9 La Simmetria Assiale come trasformazione del piano in sè 39

2.1.10 La Simmetria Assiale è una isometria 41

2.2 Metodi iterativi per la risoluzione approssimata di equazioni 44

2.2.1 Elementi di programmazione didattica 44

2.2.2 Prima lezione: Metodi Iterativi 46

2.2.3 Un gioco 46

2.2.4 Formalizzazione 51

2.2.5 Applicazioni 51

2.2.6 Un quesito degli esami di stato del 2006 . . . 58
2.3 La Carica Elettrica e la Legge di Coulomb . . . 60
2.3.1 Elementi di programmazione didattica . . . 60
2.3.2 La carica elettrica . . . 61
2.3.3 Elettrizzazione ed esperimenti . . . 62
2.3.4 Applicazioni . . . 66
2.3.5 Esercizi pratici e on-line . . . 66
2.3.6 La Forza di Coulomb . . . 67
2.3.7 Riassumendo... . . . 69
2.4 Forze ed equilibrio . . . 70
2.4.1 Elementi di programmazione didattica . . . 70
2.4.2 Concetto di Forza ed equilibrio . . . 71
2.4.3 Carattere vettoriale e misura delle forze . . . 72
2.4.4 La Forza-Peso . . . 74
2.4.5 La Forza elastica . . . 75
2.4.6 Esperimento: legge di Hooke . . . 75
2.4.7 Equilibrio di un punto materiale . . . 76
2.4.8 Reazioni vincolari . . . 77
2.4.9 Equilibrio su un piano inclinato . . . 77

3 Il Tirocinio **79**
3.1 TIROCINIO DI MATEMATICA . . . 80
3.2 La retta con Matcos . . . 80
3.2.1 Elementi di programmazione didattica . . . 80
3.2.2 Introduzione alla retta . . . 80
3.2.3 Formalizzazione retta passante per l'origine . . . 84
3.2.4 Significato del coefficiente angolare . . . 84
3.2.5 Rette non passanti per l'origine . . . 85
3.2.6 Rette parallele agli assi . . . 86
3.2.7 Equazione della retta in forma implicita . . . 88
3.3 Calcolo combinatorio e Probabilità . . . 89
3.3.1 Elementi di programmazione didattica . . . 89
3.3.2 Prima lezione . . . 89
3.3.3 Introduzione dell'argomento . . . 89

3.3.4 Definizione classica 90
3.3.5 Calcolo Combinatorio 90
3.3.6 Seconda lezione 95
3.3.7 Limiti della definizione classica 95
3.3.8 Definizione frequentistica 95
3.3.9 Programma MatCos per la Legge Empirica del Caso 95
3.3.10 Definizione soggettiva 97
3.3.11 Confronto 97
3.4 Tirocinio indiretto: Risoluzione dei triangoli 99
3.4.1 Elementi di programmazione didattica 99
3.4.2 Lezione 1: Risoluzione di un triangolo rettangolo 102
3.4.3 Lezione 2: Applicazioni dei teoremi sui triangoli rettangoli 109
3.4.4 Lezione 3: Risoluzione di un triangolo qualsiasi 114
3.4.5 Lezione 4: Applicazioni dei teoremi sui triangoli qualsiasi 119
3.5 TIROCINIO DI FISICA 124
3.6 I primi modelli atomici 124
3.6.1 La struttura dell'atomo 124
3.6.2 La Forza di Coulomb 125
3.6.3 Il Modello di Thomson 126
3.6.4 L'esperimento di Rutherford 126
3.6.5 Il Modello di Rutherford 128
3.7 Cenni di fisica nucleare 129
3.7.1 Le quattro forze esistenti in natura 129
3.7.2 Le forze nucleari 130
3.7.3 Isotopi 131
3.7.4 Decadimento radioattivo 132
3.7.5 Difetto di massa 133
3.7.6 Fissione nucleare 134
3.7.7 Fusione Nucleare 134
3.8 Tirocinio indiretto: Statica 136
3.8.1 Elementi di programmazione didattica 136
3.8.2 Alcune lezioni 139

Bibliografia **149**

Premessa

L'insegnamento della matematica e della fisica persegue fra i suoi scopi principali quello di contribuire alla crescita intellettuale ed alla formazione globale di tutti i giovani. Con questa convinzione intraprenderò la mia futura attività di insegnante.

In questi due anni di S.S.I.S. ho avuto modo di osservare, esaminare e imparare diversi metodi di insegnamento, più o meno efficaci in relazione all'argomento in esame ed ai diversi contesti scolastici. Elemento comune a tutti i metodi proposti è quello di non ridurre il valore formativo della matematica e della fisica al semplice "far di conto", all'applicazione meccanica di algoritmi e procedure risolutive ripetitive, nè ad una trattazione astratta, completamente estranea alla realtà che ci circonda.

Fino a quando si proporranno la matematica e la fisica come trasmissione di verità assolute e statiche raggiunte mediante un mero processo di accumulazione, trascurandone l'intrinseca problematicità e lo stretto legame con la realtà sensibile, saranno inevitabili sia un certo isolamento disciplinare e sia l'ostilità dichiarata dalla maggior parte degli studenti.

Spetta all'insegnante l'arduo compito di far percepire allo studente il significato e l'utilità dei contenuti insegnati. Per raggiungere questo scopo è importante considerare sempre i propri alunni come centrali nel processo di apprendimento ricorrendo a lezioni dialogate, nelle quali si favorisce un clima di confronto, uno scambio di idee, opinioni, dubbi, chiarimenti. A volte definizioni e proprietà possono scaturire proprio dagli studenti stessi, se opportunamente stimolati mediante discussioni (in cui l'insegnante ha il ruolo di moderatore) e strumenti adeguati (schede operative, software,...).

L'insegnante deve essere in grado di organizzare in modo equilibrato una "situazione problematica" affidando poi agli allievi il compito di risolverla, facendo emergere un'idea che, condivisa da tutti, dovrà corrispondere a quella matematicamente fondata. Si realizza una situazione didattica nella quale l'allievo, interagisce direttamente con il sapere e diviene lui stesso "costruttore" di conoscenza.

Per facilitare la comprensione ed attivare la mente degli allievi, è utile fare ricorso a lezioni che utilizzino gli strumenti multimediali, come video-presentazioni e software didattici.
Alla luce dell'esperienza maturata ritengo che il Laboratorio di Matematica sia molto efficace. Anzitutto abitua ed aiuta gli studenti a scoprire "fatti" matematici attraverso la manipolazione di oggetti; inoltre permette allo studente di lavorare attorno a situazioni non note formulando congetture e proponendo risposte a problemi nuovi; rafforza le conoscenze maturate dagli studenti ed alleggerisce il lavoro di risoluzione algebrica, che a volte risulta molto laborioso e può far perdere di vista l'essenza del problema nella sua globalità.
Altra strategia fondamentale è il riferimento alla storia della matematica e della fisica per far comprendere agli allievi che gli argomenti trattati sono frutto di tanti anni di elaborazione. É opportuno inoltre far notare, soprattutto ai ragazzi che incontrano difficoltà, che molti problemi di apprendimento con cui si scontrano sono stati incontrati prima di loro da grandi matematici o fisici. Riferimenti storici e aneddoti possono, infine, alimentare la motivazione, l'interesse, l'attenzione e la curiosità.
L'insegnante deve coinvolgere gli allievi in un continuo processo di elaborazione per condurli a riflettere sul proprio modo di ragionare e sulle strategie adottate di fronte ad un problema, abituandoli a giudicare e motivare le proprie scelte risolutive e a riflettere sulla ragionevolezza dei risultati.
L'insegnante dunque ha un ruolo che va ben oltre la semplice trasmissione di conoscenze: deve affrontare una molteplicità di situazioni sociali e di richieste formative. Da necessità generali come quella di formare personalità critiche e aperte al cambiamento, disponibili a "imparare ad imparare", al lavoro con gli altri, ad agire in modo autonomo, a necessità specifiche richieste dal mondo del lavoro, tra cui la conoscenza del linguaggio informatico e multimediale. Non a caso il profilo professionale dell'insegnante è strettamente legato all'evoluzione del sistema sociale, economico, culturale e politico.
Una professionalità che potremmo definire multidimensionale, ricca anche di motivazioni personali e di responsabilità sia verso gli allievi che verso l'istituzione scuola. L'insegnamento non solo comporta costantemente l'esigenza di approfondire ed arricchire le conoscenze e le competenze già maturate, ma implica anche, per forza della sua destinazione sociale, l'attenzione all'"altro" al quale è rivolto e l'attitudine a raccordarsi ai suoi bisogni nonché alla sua attesa di riferimenti critici ed umani.

Capitolo 1

La Scuola

Le attività del tirocinio mi hanno fatto sentire particolarmente coinvolta in un percorso di formazione alla professionalità docente. Un percorso di tipo più pratico e a diretto contatto con il contesto scuola ha suscitato in me l'entusiasmo di poter finalmente verificare e mettere in pratica le nozioni teoriche che ci sono state insegnate negli altri corsi. Dalle osservazioni dirette sul campo, inoltre, ho potuto trarre considerazioni e riflessioni critiche che spero risulteranno utili per lo svolgimento della mia attività futura di insegnante.

Già dai primi incontri mi è stato possibile osservare come il sistema scolastico, in questi ultimi anni, sia notevolmente cambiato e siano cambiati anche i ruoli delle figure professionali presenti nella scuola. Si è passati da una condizione statica e piuttosto chiusa, ad una realtà dinamica, aperta alle esigenze degli studenti e trasparente nelle comunicazioni.

Sono numerose le attività extracurriculari, i progetti, le sperimentazioni che tendono a potenziare l'asse scientifico, linguistico ed informatico e le iniziative volte a diffondere l'uso della tecnologia.

Mi ha particolarmente interessato proprio l'aspetto organizzativo della scuola: la chiarezza con cui vengono presentati i percorsi formativi presenti nella scuola; la precisione nel descrivere le attività e le finalità di ciascun percorso; l'attenzione rivolta a diverse attività extracurriculari per potenziare le specifiche potenzialità di ciascun allievo; la trasparenza che caratterizza tutte le fasi dell'attività scolastica. Ritengo che una grande attenzione all'organizzazione globale della scuola sia necessaria e molto utile per raggiungere la formazione complessiva dell'individuo che non si può basare solo sulle buone competenze disciplinari.

1.1 Il liceo scientifico "E.Fermi"

L'istituto presso il quale ho svolto l'attività di tirocinio diretto durante i due anni della SSIS è stato il "Liceo scientifico E. Fermi" (Foto in figura 1.1). Esso è situato in una zona

Figura 1.1: Liceo scientifico E. Fermi.

centrale della città, molto vicina alle Autolinee. E' suddiviso in due edifici: la sede in via Molinella per il biennio e la sede centrale in via Isnardi per il triennio e per tutte le attività amministrative. In entrambe le sedi c'è un cortile, mentre manca un'area di parcheggio per la sede di via Molinella.

Gli spazi interni sono puliti, accoglienti e luminosi e ci sono locali adibiti alle diverse funzioni della vita scolastica (sala professori, biblioteca, laboratori, aula di disegno, palestra, uffici di segreteria e bar).

Le attività scolastiche si svolgono tutti i giorni dalle 8:20 alle 13:30 con la distribuzione delle ore secondo lo schema riportato in figura 1.2 e seguendo il quadro orario settimanale di ciascun indirizzo.

ore 08.20 - 09.10
ore 09.10 - 10.10
ore 10.10 - 11.00
ore 11.00 - 11.10 (intervallo)
ore 11.10 - 12.10
ore 12.10 - 13.00
ore 13.00 - 13.50

Figura 1.2: Schema orario

La comunicazione delle attività interne e/o esterne alla scuola vengono diffuse attraverso bacheche reali esistenti all'interno dei due edifici e virtuali presenti sul sito web. Inoltre la scuola è dotata di un sistema che, tramite una password, permette ai genitori degli alunni di controllare la presenza dei figli a scuola quotidianamente in tempo reale.

La Biblioteca e i Laboratori

Il Liceo dispone di una **Biblioteca** (foto in figura 1.3) dotata di oltre 7000 volumi che prevede servizio di consultazione e prestito.
Il **Laboratorio di Informatica** (foto in figura 1.4) è dotato di una moderna attrezzatura composta da 16 computer collegati in rete, da scanner, stampanti, televisore con antenna parabolica e videoregistratore, connessione ad Internet. Esso è utilizzato regolarmente da studenti e docenti non solo delle classi sperimentali del PNI, ma anche per lavori pluridisciplinari.

Figura 1.3: Biblioteca

Figura 1.4: Laboratorio di Informatica

I **Laboratori di Fisica e di Chimica** (foto in figura 1.5) sono attrezzati sia per esperienze dimostrative come conferma sperimentale dei dati teorici, sia per esperienze condotte direttamente da gruppi di allievi.

Figura 1.5: Laboratorio di Fisica e Chimica

1.2 Il POF

La scelta didattica del Liceo Scientifico "Fermi" non riguarda solo l'organizzazione quotidiana, ma anche l'unitarietà del progetto educativo che, oltre a porre al centro del processo d'apprendimento-insegnamento i bisogni formativi degli alunni, individua nelle loro competenze ("saper fare e aver voglia di fare") un fondamentale riferimento. Si tratta, di un processo nuovo che avvia una riflessione pedagogico-professionale e vede nella collegialità e nelle diverse competenze, integrate in un progetto unitario, il fulcro di un'idea di scuola adeguata alle nuove esigenze formative.
Con queste motivazioni e finalità, il Liceo Scientifico "Fermi" fonda la sua offerta formativa nella creazione di un percorso educativo lineare ed unitario.
Elementi determinanti in questo scenario sono:

- Le coordinate culturali di fondo dei programmi disciplinari:
  a) l'indicazione dei contenuti essenziali per la formazione di base
  b) i traguardi irrinunciabili
  c) le tematiche portanti
  d) i sistemi di valutazione
- Lo sviluppo di una concezione costruttiva della conoscenza:
  a) Studio delle discipline come un insieme di problemi: procedimenti, criteri, modelli di indagine specifici;
  b) Concetti di collegamento organico dei dati esperenziali e conoscitivi
- Il consolidamento, la riorganizzazione e l'accrescimento delle capacità e delle competenze acquisite: costruire e coltivare l'idea che il concetto di formazione si afferma pienamente non solo come una conoscenza di livello culturalmente alto, ma come una molteplicità di occasioni di tutela attraverso i progetti di attività extracurriculari ed i progetti PON.

Diversi sono infatti i progetti attivati dal Liceo:

- Progetto "OLIMPIADI DI MATEMATICA";
- Progetto "OLIMPIADI DI INFORMATICA ";
- Progetto "OLIMPIADI DI FISICA";

- Progetto “INFOLICEO” - Le nuove tecnologie: una base della cultura dell’informatica;
- Progetto “Il LATINO nel mondo delle parole e nella varietà dei linguaggi”;
- Progetto “CERTIFICAZIONE TRINITY”;
- Progetto Scienze della Terra: “Vulcani e terremoti”;
- Progetto “VIAGGI DI ISTRUZIONE”;
- Progetto “Formazione gruppo sportivo”.

1.3 L’insegnante di classe

La docente con cui ho svolto la mia attività di tirocinio diretto è la professoressa Carmela Falcone. Laureata in matematica, insegna matematica per il triennio del corso E e fisica al quinto anno dello stesso corso. É un’insegnante che svolge con passione la sua attività, disponibile e corretta con gli studenti, chiara e paziente nelle spiegazioni.
La sua impostazione didattica privilegia il rapporto diretto con gli allievi, cercando di interessarli agli argomenti proposti e di farli partecipare attivamente alle lezioni. Non si è mai mostrata distaccata o autoritaria, ma ha sempre gestito le classi con tranquillità. Riusciva a mantenere vivo l’interesse e l’attenzione degli alunni e a gestire gli studenti particolarmente vivaci.
Ha creato, infatti, un’ottima intesa con gli alunni, probabilmente per la sua chiarezza e correttezza nel gestire il rapporto con loro. Il cosiddetto “contratto formativo” è ben chiaro e apprezzato dagli alunni, essi sanno bene come comportarsi in classe in presenza dell’insegnante e quali sono le regole da seguire per una convivenza serena. D’altra parte la professoressa è particolarmente attenta alle esigenze degli alunni; durante le spiegazioni presenta diversi esempi per cercare di far comprendere al meglio i concetti e alla fine della lezione fa svolgere degli esercizi alla lavagna agli alunni stessi cercando di individuare eventuali punti critici nel processo di apprendimento. Un altro aspetto dell’impostazione didattica, particolarmente apprezzato dagli alunni, consiste nella sua disponibilità a svolgere attività di esercitazione in classe soprattutto in prossimità di un compito in classe. Una volta stabilita la data del compito, infatti, l’insegnante non prosegue nè con la spiegazione di nuovi argomenti, nè con le verifiche orali, allo scopo di far assimilare al meglio gli argomenti che saranno trattati nel compito.

Gli strumenti di lavoro utilizzati sono il libro di testo e alcune fotocopie fornite dall'insegnante per vari approfondimenti su alcuni argomenti e per altri esercizi. La professoressa, inoltre, utilizza circa ogni due settimane il laboratorio di informatica per ricerche, esercitazioni e lezioni con l'ausilio di un software didattico. Anche per la fisica, la professoressa utilizza il laboratorio, proponendo ai propri alunni esperimenti da svolgere come applicazione e verifica della teoria svolta in classe.
L'organizzazione dei tempi di lezione si compone fondamentalmente di tre parti: la correzione degli esercizi o l'eventuale interrogazione, la spiegazione con ulteriori chiarimenti, applicazioni ed esercizi, e infine l'assegnazione degli esercizi da svolgere a casa. In particolare, quando ci sono pochi alunni presenti, la professoressa impiega le ore a disposizione per eventuali chiarimenti e approfondimenti. Per quanto concerne le verifiche orali, le interrogazioni alla lavagna prevedono una parte più teorica e una parte di esercizi. Gli studenti spesso si organizzano decidendo di andare volontari e quindi calendarizzando le verifiche in collaborazione con l'insegnante.
In conclusione, come impressione personale, ritengo che l'esperienza diretta a contatto con delle classi e con un'insegnante sia stata particolarmente significativa e spero mi aiuterà a gestire al meglio la mia futura attività di insegnante.

1.4 Le classi

L'attività di Tirocinio è stata svolta presso tre classi del Liceo, indirizzo PNI: il triennio del corso E.
Le aule delle tre classi sono ubicate nella struttura di via Isnardi e sono tra loro adiacenti. Sono tutte aule nuove, pulite, molto luminose, grazie a dei grossi finestroni che occupano gran parte della parete laterale, e abbastanza grandi da ospitare dignitosamente tutti gli alunni.
Le postazioni degli alunni sono a banchi biposto o triposto che compongono più file disposte di fronte alla cattedra dell'insegnante, che "fortunatamente" (a mio parere) è sprovvista di pedana. A destra e a sinistra della cattedra sono posizionate due lavagne.

Classe III E

La classe III è composta da 22 alunni di età compresa tra i 16 e i 17 anni; la distribuzione maschi-femmine è perfettamente equilibrata (11 elementi per entrambi i sessi) e la disposizione nell'aula è rappresentata in figura 1.4.

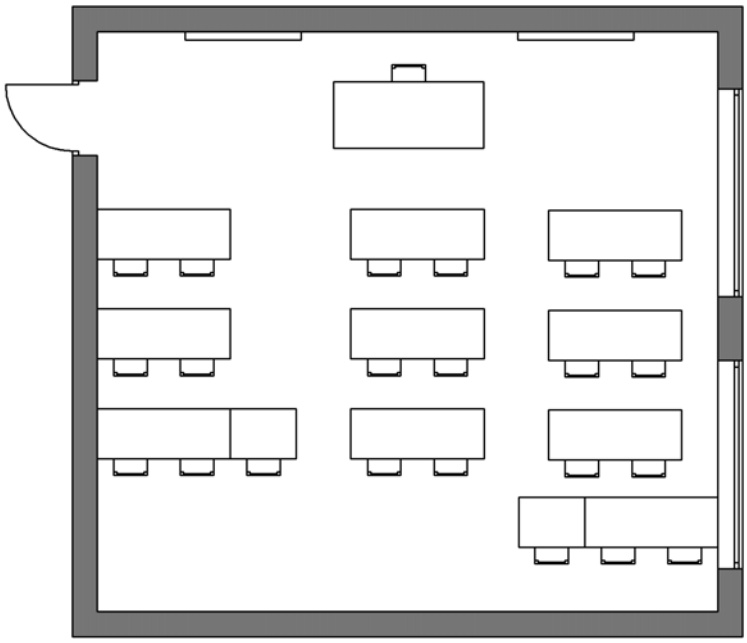


Figura 1.6: Disposizione Classe III E

Gli studenti sono in parte di Cosenza centro e in parte provengono da paesi limitrofi. La vicinanza della scuola alle Autolinee la rende infatti facilmente raggiungibile anche per i pendolari.
La classe sembra integrata bene anche se, come credo sia normale, c'è a volte la tendenza a formare dei gruppetti. Tuttavia c'è in generale un buon livello di coesione, sono compatti nel prendere decisioni riguardanti l'intera classe e si aiutano a vicenda.
Per la classe, questo è il primo anno insieme alla professoressa Carmela Falcone che insegna per loro solo matematica. Con lei la classe ha riscontrato in generale dei miglioramenti, probabilmente perchè il suo metodo didattico è particolarmente apprezzato dagli alunni. Inoltre si è creato da subito un buon rapporto tra l'insegnante e gli alunni e questo non può che favorire l'apprendimento.

Classe IV E

Anche questa classe è formata da alunni di sesso misto: 13 femmine e 13 maschi per un totale di 26 alunni, di età compresa tra i 17 e i 18 anni e la disposizione nell'aula è rappresentata in figura 1.4.

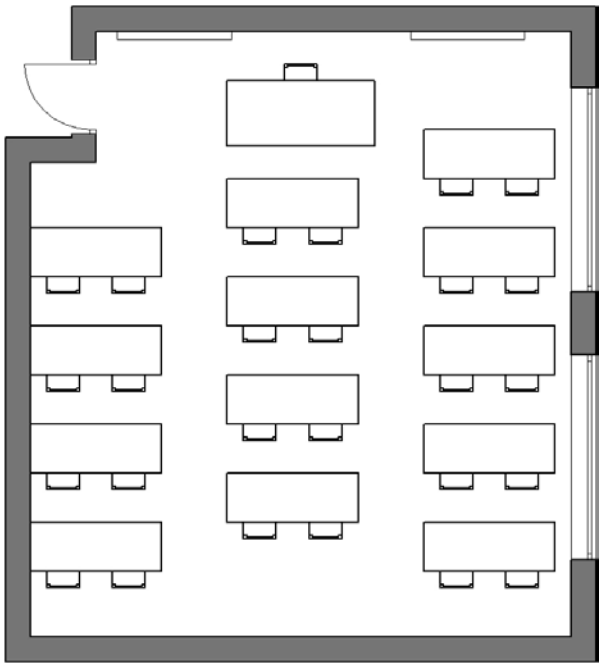


Figura 1.7: Disposizione Classe IV E

Per quanto concerne la distribuzione geografica della provenienza degli alunni, si rileva che anche in questo caso essa si estende ai paesi limitrofi alla città.
La classe si presenta compatta e unita e anche con l'insegnante c'è una maggiore intesa che si manifesta anche con una partecipazione più attiva all'attività didattica.

Classe V E

La V E è una classe formata da 22 alunni: 11 femmine e 11 maschi di età compresa tra i 18 e i 19 anni e la loro disposizione nell'aula è rappresentata in figura 1.4. Per quanto concerne la loro provenienza, si rileva anche in questo caso che una quota risiede in paesi limitrofi alla città.
La classe è molto unita, solidale e non presenta particolari sottogruppi. Si nota un particolare affiatamento probabilmente per il fatto che ci sono cinque anni di convivenza scolastica alle spalle; l'entusiasmo per la gita dell'ultimo anno e "il problema" dell'esame di stato che devono affrontare insieme.
Per quanto riguarda il rapporto con l'insegnante, sembra molto positivo per tutti, sia perchè ormai c'è un consolidamento delle metodologie didattiche da lei adottate, sia perchè facendo con la stessa professoressa sia matematica che fisica, trascorrono ben 8 ore settimanali

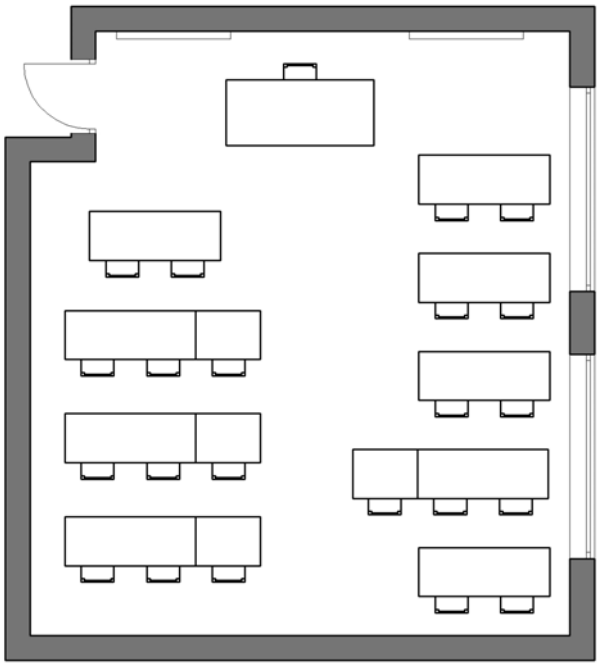


Figura 1.8: Disposizione Classe V E

insieme per cui si è instaurato un rapporto personale che va a volte anche oltre gli aspetti strettamente inerenti alle discipline stesse.

Capitolo 2

I Laboratori

I Laboratori di didattica della matematica e di didattica della Fisica sono stati svolti secondo modalità diverse, secondo le indicazioni del docente del corso. In ogni caso sono stati particolarmente significativi in quanto ci hanno proposto e mostrato diverse modalità con cui potrà svolgersi l'attività didattica che andremo ad intraprendere. In particolare, durante alcuni corsi di Laboratorio di didattica sono stati realizzati dei lavori di gruppo su alcuni argomenti assegnatici dal docente.
In questo capitolo riporto la parte dei lavori da me realizzati all'interno del corso di Laboratorio di Didattica della Matematica 2 e di Laboratorio di Didattica della Matematica 4 e due lezioni di Fisica inerenti ai corsi di Didattica della Fisica 1 e 2.

2.1 Traslazione e Simmetria assiale

In questo paragrafo sono riportate due lezioni relative ad un lavoro realizzato durante il corso di Laboratorio di didattica della Matematica 2, tenuto dalla Prof.ssa Marino.

2.1.1 Elementi di programmazione didattica

Le due lezioni riportate di seguito si inseriscono nel **MODULO** sulle Isometrie, rivolto ad un secondo anno di Liceo scientifico PNI.
Il Modulo prevede i seguenti **PREREQUISITI**:

- Riferimento cartesiano,
- Vettori,

- Congruenza,
- Conoscere e saper operare con l'ambiente di programmazione MatCos.

e si propone di raggiungere i seguenti **OBIETTIVI**:

- Sviluppare e potenziare le capacita logiche di deduzione e induzione;
- Riconoscere le diverse isometrie;
- Riconoscere la presenza di trasformazioni geometriche in oggetti concreti;
- Saper scrivere le equazioni di una trasformazione geometrica;
- Saper elaborare la composizione di trasformazioni geometriche.

Modalità di realizzazione

Sul piano metodologico l'argomento verrà proposto partendo da esempi tratti dalla realtà e da altre discipline, privilegiando un approccio induttivo con la formulazione di congetture, verificate in seguito con una trattazione rigorosa e formale. L'unità didattica presenta le isometrie secondo un'impostazione sperimentale, utilizzando l'ambiente Matcos per estrapolare definizioni e proprietà. L'allievo è condotto a comprendere lo spirito della geometria attraverso un'indagine su figure e immagini proposte dal docente. In una seconda fase, l'allievo è stimolato a svolgere ricerche personali con lo scopo di individuare la presenza di trasformazioni geometriche in oggetti concreti che fanno parte della sua esperienza quotidiana o delle sue conoscenze pregresse. L'unità didattica è composta da lezioni in aula e in laboratorio.

Struttura delle lezioni

Di seguito sono riportate le prime due lezioni del modulo presentato. Esse sono strutturate nel modo seguente:

Prima lezione (2 ore):

- Introduzione alle trasformazioni geometriche e loro presenza nelle diverse forme d'arte, nella natura, ect.;
- Esplorazione guidata, in ambiente MatCos, sulle definizioni di traslazione e simmetria assiale e loro proprietà.

Seconda lezione (2 ore):

- Definizioni formali di Traslazione e simmetria assiale;
- Trattazione in coordinate delle suddette trasformazioni.

2.1.2 Prima lezione

In questa prima lezione ci proponiamo l'obiettivo di presentare la traslazione e la simmetria assiale come primi esempi di trasformazioni geometriche piane.
Per suscitare la curiosità e l'interesse negli alunni inizieremo la lezione presentando alcuni esempi visivi e musicali tratti dall'esperienza comune e dall'arte in cui sono presenti tali trasformazioni. La lezione proseguirà coinvolgendo direttamente gli alunni nella "costruzione" delle definizioni e delle proprietà di queste trasformazioni piane. Sono proposte attività manuali con materiale povero (da svolgere come esercizio per casa) e attività virtuali in ambiente MatCos.
In tutta la matematica, ma soprattutto in questo settore, sarebbe riduttivo limitare l'apprendimento alla semplice memorizzazione della nomenclatura tradizionale e delle formule. E' invece opportuno che la costruzione di un quadro organico dei concetti geometrici scaturisca da un atteggiamento di ricerca e di osservazione della realtà per individuare le caratteristiche geometriche degli oggetti e i cambiamenti che questi possono subire nello spazio e nel tempo.
Dopo aver osservato alcune immagini (figure 2.1 e 2.2) e ascoltato un breve brano ben noto (Fra' Martino) si chiede agli alunni di trovare gli eventuali elementi comuni presenti negli esempi proposti.

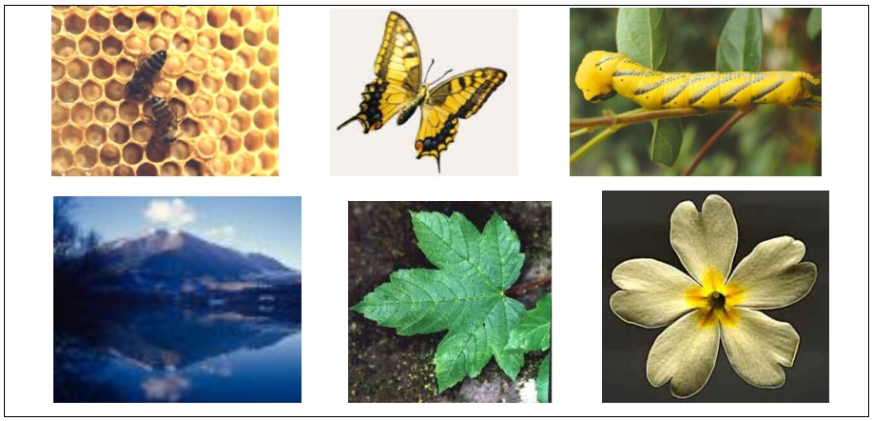


Figura 2.1: Alcuni esempi tratti dalla natura

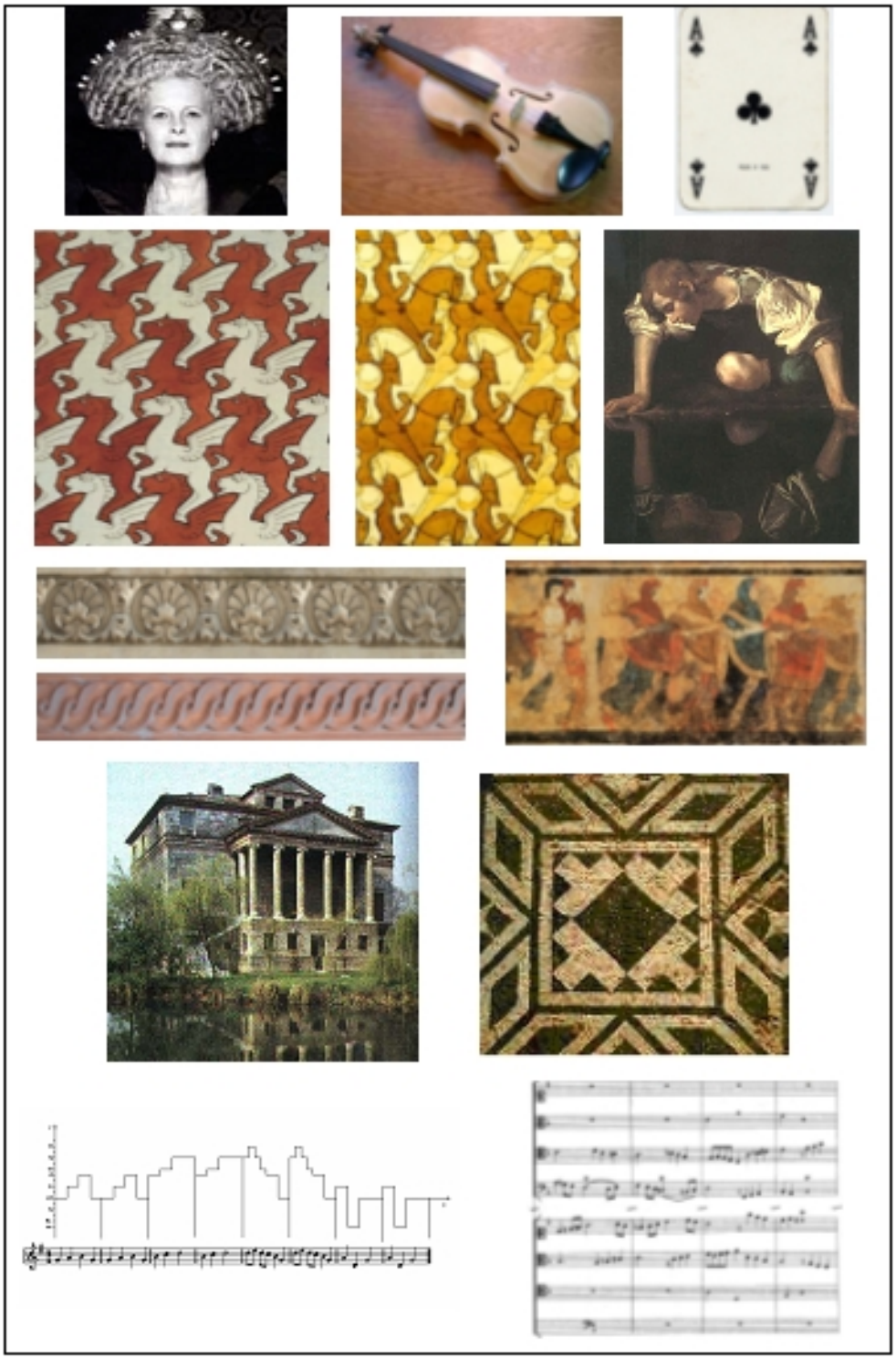


Figura 2.2: Alcuni esempi tratti dall'arte e dall'esperienza comune

Regolarità, armonia, equilibrio, ... sono tutti elementi che caratterizzano le immagini appena viste. In alcune immagini ci sono elementi che si ripetono nello spazio o nel tempo, in altre, invece, si riconoscono immagini che sono l'una speculare dell'altra. Si tratta di "trasformazioni" che hanno un nome e una definizione ben precisa: si tratta di **Traslazioni** e **Simmetrie Assiali**.

La Natura presenta molte regolarità basate sulla simmetria e la comprensione di queste regolarità ha rappresentato un mezzo fondamentale per l'avanzamento della Scienza ed il raggiungimento delle conoscenze attuali. Inoltre l'Uomo sembra favorire istintivamente la regolarità ed il ripetersi periodico delle forme, come ha dimostrato nel secolare sviluppo delle sue espressioni artistiche.

La simmetria bilaterale è particolarmente frequente in Natura, si pensi a molti animali e all'uomo stesso, il cui corpo è diviso in due da un piano di riflessione, e a molti fiori e foglie che rispettano tale simmetria. Esiste, inoltre una simmetria traslazionale in moltissimi esseri viventi in cui un segmento del corpo viene ripetuto in modo periodico e regolare lungo una retta, come nel corpo dei centopiedi o di quel bruco visto prima, o ancora nella struttura modulare del favo delle api.

La simmetria è presente anche nel tempo e non solo nello spazio. Nel tempo la ripetizione ad intervalli uguali costituisce il principio musicale del ritmo. Sempre in campo musicale, va osservato come il principio di ripetitività simmetrica di un motivo sia alla base di molte composizioni di autori particolarmente rigorosi nella costruzione delle loro opere come Johan Sebastian Bach.

Nel mondo dell'arte la ripetitività simmetrica di elementi costituisce un modello seguito fin dalle prime manifestazioni artistiche: si trovano esempi con simmetria di traslazione pura, altri con simmetria di riflessione pura, ed altri ancora con la composizione di simmetria di traslazione e riflessione.

Cerchiamo ora insieme di analizzare più in dettaglio alcune delle immagini viste e di estrarre una definizione precisa di traslazione e simmetria assiale. Analizziamo ora in dettaglio gli esempi riportati in figura 2.3. Pur essendo di natura completamente diversa, queste immagini hanno un elemento comune: la simmetria traslazionale.

In cosa consiste questa trasformazione?

Cerchiamo di formulare una definizione rigorosa e proviamo a ricostruire alcune di queste immagini nell'ambiente di programmazione Matcos.

A questo punto non è più sufficiente dire soltanto che un certo oggetto si ripete periodicamente, ma vanno individuati gli elementi necessari per fare una traslazione e va data una

Figura 2.3: Alcuni esempi tratti dalla natura e dall'arte

procedura chiara per costruire il Traslato di un oggetto.
In questo ci aiuta l'ambiente di programmazione Matcos che include proprio il comando ***Trasla***, il quale richiede due informazioni:

- l'oggetto da traslare
- un vettore, che darà informazioni sulla direzione e sul verso in cui spostare l'oggetto e sull'entità di tale spostamento (modulo).

Indaghiamo allora questa trasformazione, mediante un percorso guidato con l'ausilio di Matcos.

2.1.3 Scheda "alla scoperta" della Traslazione

- Costruisci un triangolo ABC e traslalo di un vettore **v**. Cosa si ottiene?
- Posto A1= traslato di A, B1= traslato di B e C1= traslato di C, costruisci i vettori **AA1**, **BB1**, **CC1**. Come risultano tra loro?
- Misurali, cosa noti?
- Misura il modulo del vettore **v**. Cosa noti?

I passi appena descritti possono essere ricostruiti in MatCos, mediante il seguente programma:

```
Rifcart;
ColorePenna(0,0,255);
A=Punto; B=Punto; C=punto;
oggetto=Poligono(A,B,C);
vett=segmento_or(Punto,Punto);
trasla(oggetto,vett);
A1=trasla(A,vett); B1=trasla(B,vett); C1=Trasla(C,vett); Pausa(1000);
SegmentoAA1=Distanza(A,A1);
SegmentoBB1=Distanza (B,B1);
SegmentoCC1=Distanza (C,C1);
Stampa("Le misure dei segmenti AA1, BB1, CC1 sono rispettivamente: ");
Stampa(SegmentoAA1); Stampa(SegmentoBB1); Stampa(SegmentoCC1);
ModuloVett=distanza(Vett.Estremo(1),Vett.Estremo(2));
Stampa("Il modulo del vettore di traslazione è: ");
Stampa(ModuloVett);
```

dalla cui esecuzione si ottiene l'immagine riportata in figura 2.4.

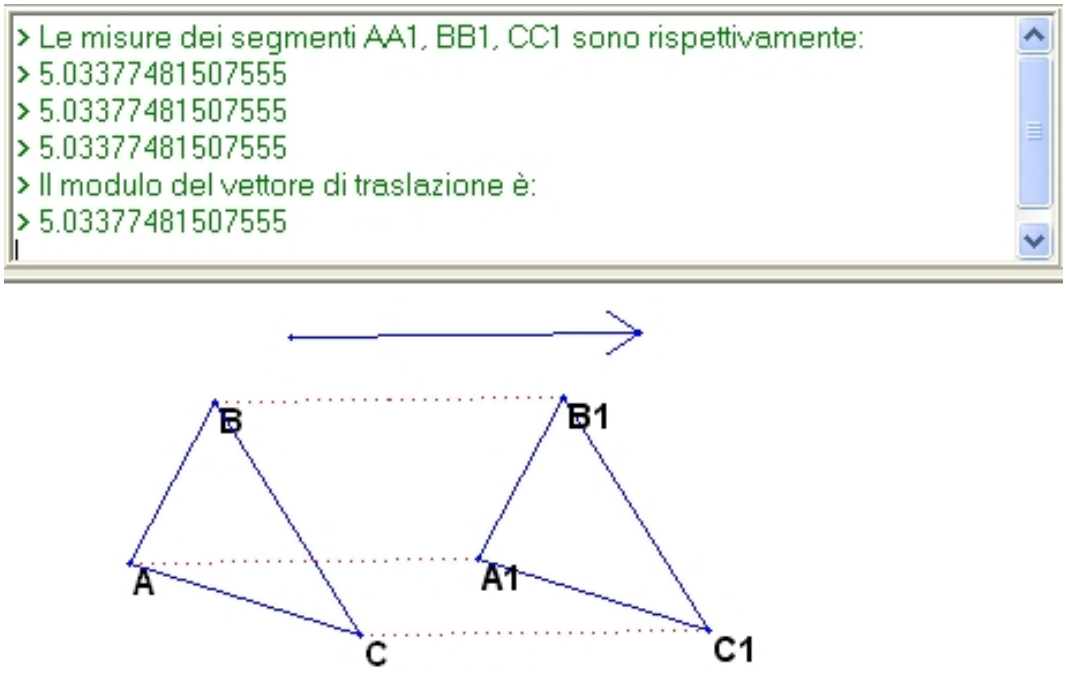


Figura 2.4: Scheda alla scoperta della Traslazione 1

Possiamo quindi iniziare a formulare la seguente definizione:
La traslazione è una trasformazione che fa corrispondere al triangolo ABC il triangolo A1B1C1; essa è immaginabile come uno spostamento rettilineo di ogni punto; tale spostamento avviene lungo rette tra loro parallele che hanno la stessa direzione, lo stesso verso dato dal vettore v e le distanze tra ogni punto e il suo corrispondente sono tutte uguali al modulo del vettore stesso.

Considera i triangoli ABC e A1B1C1:

- Misura i lati corrispondenti. Come risultano tra loro?
- Misura l'ampiezza degli angoli. Come risultano tra loro?
- Si conserva il verso di lettura dei vertici dei triangoli?

I passi appena descritti possono essere ricostruiti in MatCos, mediante il seguente programma:

```
Rifcart;
ColorePenna(0,0,255);
A=Punto; B=Punto; C=punto;
oggetto=Poligono(A,B,C); vett=segmento_or(Punto,Punto);
trasla(oggetto,vett);
A1=trasla(A,vett); B1=trasla(B,vett); C1=Trasla(C,vett);
Pausa(1000);
SegmentoAB=Distanza(A,B);
SegmentoBC=Distanza (B,C);
SegmentoAC=Distanza (A,C);
SegmentoA1B1=Distanza(A1,B1);
SegmentoB1C1=Distanza (B1,C1);
SegmentoA1C1=Distanza (A1,C1);
Stampa("Le misure dei segmenti AB, BC, AC sono rispettivamente: ");
Stampa(SegmentoAB); Stampa(SegmentoBC); Stampa(SegmentoAC);
Stampa("Le misure dei segmenti A1B1, B1C1, A1C1 sono rispettivamente: ");
Stampa(SegmentoA1B1); Stampa(SegmentoB1C1); Stampa(SegmentoA1C1);
Beta=Angolo(C,B,A); Alfa=Angolo(B,A,C); Gamma=Angolo(A,C,B);
Beta1=Angolo(C1,B1,A1); Alfa1=Angolo(B1,A1,C1); Gamma1=Angolo(A1,C1,B1);
```

```
alf=Ampiezza(alfa); bet=ampiezza(beta); gam=ampiezza(gamma);
alf1=Ampiezza(alfa1); bet1=ampiezza(beta1); gam1=ampiezza(gamma1);
Stampa("Le ampiezze degli angoli sono: ");
Stampa("Alfa: ",Alf); Stampa("Beta: ",Bet); Stampa("Gamma: ",Gam);
Stampa("Alfa1: ",Alf1); Stampa("Beta1: ",Bet1); Stampa("Gamma1: ",Gam1);
```

dalla cui esecuzione si ottiene la figura 2.5.

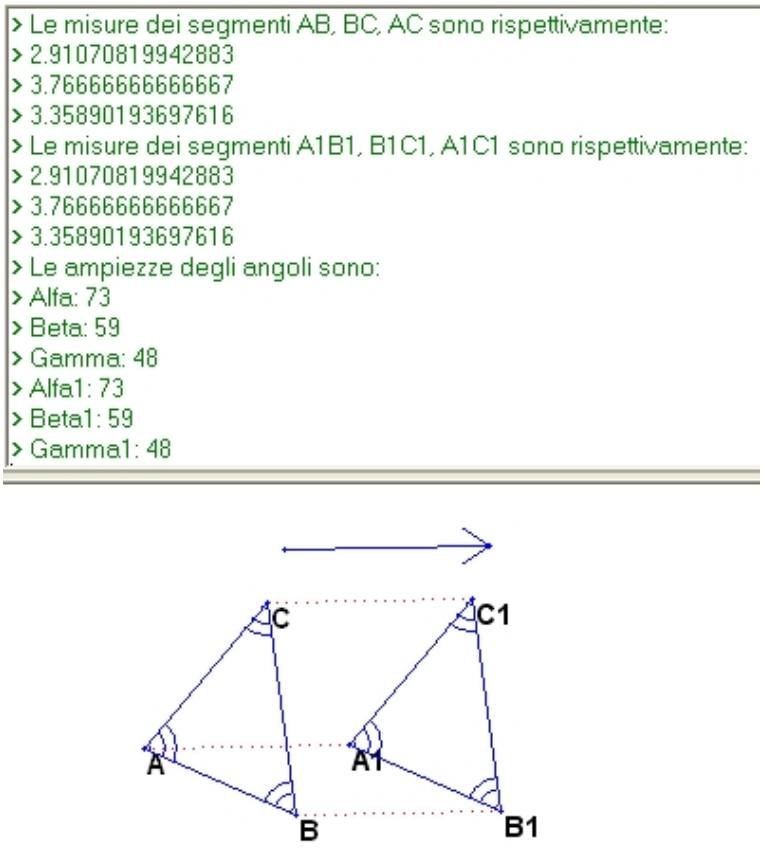


Figura 2.5: Scheda alla scoperta della Traslazione 2

Considera ora una retta r e traccia la sua trasformata, mediante una traslazione:

- L'immagine ottenuta traslando la retta r è una...
- Considera ora anche una retta s parallela ad r e traccia le due rette traslate. Come risultano tra loro $r1$ e $s1$?
- Nelle traslazioni appena fatte, ci sono stati dei punti del piano che coincidevano con

i loro trasformati (Punti uniti)? Riesci ad immaginare una traslazione in cui ci siano punti uniti?.

Anche questi passi possono essere eseguiti in MatCos con il seguente programma, da cui si ottiene l'immagine riportata in figura 2.6.

```
Rifcart;
ColorePenna(0,0,255);
A=Punto;
B=Punto;
R=Retta(A,B);
vett=segmento_or(Punto,Punto);
ColorePenna(128,0,0);
trasla(R,vett);
ColorePenna(0,0,255);
S=parallela(r,punto);
ColorePenna(128,0,0);
Pausa(1000);
Trasla(S,vett);
```

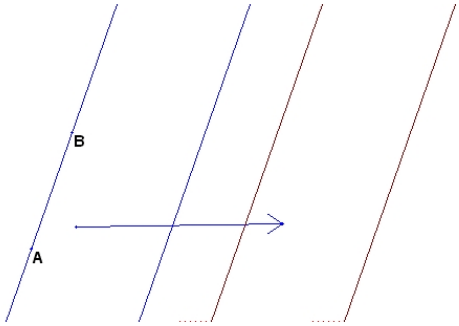


Figura 2.6: Scheda alla scoperta della Traslazione 3

Dalle osservazioni appena fatte, si possono estrarre alcune proprietà della traslazione. Si osserva infatti che ci sono delle caratteristiche che rimangono invariate e vengono appunto dette invarianti della traslazione:

1. la lunghezza dei segmenti (si dice che la traslazione è una isometria);
2. l'ampiezza degli angoli;
3. l'orientamento dei punti del piano;
4. l'allineamento dei punti (la traslazione manda rette in rette);
5. il parallelismo.

Si può inoltre osservare che nessun punto del piano corrisponde a se stesso in una traslazione che non si riduca all'identità, cioè ad una traslazione di vettore nullo. Si può quindi affermare che la traslazione non ha punti uniti.

ESERCIZI

1. Ricercare oggetti che presentino la traslazione di alcuni elementi e provare a ricostruirne un modello in MatCos.

2. Costruire in Matcos un fregio.

3. Costruire in Matcos la struttura modulare del favo delle api.

Esempio di fregio

Un esempio di fregio, come quello mostrato in figura 2.7 si può realizzare con il seguente programma Matcos:

```
ColorePenna(255,255,255);
RIFCART; ColorePenna(0,0,255);
A=punto;
B=Punto;
C=Punto;
D=Punto; ColorePenna(255,255,255);
vet=segmento_or(PUNTO(-1,0),PUNTO(-1,1)); ColorePenna(192,192,192);
A1=Trasla(A,vet);
B1=Trasla(B,vet);
C1=Trasla(C,vet);
D1=Trasla(D,vet); ColoreRiempimento(255,234,151);
POL=POLIGONO(A,B,C,D,D1,C1,B1,A1);
ColoreRiempimento(255,234,151); ColorePenna(255,255,255);
VET1=segmento_or(A,pUNTO(C.x,A.y)); ColorePenna(192,192,192);
p=trasla(POL,VET1);
per (i da 1 a 10) esegui;
ee=trasla(p,VET1); p=ee;
fine;
```

Eseguendo il programma e tracciando una linea spezzata (indicando quattro punti che individuano una "S") si ottiene ad esempio una schermata come quella mostrata in figura 2.8

Figura 2.7: Esempio di fregio

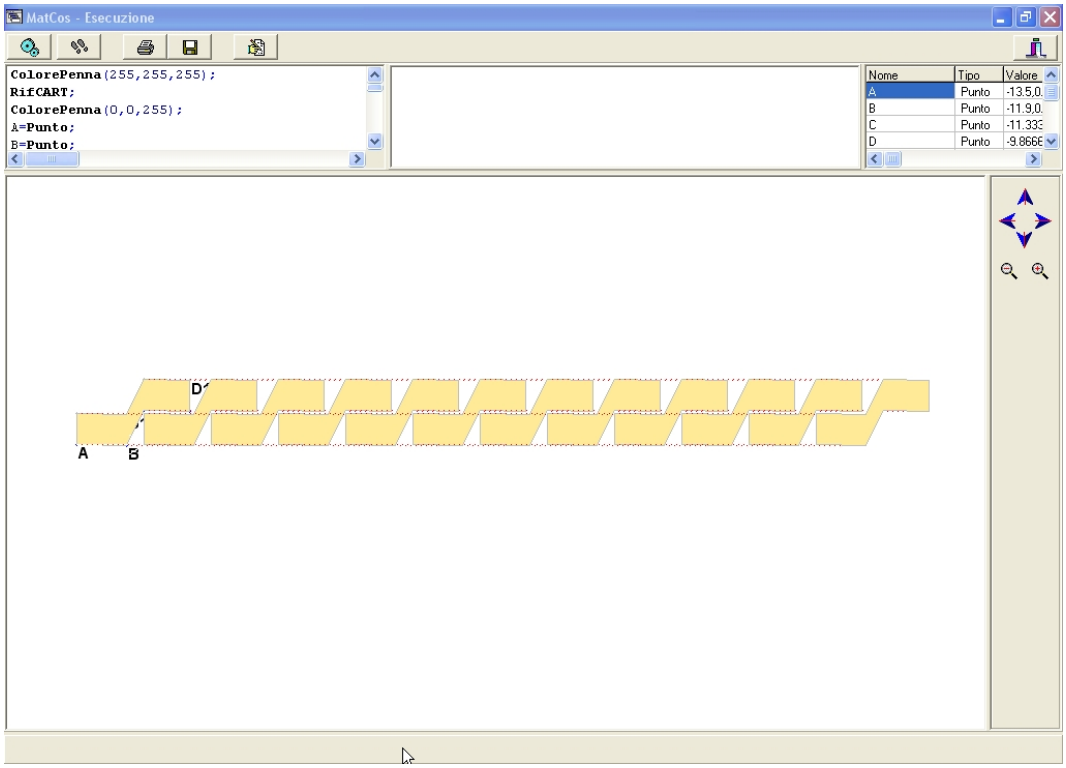


Figura 2.8: Esempio di fregio realizzato in MatCos

Favo delle Api

Utilizzando due traslazioni, ripetute più volte, si riesce a ricostruire in MatCos la struttura del favo delle api (figura 2.9) con il seguente programma:

```
ColorePenna(255,255,255);
RIFCART;
ColorePenna(0,0,255);
L=Legginum("Inserisci la misura del lato dell'esagono:  ");
L2=L/2;
h=L2*1.732;
h2=L*1.732;
A=Punto(0,0); B=Punto(L,0); C=Punto((L+L2),h);
D=Punto(L,h2); F=Punto(0,h2); G=Punto(-L2,h);
ColorePenna(128,128,0); ColoreRiempimento(242,237,13);
POL=POLIGONO(A,B,C,D,F,G); ColorePenna(255,0,0);
vet1=segmento_or(F,A); ColorePenna(128,128,0); Pausa(500);
pol2=Trasla(POL,vet1); Pausa(500);
pol3=Trasla(pol2,vet1); Pausa(500);
pol4=Trasla(pol3,vet1); Pausa(500);
pol5=Trasla(pol4,vet1); Pausa(500);
pol6=Trasla(pol5,vet1);
Per (i da 1 a 6) esegui; ColorePenna(255,0,0);
vet2=segmento_or(A,C); ColorePenna(128,128,0);
ColoreRiempimento(242,237,13); Pausa(500);
POL=Trasla(POL,vet2); Pausa(500);
pol2=Trasla(pol2,vet2); Pausa(500);
pol3=Trasla(pol3,vet2); Pausa(500);
pol4=Trasla(pol4,vet2); Pausa(500);
pol5=Trasla(pol5,vet2); Pausa(500);
pol6=Trasla(pol6,vet2);
fine;
```

Dalla cui esecuzione si vede (grazie alle pause inserite nel programma) come si ottiene l'immagine mostrata in figura 2.10.

Figura 2.9: Struttura del favo delle api

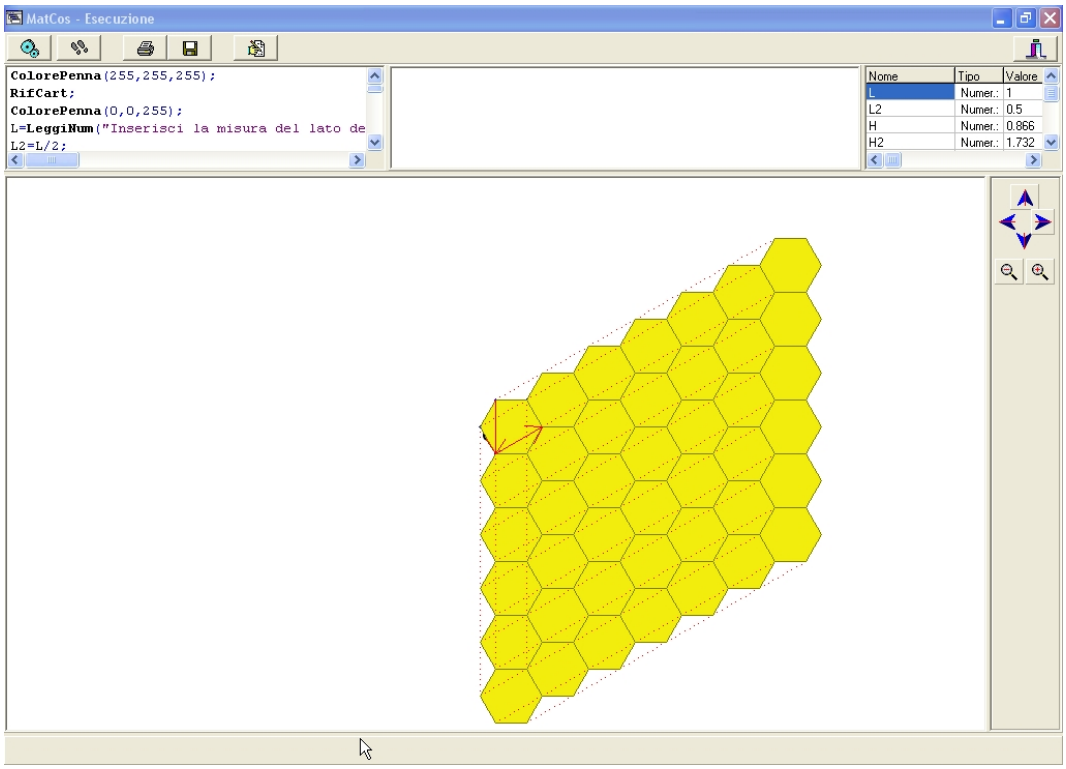


Figura 2.10: Struttura del favo delle api realizzato in MatCos

2.1.4 La Simmetria assiale

Analizziamo ora in dettaglio gli esempi in figura 2.11:

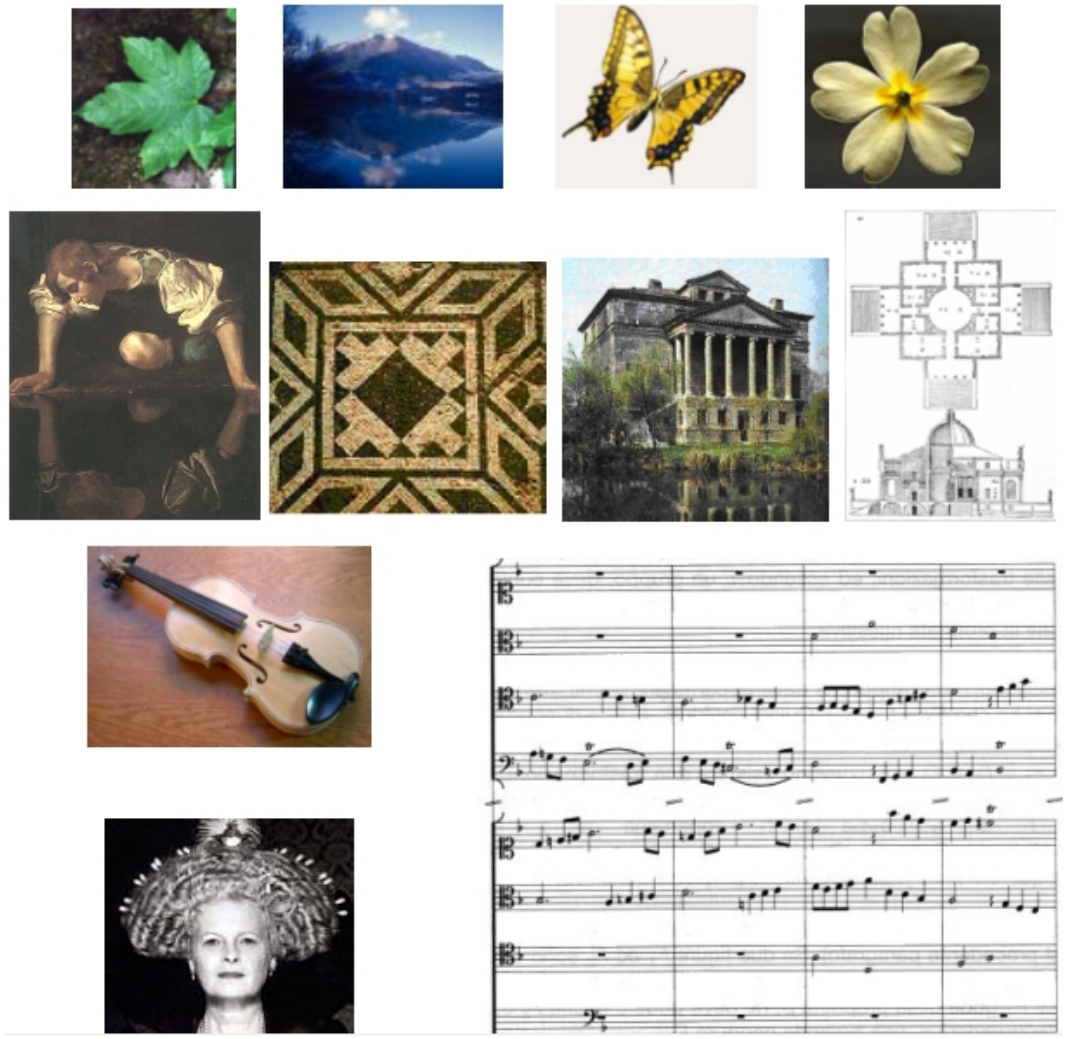


Figura 2.11: Alcuni esempi tratti dall'arte e dalla natura.

Anche in questo caso, le immagini sono di natura diversa, ma hanno un elemento che le accomuna: la simmetria assiale. Analizziamo più in dettaglio questa trasformazione e cerchiamo poi di ricostruire alcune di queste immagini con Matcos.

A questo punto bisogna individuare gli elementi necessari per fare una simmetria assiale e "scoprire" le proprietà che la caratterizzano.

Matcos include il comando *Simmetria_ass* che "fa proprio al caso nostro". Esso richiede due informazioni:

- l'oggetto di cui si vuole costruire il simmetrico
- una retta, che sarà proprio l'asse di simmetria.

2.1.5 Scheda "alla scoperta" della Simmetria Assiale

- Costruisci un triangolo ABC e traccia una retta r. Disegna ora il simmetrico del triangolo ABC rispetto alla retta r. Cosa si ottiene?
- Posto A1= simmetrico di A, B1= simmetrico di B e C1= simmetrico di C, costruisci i segmenti AA1, BB1, CC1. Come risultano rispetto alla retta r?
- Poni H l'intersezione tra AA1 e r; K l'intersezione tra BB1 e r; L, l'intersezione tra CC1 e r.
- Misura le lunghezze dei segmenti AH e HA1, BK e KB1, CL e LC1. Cosa noti?

La realizzazione di questi passi guidati si può effettuare in MatCos mediante il seguente programma:

```
ColorePenna(255,255,255);
Rifcart; ColorePenna(0,0,255);
A=Punto; B=Punto; C=punto;
oggetto=Poligono(A,B,C);
r=retta(Punto,Punto);
Simmetria_ass(oggetto,r);
A1=Simmetria_ass(A,r); B1=Simmetria_ass(B,r); C1=Simmetria_ass(C,r);
Pausa(1000); ColorePenna(255,0,0); StilePenna(5);
AA1=retta(A,A1); BB1=retta(B,B1); CC1=retta(C,C1);
H=Intersezione(r,AA1); K=Intersezione(r,BB1); L=Intersezione(r,CC1);
SegmentoAH=Distanza(A,H);
SegmentoHA1=Distanza (A1,H);
SegmentoBK=Distanza(B,K);
SegmentoKB1=Distanza (K,B1);
SegmentoCL=Distanza(C,L);
SegmentoLC1=Distanza (L,C1);
Stampa("AH=", SegmentoAH); Stampa("HA1=", SegmentoHA1);
Stampa("BK=", SegmentoBK); Stampa("KB1=", SegmentoKB1);
Stampa("CL=", SegmentoCL); Stampa("LC1=", SegmentoLC1);
```

L'esecuzione del programma porta poi ad un'immagine come quella riportata in figura 2.12

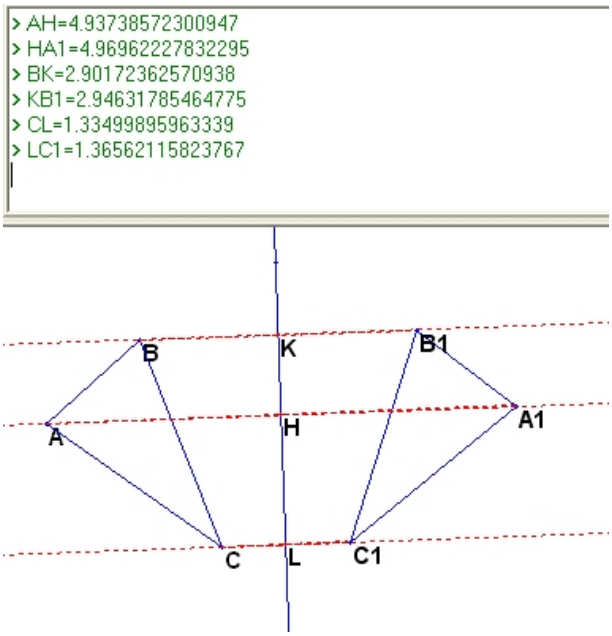


Figura 2.12: Scheda alla scoperta della Simmetria 1

Possiamo quindi iniziare a formulare la seguente definizione:
La simmetria assiale è una trasformazione che fa corrispondere al triangolo ABC il triangolo A1B1C1, immagine speculare di ABC. I punti A1, B1 e C1 sono determinati in modo tale che la retta r risulti asse di simmetria dei segmenti AA1, BB1, CC1.
Considera i triangoli ABC e A1B1C1:

- Misura i lati corrispondenti. Come risultano tra loro?
- Si conserva il verso di lettura dei vertici dei triangoli?

Anche questi passi possono essere realizzati in MatCos dal programma:

```
ColorePenna(255,255,255);
Rifcart; ColorePenna(0,0,255);
A=Punto; B=Punto; C=punto;
oggetto=Poligono(A,B,C);
r=retta(Punto,Punto);
Simmetria_ass(oggetto,r);
A1=Simmetria_ass(A,r); B1=Simmetria_ass(B,r); C1=Simmetria_ass(C,r);
```

```
SegmentoAB=Distanza(A,B); SegmentoBC=Distanza (B,C);
SegmentoAC=Distanza (A,C); SegmentoA1B1=Distanza(A1,B1);
SegmentoB1C1=Distanza (B1,C1); SegmentoA1C1=Distanza (A1,C1);
Stampa("Le misure dei segmenti AB, BC, AC sono rispettivamente: ");
Stampa(SegmentoAB); Stampa(SegmentoBC); Stampa(SegmentoAC);
Stampa("Le misure dei segmenti A1B1, B1C1, A1C1 sono rispettivamente: ");
Stampa(SegmentoA1B1); Stampa(SegmentoB1C1); Stampa(SegmentoA1C1);
```

Dalla sua esecuzione si ottiene la figura 2.13.

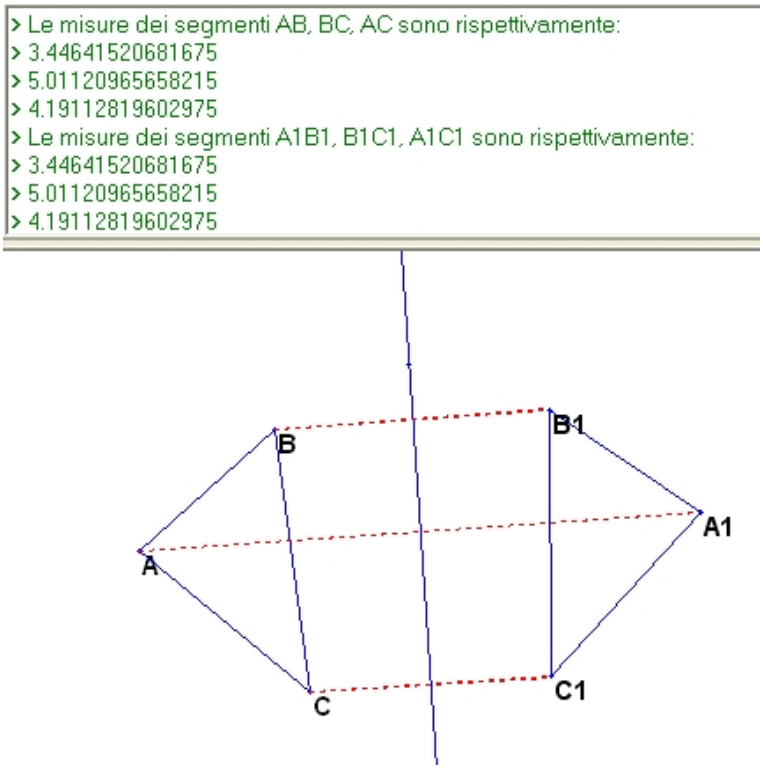


Figura 2.13: Scheda alla scoperta della Simmetria 2

Considera ora una retta r e traccia la sua trasformata, mediante una simmetria assiale:

- L'immagine ottenuta è una...
- Considera ora anche una retta s parallela ad r e traccia le due rette ad esse simmetriche. Come risultano tra loro r1 e s1?

Dall'esecuzione del programma:

```
ColorePenna(255,255,255);
Rifcart; ColorePenna(0,0,255);
A=Punto; B=Punto;
R=Retta(A,B);
AB=segmento(A,B);
asse=retta(Punto,Punto); ColorePenna(128,0,0);
A1=Simmetria_ass(A,asse); B1=Simmetria_ass(B,asse);
Simmetria_ass(AB,asse);
retta(A1,B1); ColorePenna(0,0,255);
C=punto;
S=parallela(r,C);
D=PuntoACaso_su(s); ColorePenna(128,0,0); Pausa(1000);
C1=Simmetria_ass(C,asse);
D1=Simmetria_ass(D,asse); ColorePenna(128,0,0);
CD=segmento(C,D); ColorePenna(0,0,255);
Simmetria_ass(CD,asse);
S1=retta(C1,D1);
```

si ottiene la figura 2.14.

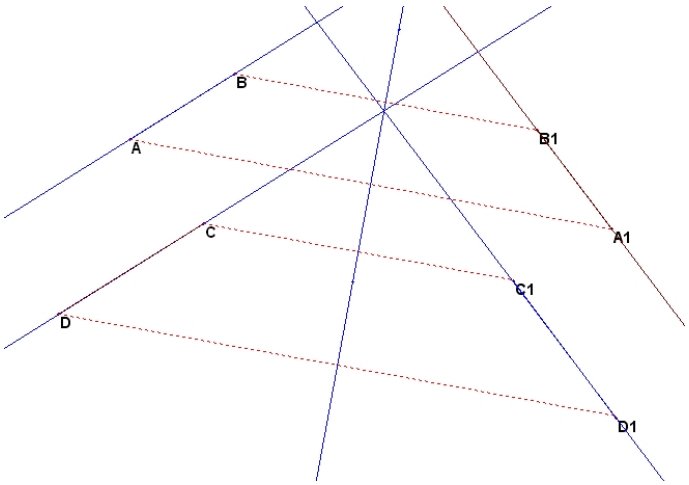


Figura 2.14: Scheda alla scoperta della Simmetria 3

- Considera un segmento AB e traccia il suo simmetrico rispetto ad una retta r nei seguenti tre casi:
  1. A e B stanno dalla stessa parte rispetto alla retta r,
  2. A appartiene alla retta r e B è un punto esterno,
  3. A e B stanno nelle due parti opposte.

In quali dei tre casi ci sono stati dei punti del piano che coincidevano con i loro trasformati (Punti uniti)? Riesci a ipotizzare, in generale quali sono i punti uniti in una simmetria assiale?

I passi appena descritti si possono realizzare in MatCos con il seguente programma:

```
ColorePenna(255,255,255);
Rifcart;
ColorePenna(0,0,255);
A=Punto;
B=Punto;
AB=segmento(A,B);
asse=retta(Punto,Punto);
ColorePenna(128,0,0);
A1=Simmetria_ass(A,asse);
B1=Simmetria_ass(B,asse);
Simmetria_ass(AB,asse);
ColorePenna(0,0,255);
A=punto_su(asse);
B=punto;
AB=segmento(A,B);
A1=Simmetria_ass(A,asse);
B1=Simmetria_ass(B,asse);
Simmetria_ass(AB,asse);
ColorePenna(0,0,255);
A=Punto;
B=Punto;
AB=segmento(A,B);
ColorePenna(128,0,0);
A1=Simmetria_ass(A,asse);
B1=Simmetria_ass(B,asse);
Simmetria_ass(AB,asse);
```

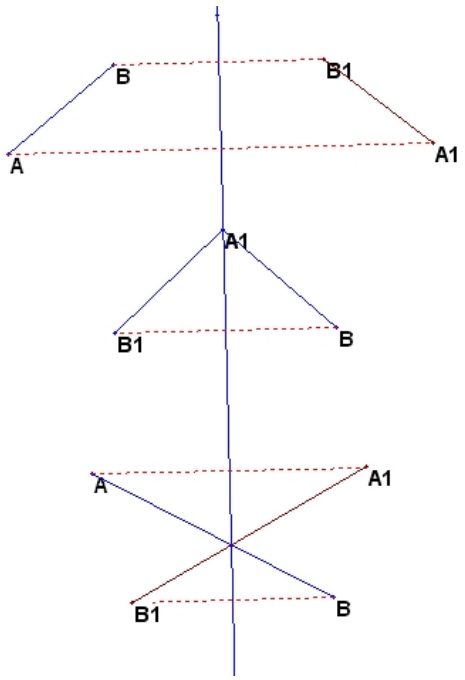


Figura 2.15: Scheda alla scoperta della Simmetria 4

Eseguendo il programma si ottiene la figura 2.15. Dalle osservazioni appena fatte, si possono estrarre alcune considerazioni.

In una simmetria assiale sono invarianti:

1. la lunghezza dei segmenti (la simmetria assiale è una isometria);
2. l'allineamento dei punti (la simmetria assiale manda rette in rette);

3. il parallelismo.

   Si può inoltre osservare che:

4. I punti sull'asse di simmetria sono punti uniti;

5. Non si conserva l'orientamento dei punti del piano.

ESERCIZI

Utilizzando le due trasformazioni appena studiate...

1. Ricercare oggetti che presentino alcune simmetrie assiali e provare a ricostruirne un modello in MatCos.

2. Individuare gli assi di simmetria dei seguenti poligoni:

   - triangolo scaleno, isoscele ed, equilatero,
   - trapezio isoscele e rettangolo,
   - un rombo, un rettangolo e un quadrato.

3. Realizzare con materiale povero e/o con Matcos "una catena di omini" come quella mostrata in figura 2.16).

Figura 2.16: "Una catena di omini" perfettamente simmetrici

4. Costruire una foglia simile a quella mostrata in figura 2.17:

Figura 2.17: Foglia di acero

5. Costruire un mosaico simile a quello mostrato nella figura 2.18.

Figura 2.18: Esempio di Mosaico

Mosaico

Una ricostruzione del mosaico simile a quello in figura 2.18 si ottiene dal programma MatCos:

```
ColorePenna(255,255,255); Rifcart;
L=legginum("Inserisci il lato del quadrato base: ");
ColorePenna(128,128,0); ColoreRiempimento(73,71,44);
ogg1=Poligono(Punto(0,0),punto(L,0),punto(L,L),Punto(0,L));
A=punto(0,500); B=punto(0,100);
r=Retta(A,B); ColoreRiempimento(160,146,95); Pausa(1000);
ogg2=Poligono(Punto((3/4*L),0),punto(L,(1/4*L)),punto(3/4*L,1/2*L),Punto(L,3/4*L),
Punto(3/4*L,L),Punto(1/2*L,3/4*L),Punto(1/4*L,L),Punto(0,3/4*L));
ColorePenna(128,128,0); ColoreRiempimento(160,146,95); Pausa(1000);
ogg3=Poligono(Punto(L,0),Punto(7/4*L,3/4*L),Punto(7/4*L,7/4*L),Punto(L,L));
ColoreRiempimento(73,71,44); Pausa(1000);
ogg4=Poligono(Punto(L+1/4*L,1/2*L),Punto(3/2*L,3/4*L),Punto(3/2*L,5/4*L),
Punto(5/4*L,L)); Pausa(1000);
bis=retta(Punto(50,50),Punto(200,200)); ColoreRiempimento(160,146,95); Pausa(1000);
ogg3b=simmetria_ass(ogg3,bis); ColoreRiempimento(73,71,44); Pausa(1000);
ogg4b=Simmetria_ass(ogg4,bis); Pausa(1000);
ogg5=Poligono(Punto(L,0),Punto(7/4*L,0),Punto(7/4*L,3/4*L)); Pausa(1000);
ogg5b=Simmetria_ass(ogg5,bis); Pausa(1000); ColoreRiempimento(73,71,44);
ogg1r=Simmetria_ass(ogg1,r); Pausa(1000); ColoreRiempimento(160,146,95);
ogg2r=Simmetria_ass(ogg2,r); Pausa(1000);
ogg3r=Simmetria_ass(ogg3,r); Pausa(1000); ColoreRiempimento(73,71,44);
ogg4r=Simmetria_ass(ogg4,r); Pausa(1000); ColoreRiempimento(160,146,95);
ogg3br=Simmetria_ass(ogg3b,r); Pausa(1000); ColoreRiempimento(73,71,44);
```

```
ogg4br=Simmetria_ass(ogg4b,r); Pausa(1000);
ogg5r=Simmetria_ass(ogg5,r); Pausa(1000);
ogg5br=simmetria_ass(ogg5b,r);
r2=retta(Punto(100,0),Punto(500,0)); Pausa(700);
Simmetria_ass(ogg1,r2); ColoreRiempimento(160,146,95); Pausa(700);
Simmetria_ass(ogg2,r2); Pausa(700);
Simmetria_ass(ogg3,r2); Pausa(700);
Simmetria_ass(ogg3b,r2); ColoreRiempimento(73,71,44); Pausa(700);
Simmetria_ass(ogg4,r2); Pausa(700); Simmetria_ass(ogg4b,r2); Pausa(700);
Simmetria_ass(ogg5,r2); Pausa(700); Simmetria_ass(ogg5b,r2);
Simmetria_ass(ogg5br,r2); Pausa(700);
Simmetria_ass(ogg1r,r2); Pausa(700); ColoreRiempimento(160,146,95);
Simmetria_ass(ogg2r,r2); Pausa(700); Simmetria_ass(ogg3r,r2); Pausa(700);
Simmetria_ass(ogg3br,r2); Pausa(700); ColoreRiempimento(73,71,44);
Simmetria_ass(ogg4r,r2); Pausa(700); Simmetria_ass(ogg4br,r2); Pausa(700);
Simmetria_ass(ogg5r,r2);
```

Eseguendo il programma "passo passo" si costruisce prima un piccolo pezzo dell'intero mosaico e con una simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante si ottiene l'immagine in figura 2.19. Applicando poi una simmetria assiale rispetto all'asse y si ottiene la figura 2.20. Infine con una simmetria rispetto all'asse delle x si ottiene la ricostruzione completa del mosaico, riportata in figura 2.21.

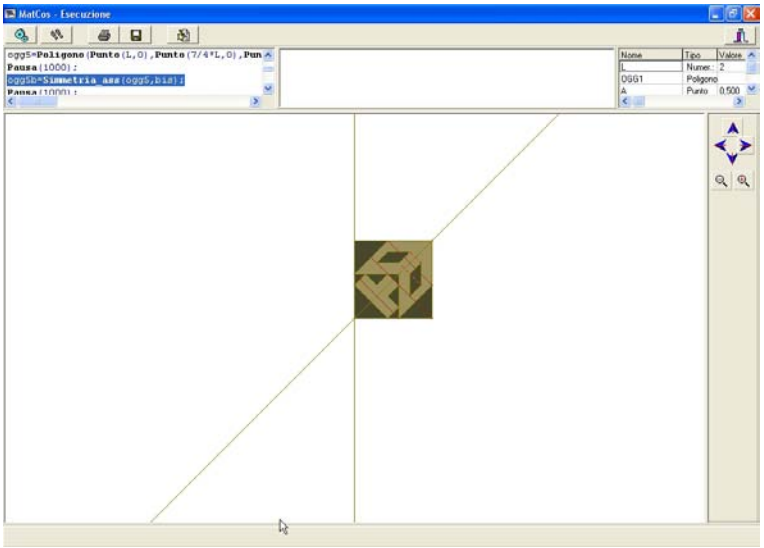


Figura 2.19: Alcuni passi dell'esecuzione del programma MatCos per la ricostruzione di un mosaico

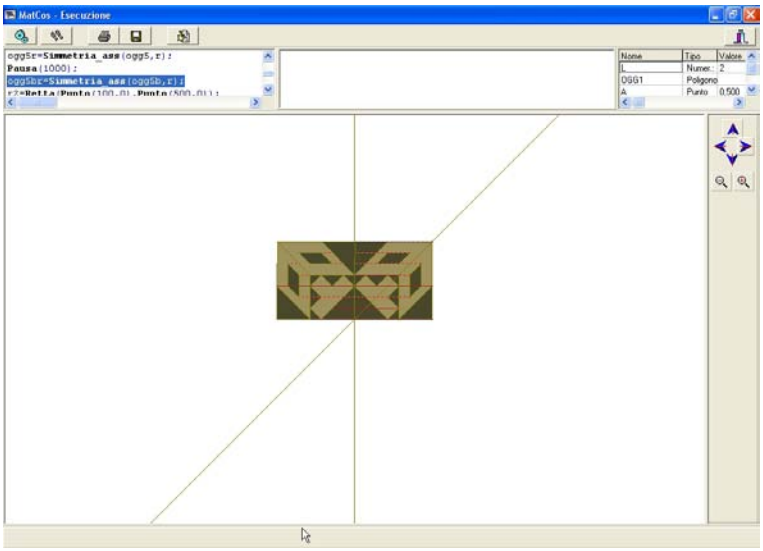


Figura 2.20: Alcuni passi dell'esecuzione del programma MatCos per la ricostruzione di un mosaico

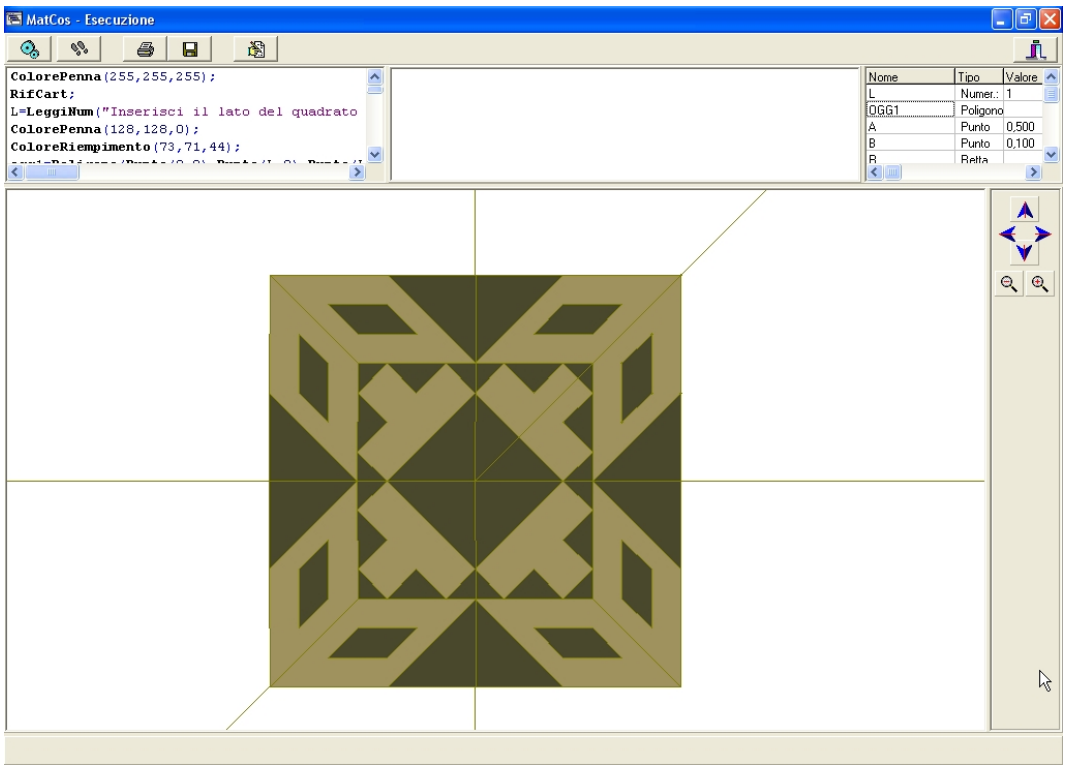


Figura 2.21: Mosaico ottenuto in MatCos

2.1.6 Alcune curiosità

Nel fabbricare oggetti per suo uso l'uomo ha seguito uno schema similare. Basta guardarsi attorno per restare colpiti dal numero di cose che rimangono essenzialmente invariate rispetto ad uno specchio verticale: sedie, tavoli, lampade, piatti, automobili, aerei, costruzioni,...
Siamo tanto abituati alla simmetria verticale e tanto poco a vedere le cose rovesciate, che ci riesce estremamente difficile immaginare come apparirebbero, se invertiti, la maggior parte di scene, quadri o oggetti. L'incapacità della mente ad immaginare gli oggetti capovolti è componente essenziale della sorpresa prodotta da quegli ingegnosi disegni che si trasformano quando vengono sottoposti ad una simmetria rispetto ad un asse orizzontale.
Gli umoristi politici del diciannovesimo secolo si compiacevano molto di questi giochetti. Rovesciando il disegno di un famoso personaggio politico il lettore vedeva un maiale o un mulo o qualcosa di ugualmente offensivo.
Due esempi sono dati dalle immagini riportate in figura 2.22

Figura 2.22: Immagini che si "trasformano" quando vengono sottoposte ad una simmetria con asse orizzontale.

Il nostro viso non è perfettamente simmetrico

Consideriamo il volto già osservato precedentemente e scomponiamolo in due parti: la metà sinistra e quella destra.

Ricostruiamo un volto usando due metà sinistre e un altro utilizzando due metà destre. Otteniamo così i due volti, formati da due parti identiche, di seguito riportati:

Il risultato è veramente interessante... Si può osservare, quindi che le parti che compongono il viso sono sicuramente simmetriche, ma i vari particolari hanno tante piccole asimmetrie che conferiscono al volto espressione e vitalità

2.1.7 Seconda lezione

Una trasformazione geometrica, in generale, trasforma punti del piano in punti del piano. Se π è il piano, con $T : \pi \longrightarrow \pi$ indichiamo una trasformazione del piano in sè, e se $P \in \pi$, $T(P) = P'$ è il corrispondente di P mediante T.
Un punto che in una trasformazione ha come corrispondente se stesso è detto *punto unito* rispetto a quella trasformazione.
Possiamo immaginare di tracciare un sistema di riferimento su un foglio trasparente sovrapposto al piano e che la trasformazione modifichi il piano, inclusi i punti appartenenti agli assi, ma non agisca sul foglio trasparente. Se quindi pensiamo di riferire le coordinate di ogni punto al "vecchio" sistema di riferimento, possiamo considerare:

- la coppia ordinata di coordinate (x,y) del punto P, prima della trasformazione;
- la coppia ordinata di coordiante (x',y') del suo corrispondente, dopo la trasformazione (sempre rispetto allo stesso sistema di riferimento).

Per indagare sulla relazione esistente tra (x,y) e (x',y') nella traslazione e nella simmetria assiale ci aiutiamo con il software Matcos.

2.1.8 La Traslazione come trasformazione del piano in sè

Definizione 2.1.1 *Fissiamo nel piano un vettore $\overrightarrow{v}$ di modulo v. Una traslazione di vettore $\overrightarrow{v}$ è quella trasformazione del piano in sé che fa corrispondere ad un generico punto P del piano un punto P' tale che $d(P,P') = v$, la retta PP' sia parallela alla retta su cui giace il vettore $\overrightarrow{v}$ e l'orientamento del segmento PP' è concorde a quello del vettore $\overrightarrow{v}$.*

Cerchiamo ora di indagare le relazioni che intercorrono tra le coordinate di un punto $P = (x,y)$ e quelle del suo traslato $P' = (x',y')$. Utilizzando un ciclo tracciamo 50 punti a caso e i 50 punti ad essi corrispondenti, mediante la traslazione di vettore $\overrightarrow{v} = (2,3)$. Stampiamo le coordinate di tutti questi punti.

1. Quale relazione c'è tra x e x'?
2. Quale relazione c'è tra y e y'?

Osserviamo che ogni punto ha come immagine un altro punto le cui coordinate sono legate a quelle del punto prima della trasformazione e alle componenti del vettore $\overrightarrow{v}$. In particolare vale la seguente relazione:

$$\begin{cases} x' &= x+2 \\ y' &= y+3 \end{cases} \tag{2.1}$$

Possiamo quindi congetturare che per una generica traslazione di vettore $\overrightarrow{v} = (a,b)$ si avranno le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} x' &= x+a \\ y' &= y+b \end{cases} \tag{2.2}$$

Esse sono infatti le equazioni della traslazione di vettore $\overrightarrow{v}$.

Dimostrazione

Consideriamo un punto generico $P(x,y)$ e il vettore $\overrightarrow{v} = (a,b)$. Chiamiamo $P'(x',y')$ il traslato di P mediante il vettore $\overrightarrow{v}$. Costruiamo i triangoli rettangoli OHV e PLP' (figura 2.23). Essi hanno:

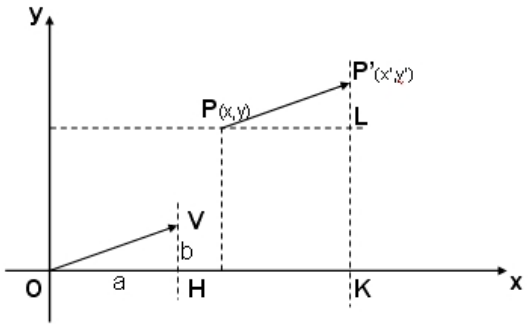


Figura 2.23: Dimostrazione equazioni della Traslazione

- Gli angoli $\widehat{P'PL}$ e $\widehat{VOH}$ uguali perché angoli corrispondenti formati da coppie di rette parallele tagliate da una trasversale.
- $PP' = OV$ per costruzione.

Dunque i due triangoli sono congruenti ed in particolare avranno:

$$PL = OH = a \quad e \quad P'L = VH = b$$

Si può quindi concludere che

$$\begin{cases} x' &= x + a \\ y' &= y + b \end{cases} \tag{2.3}$$

ed abbiamo così ottenuto le equazioni della traslazione.

2.1.9 La Simmetria Assiale come trasformazione del piano in sè

Definizione 2.1.2 *Fissiamo nel piano una retta r. Una simmetria assiale rispetto alla retta r è quella trasformazione del piano in sé che fa corrispondere ad un generico punto P del piano un punto P' tale che la retta r sia l'asse del segmento PP'. La retta r viene anche detta asse di simmetria.*

Cerchiamo ora di conoscere le relazioni che intercorrono tra le coordinate di un punto $P = (x,y)$ e quelle del suo simmetrico $P' = (x',y')$.

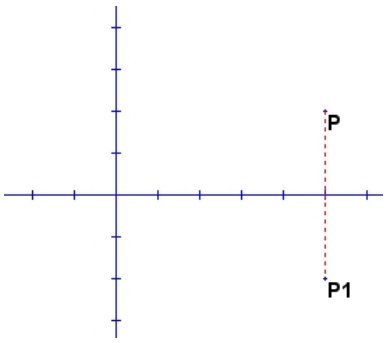
In questo caso bisogna specificare l'asse rispetto al quale si effettua la simmetria. Le relazioni tra le coordinate, infatti, dipendono dalla scelta di tale asse e non sempre sono banali, per cui ci limitiamo

a considerare solo alcuni casi particolari.

Procedendo in modo analogo a come si è fatto per la traslazione si possono ricavare le seguenti relazioni (si possono proporre le dimostrazioni come esercizi per casa):

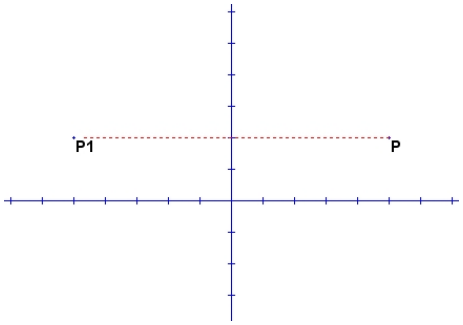
Simmetria rispetto all'asse x:

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= -y \end{cases} \tag{2.4}$$



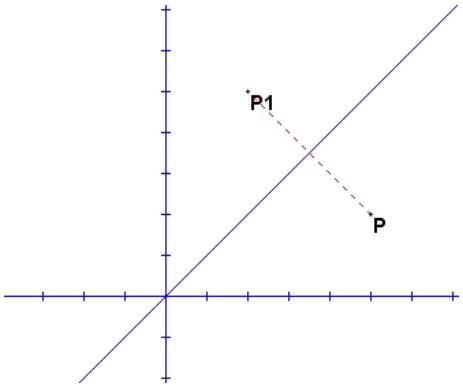
Simmetria rispetto all'asse y:

$$\begin{cases} x' &= -x \\ y' &= y \end{cases} \tag{2.5}$$



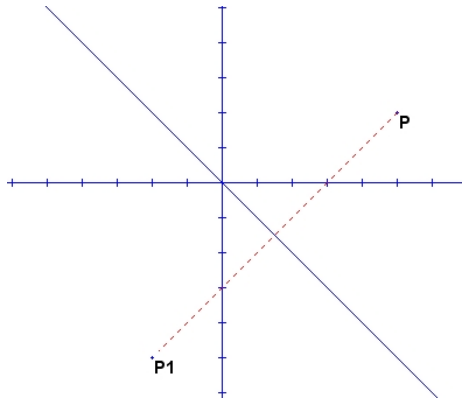
Simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante:

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= x \end{cases} \tag{2.6}$$



Simmetria rispetto alla bisettrice del secondo e quarto quadrante:

$$\begin{cases} x' &= -y \\ y' &= -x \end{cases} \qquad (2.7)$$



2.1.10 La Simmetria Assiale è una isometria

Abbiamo verificato con Matcos che le lunghezze dei segmenti venivano "conservati" sia dalla traslazione che dalla simmetria assiale. Abbiamo quindi congetturato che queste trasformazioni fossero isometrie. Diamo ora una dimostrazione rigorosa e formale di tale congettura. In particolare ci limiteremo a dimostrare solo che la simmetria assiale è una isometria. Essa, infatti, come si vedrà nelle prossime lezioni, è l'isometria fondamentale, in quanto tutte le altre isometrie si ottengono componendo opportunamente più simmetrie assiali. Mostriamo quindi che la simmetria assiale conserva la lunghezza dei segmenti.

Per dimostrare tale proprietà prendiamo due punti qualunque del piano, A e B, e consideriamo i loro simmetrici rispetto ad una retta qualunque s; dimostriamo che i segmenti AB e $A1B1$ hanno la stessa lunghezza. I due punti A e B possono stare dalla stessa parte rispetto all'asse di simmetria s oppure da parti opposte. Per semplicità, limitiamoci al primo caso. (Il secondo caso si può dare come esercizio guidato, per casa).

1. Se i due punti A e B stanno su una retta parallela all'asse s, anche i simmetrici $A1$ e $B1$ appartengono ad una retta parallela ad s. Mediante il programma MatCos riportato di seguito è stata realizzata la figura 2.24 che rappresenta la situazione presa in considerazione.

   Poiché i segmenti $AA1$ e $BB1$ sono, per definizione di simmetria, entrambi perpendicolari all'asse di simmetria, lo sono anche ai segmenti AB e $A1B1$ (se una retta è perpendicolare a un'altra, lo è anche ad ogni altra parallela).

   Il quadrilatero $ABB1A1$ è quindi un rettangolo e dunque AB ha la stessa lunghezza di $A1B1$.

```
ColorePenna(255,255,255);
Rifcart;
ColorePenna(0,0,255);
A=punto;
B=Punto;
ColorePenna(0,255,255);
r=retta(A,B);
ColorePenna(255,0,0);
S=parallela(r, punto);
ColorePenna(0,0,255);
AB=segmento(A,B);
A1=Simmetria_ass(A,S);
B1=Simmetria_ass(B,S);
A1B1=segmento(A1,B1);
```

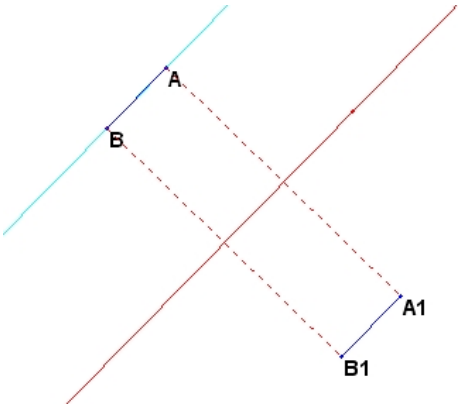


Figura 2.24: Primo caso della dimostrazione

2. Se i punti A e B non stanno su una retta parallela all'asse s, le loro rispettive distanze dall'asse sono diverse. Disegniamo i loro simmetrici $A1$ e $B1$; indichiamo rispettivamente con M e N le intersezioni di $AA1$ e $BB1$ con l'asse s. Dal punto più vicino all'asse s, tracciamo la retta r ad esso parallela; la simmetrica t di questa retta passa per $B1$, per definizione di simmetria, ed è anch'essa parallela a s, per la transitività del parallelismo. Indichiamo rispettivamente con C e $C1$ i punti di intersezione di r e t con il segmento $AA1$ e consideriamo i triangoli ABC e $A1B1C1$, l'uno simmetrico dell'altro.
   La costruzione appena descritta può essere realizzata in MatCos con il seguente programma:

```
ColorePenna(255,255,255); Rifcart; ColorePenna(0,0,255);
A=punto; B=Punto; ColorePenna(0,255,255);
r=retta(A,B); ColorePenna(255,0,0);
S=retta(Punto, punto); ColorePenna(0,0,255);
AB=segmento(A,B); A1=Simmetria_ass(A,S); B1=Simmetria_ass(B,S);
A1B1=segmento(A1,B1); SpessorePenna(2); ColorePenna(0,255,255);
t=parallela(s,B1); r=parallela(s,B); p=Perpendicolare(s,A);
C=intersezione(p,r); C1=intersezione(p,t); ColorePenna(255,255,255);
BB1=retta(B,B1); ColorePenna(0,255,255); segmento(B,B1);
M=intersezione(p,s); N=intersezione(BB1,s); ColorePenna(0,0,255);
ABC=poligono(A,B,C); A1B1C1=Poligono(A1,B1,C1);
```

   Dalla sua esecuzione si ottiene la figura 2.25.

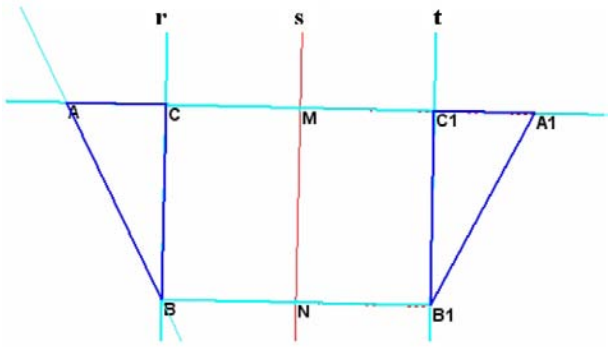


Figura 2.25: Secondo caso della dimostrazione

Si ha che:

- $B1N$ e BN hanno la stessa lunghezza (per costruzione);
- $A1M$ e AM hanno la stessa lunghezza (per costruzione);
- $C1M$ e CM hanno la stessa lunghezza (per costruzione);
- $A1C1$, differenza di $A1M$ e $C1M$, ha la stessa lunghezza di AC, differenza di AM e CM;
- $B1C1$ ha la stessa lunghezza di BC (perché è il simmetrico di un segmento parallelo all'asse di simmetria);
- I segmenti $B1C1$ e BC sono entrambi paralleli all'asse; sono quindi, perpendicolari ad $AA1$. I triangoli ABC e $A1B1C1$ sono perciò triangoli rettangoli;
- Nei due triangoli rettangoli il cateto $B1C1$ ha la stessa lunghezza del cateto BC; il cateto $A1C1$ ha la stessa lunghezza del cateto AC. Per il teorema di Pitagora, anche le ipotenuse AB e $A1B1$ hanno la stessa lunghezza.

Abbiamo così dedotto che un qualsiasi segmento AB e il suo simmetrico $A1B1$ (rispetto ad una retta qualsiasi) hanno la stessa lunghezza: la simmetria assiale è una isometria.

2.2 Metodi iterativi per la risoluzione approssimata di equazioni

In questo paragrafo è riportata l'impostazione di un'unità didattica sui metodi di risoluzione approssimata di equazioni, in particolare metodi iterativi. É inoltre presentata in dettaglio una delle tre lezioni previste dall'unità didattica esaminata. Questo lavoro è stato presentato come Seminario all'interno del corso di Laboratorio di didattica della Matematica 4, tenuto del Prof. Costabile.

Introduzione

In questo lavoro è trattato un argomento di notevole rilevanza in molte applicazioni: la risoluzione delle equazioni. Sono molti, infatti, i casi in cui in contesti concreti ci si trova di fronte al problema di risolvere un'equazione per determinare una certa quantità. Non sempre, però, i metodi analitici ci consentono di giungere ad una soluzione esatta, sempre trascurando gli eventuali errori di arrotondamento. É per questo che risultano di notevole interesse quei metodi numerici che ci permettono di ottenere sempre una soluzione approssimata del problema, con un'indicazione sulla precisione del risultato.
In particolare in questo lavoro è presentata l'unità didattica relativa ai metodi iterativi. Sono introdotti questi metodi, è presentato il Metodo di Newton ed è mostrato un confronto con un altro metodo di risoluzione approssimata: il metodo di bisezione, che si considera già noto agli studenti.

2.2.1 Elementi di programmazione didattica

L'UNITÁ DIDATTICA dal titolo "metodi iterativi", che ci accingiamo a presentare, si inserisce all'interno del MODULO relativo alla risoluzione approssimata di equazioni.
Essa prevede tre lezioni, ciascuna della durata di 2 ore e si propone ad un V anno del liceo scientifico.

Prerequisiti

- Funzioni elementari,
- Successioni e Limiti,
- Continuità e Derivabilità,
- Rette tangenti,
- Algoritmi,
- Ambiente di programmazione MatCos,
- Concetto di risoluzione approssimata di equazioni,
- Metodo di bisezione.

Obiettivi

- Apprendere una seconda tecnica di risoluzione approssimata di equazioni.
- Uso di un software didattico per implementare e comprendere al meglio tali procedure.
- Individuare le peculiarità di ciascun metodo studiato e conoscerne le differenze.

Strumenti

- Lavagna,
- Calcolatrice scientifica,
- Software didattico (MatCos)

Metodologia

- Suscitare curiosità ed interesse per l'argomento proposto, mediante esempi legati a problemi concreti e giochi matematici.
- Utilizzare il calcolatore non solo come strumento per la risoluzione di problemi, ma anche come parte integrante per la realizzazione del processo di apprendimento.
- Guidare lo studente a formulare delle ipotesi risolutive per alcuni particolari problemi.

Struttura dell'unità didattica

L'unità didattica di cui tratteremo è stata suddivisa in tre lezioni, ciascuna della durata di 2 ore:

1. Metodi iterativi.
2. Metodo di Newton-Raphson o metodo delle tangenti
3. Confronto con il metodo di bisezione

Nella prima lezione verrà proposto un gioco per introdurre il concetto di metodo iterativo e dall'analisi del gioco si passerà alla formalizzazione di tale metodo. Successivamente verrano presentati diversi esempi di applicazione, in contesti diversi (ingegneria, biologia, genetica, elettronica,...) di questo metodo di risoluzione approssimata di equazioni e analizzando ciascun esempio si metteranno in luce le caratteristiche del metodo in esame. Infine verrà svolto un quesito proposto per gli esami di stato del 2006 che si presta bene sia come occasione per applicare il gioco proposto all'inizio della lezione, sia come "ponte" verso la lezione successiva che riguarda un particolare metodo iterativo: il metodo di Newton.
La seconda lezione infatti tratterà in dettaglio il metodo di Newton o metodo delle tangenti. Dopo aver tracciato le linee guida del metodo, verrà implementato un programma in MatCos che consentirà di risolvere diversi esercizi in modo automatico e cogliere quindi il reale "funzionamento" del

metodo.
La terza lezione infine si occuperà di effettuare un confronto con l'altro metodo di risoluzione approssimata studiato: il metodo di bisezione. Verranno proposti diversi esempi concreti in cui, dall'applicazione dei metodi in esame, emergeranno le loro differenze e analogie.

2.2.2 Prima lezione: Metodi Iterativi

2.2.3 Un gioco

Iniziamo la lezione con un "gioco"...
Proponiamo agli studenti di eseguire con una calcolatrice scientifica il seguente procedimento per diversi dati iniziali:

- Scrivi un qualunque numero tra 0.1 e 0.9.
- Premi il tasto "$\sqrt{}$" 20 volte
- Arrotonda alla IV cifra decimale
- Cosa si può concludere?

Eseguiamo ora lo stesso "gioco" posizionando la calcolatrice in radianti e premendo 30 volte il tasto "cos".
Cosa si può concludere?
I ragazzi, verificheranno, probabilmente con stupore, che eseguendo questo "magico" gioco si ottiene, per qualsiasi scelta del dato iniziale, lo stesso risultato finale. In particolare per la radice quadrata si ottiene il valore 1.0000, mentre per la funzione coseno il valore 0.7391.

Analisi del gioco

Passiamo quindi ad analizzare il gioco:

- Chiamiamo x_0 il dato iniziale scelto.
- Premendo il tasto con la funzione assegnata si determina un secondo valore $x_1 = f(x_0)$.
- Con la successiva pressione del tasto si ottiene $x_2 = f(x_1)$
- E così via...

Questo procedimento è detto METODO ITERATIVO!

A questo punto si può fare osservare che i due valori ottenuti nel gioco sono le soluzioni rispettivamente dell'equazione $x = \sqrt{x}$ e $x = \cos x$.
In generale risolvere equazioni della forma

$$x = f(x)$$

equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} y &= f(x) \\ y &= x \end{cases} \tag{2.8}$$

la cui interpretazione geometrica coincide con l'intersezione del grafico della funzione $y = f(x)$ con la bisettrice del I e III quadrante $y = x$.

Implementiamo in MatCos la procedura descritta dal gioco e verifichiamo che il valore ottenuto corrisponde proprio alla intersezione rispettivamente di $y = \sqrt{x}$ e di $y = \cos x$ con la bisettrice $y = x$.

```
Rifcart;
x0=legginum("Inserire un numero compreso tra 0.1 e 1");
f=leggifunz;
i=0;
Per (i da 1 a 30) esegui;
y=valutafunz(f,x0); ColorePenna(255,0,0);
punto(x0,y);
stampa(x0);
x0=y;
i=i+1;
fine; pausa(1000); ColorePenna(0,0,255);
graficoFunz(f);
retta(1,0);
```

Eseguendo il programma "passo passo" si ottengono le seguenti immagini:

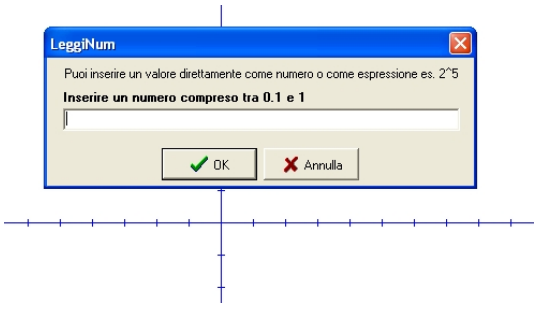


Figura 2.26: Inserimento dato iniziale

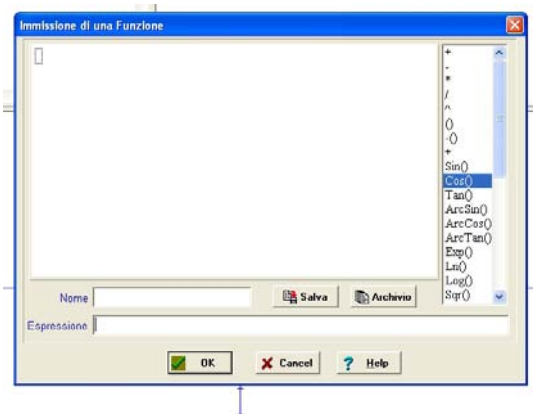


Figura 2.27: Inserimento funzione

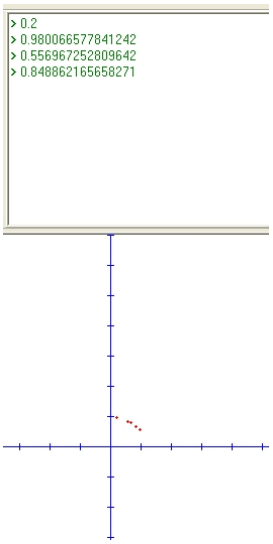


Figura 2.28: Alcune iterazioni

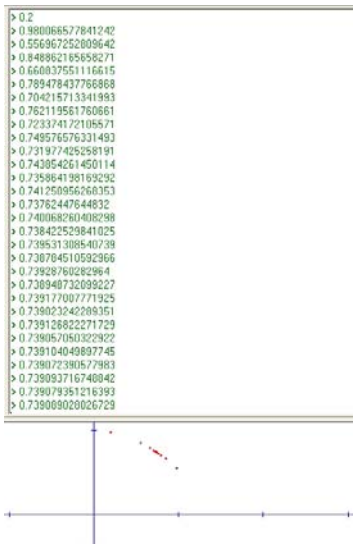


Figura 2.29: Tutte le 30 iterazioni

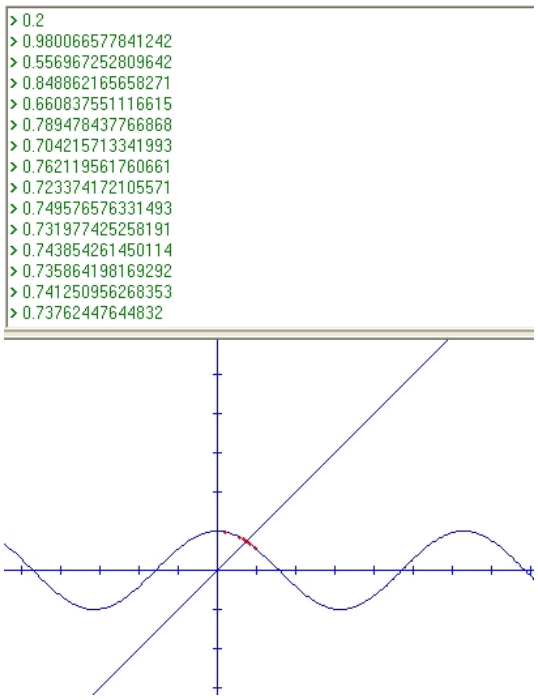


Figura 2.30: Grafico della funzione $y = \cos x$ e $y = x$

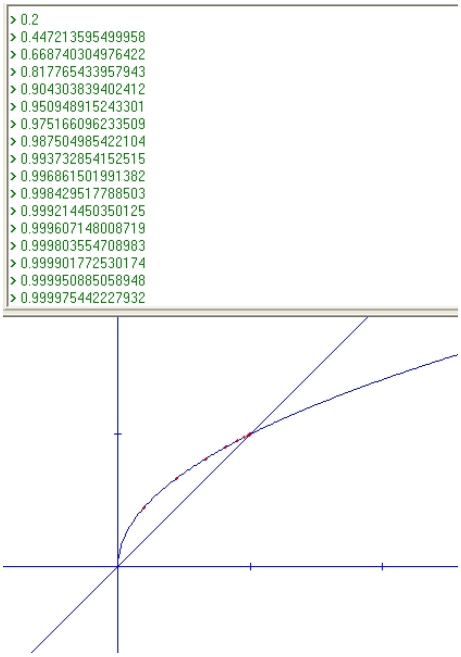


Figura 2.31: Immagine finale ottenuta eseguendo lo stesso programma, scegliendo la funzione $y = \sqrt{x}$.

Per vedere meglio graficamente in che modo il gioco ci conduce verso la soluzione cercata, si possono tracciare alcune rette di costruzione che evidenziamo il meccanismo che sta alla base del metodo iterativo. Per fare questo, basta inserire nel programma precedente alcune righe di comando:

```
Rifcart;
x0=legginum("Inserisci un numero compreso tra 0.1 e 1");
f=Leggifunz; graficoFunz(f);
g=funzione("x"); graficofunz(g); i=0;
per (i da 1 a 7) esegui;
y=valutafunz(f,x0); ColorePenna(255,0,0);
punto(x0,y); Punto(x0,0); StilePenna(1);
segmento(punto(x0,y),Punto(y,y)); StilePenna(5);
segmento(punto(x0,y),Punto(x0,0));
segmento(punto(y,y),Punto(y,valutafunz(f,y)));
x0=y; i=i+1;
fine;
```

Per $x = \cos x$ si ottiene l'immagine riportata in figura 2.32, mentre per $y = \sqrt{x}$ l'immagine riportata in figura 2.33.

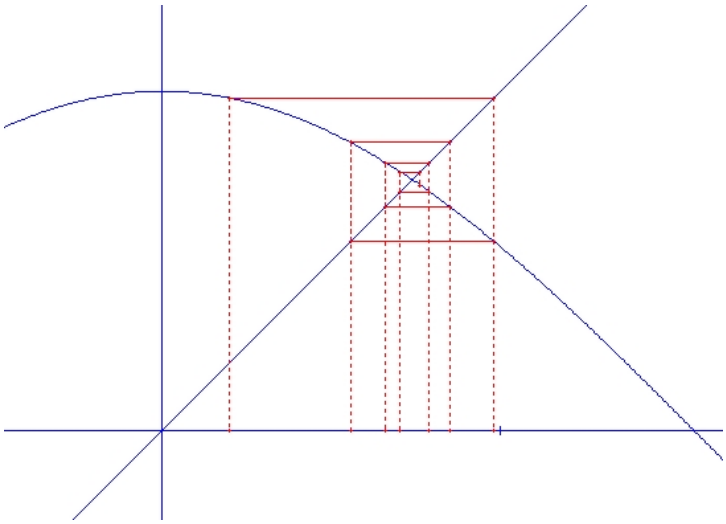


Figura 2.32: Immagine ottenuta eseguendo il gioco con la funzione cos e scegliendo come dato iniziale 0.2

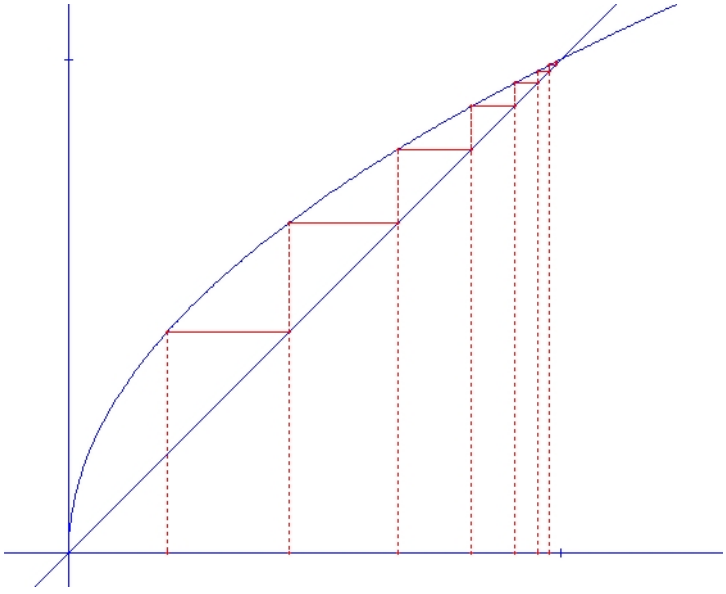


Figura 2.33: Immagine ottenuta eseguendo il gioco con la funzione $\sqrt{}$ e scegliendo come dato iniziale 0.2

Si può immediatamente osservare come nel primo caso l'avvicinamento alla soluzione avviene "costruendo" una spirale, mentre nel secondo caso si giunge alla soluzione mediante una "scaletta".

2.2.4 Formalizzazione

Ci chiediamo ora come "sfruttare" la "proprietà" emersa dal gioco per risolvere problemi concreti, in cui compaiono equazioni "più complicate". É necessario quindi generalizzare la procedura realizzata nel gioco e a questo scopo consideriamo il problema di trovare gli zeri di una funzione $y = f(x)$. Per applicare il metodo iterativo si deve riscrivere l'equazione $f(x) = 0$ nel modo equivalente:

$$x = F(x)$$

Quindi calcolare la successione

$$\begin{cases} x_0 & arbitrario \\ x_{n+1} = F(x_n) & n = 0,1,... \end{cases} \tag{2.9}$$

che sotto opportune ipotesi converge alla radice cercata.
I metodi iterativi sono dunque metodi che consentono di risolvere in modo approssimato un'equazione. Si è già visto,nell'unità didattica precedente, come risultino necessari i metodi numerici finalizzati a questo scopo, soprattutto nelle applicazioni concrete in cui difficilmente ci si imbatte in equazioni che possiedono una formula risolutiva.

2.2.5 Applicazioni

Per evidenziare le potenzialità del metodo iterativo appena descritto consideriamo alcuni esempi tratti da problemi concreti di genetica, ingegneria e biologia in cui emergono equazioni difficilmente risolvibili o non risolvibili analiticamente, ma risolvibili facilmente con il metodo iterativo di risoluzione approssimata.

Studio di un pilastro

Nello studio della posizione dell'asse neutro in un pilastro soggetto a sforzo normale eccentrico si ottiene la seguente equazione:

$$x^3 + 3cx^2 + \frac{6n}{b}[A_1(c+\delta) + A_2(c+h)]x - \frac{6n}{b}[A_1\delta(c+\delta) + A_2h(c+h)] = 0$$

Assegnando ai parametri coinvolti opportuni valori, si ottiene:

$$x^3 - 15x^2 + 624x - 39528 = 0.$$

Tracciando il grafico della funzione si osserva che essa ammette una sola radice reale. Per determinare un'approssimazione di questa radice si può applicare il metodo iterativo.
Innanzitutto bisogna scrivere l'equazione nella forma equivalente:

$$x = \sqrt[3]{15x^2 - 624x + 39528}$$

e inserendo questa espressione nel programma MatCos presentato precedentemente si ottiene l'approssimazione richiesta (figura 2.34).

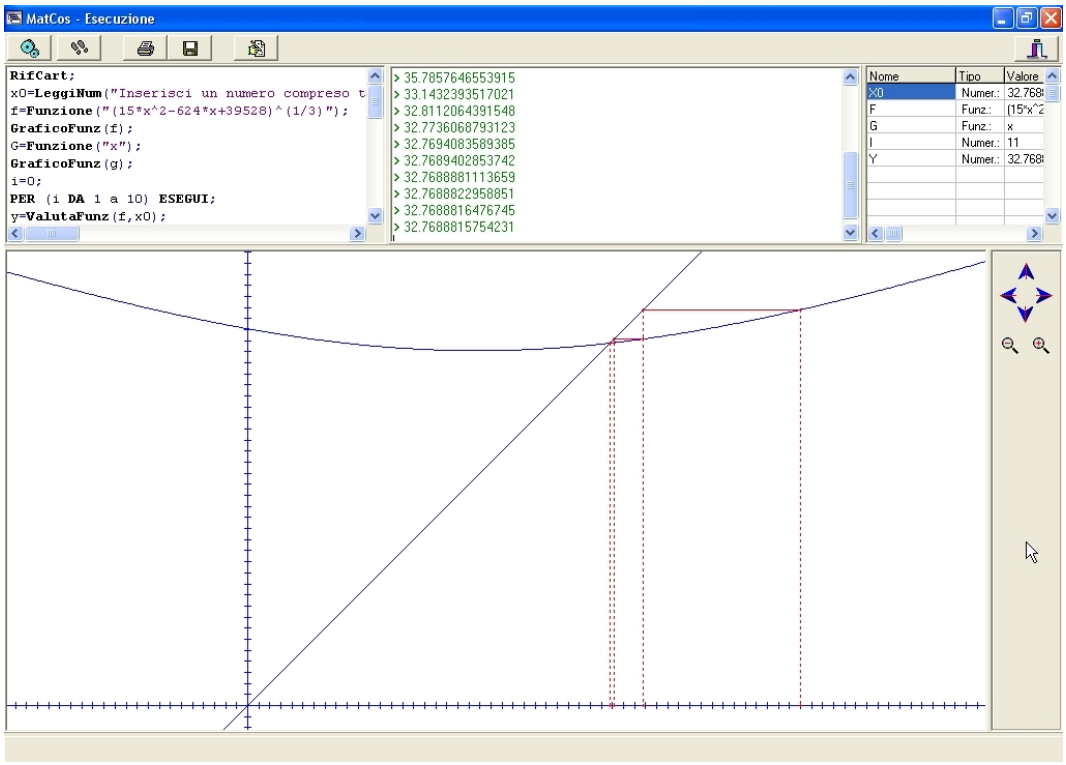


Figura 2.34: Risoluzione approssimata del problema relativo al pilastro.

Sistemi di trasmissione automatica

Nello studio del moto dei sistemi di trasmissione automatica si incontra spesso l'equazione:

$$\sin \omega t = e^{-\alpha t}$$

Ponendo $\omega = 0.612$ e $\alpha = 0.0014$ si può trovare una radice dell'equazione con il metodo iterativo (figura 2.35) visto che trattandosi di un'equazione trascendente non esiste una formula risolutiva. Riscrivendo l'equazione nella forma equivalente:

$$t = \frac{1}{\omega} \arcsin e^{-\alpha t}$$

ed applicando il programma sviluppato precedentemente in Matcos si ottiene una buona approssimazione della radice ricercata.

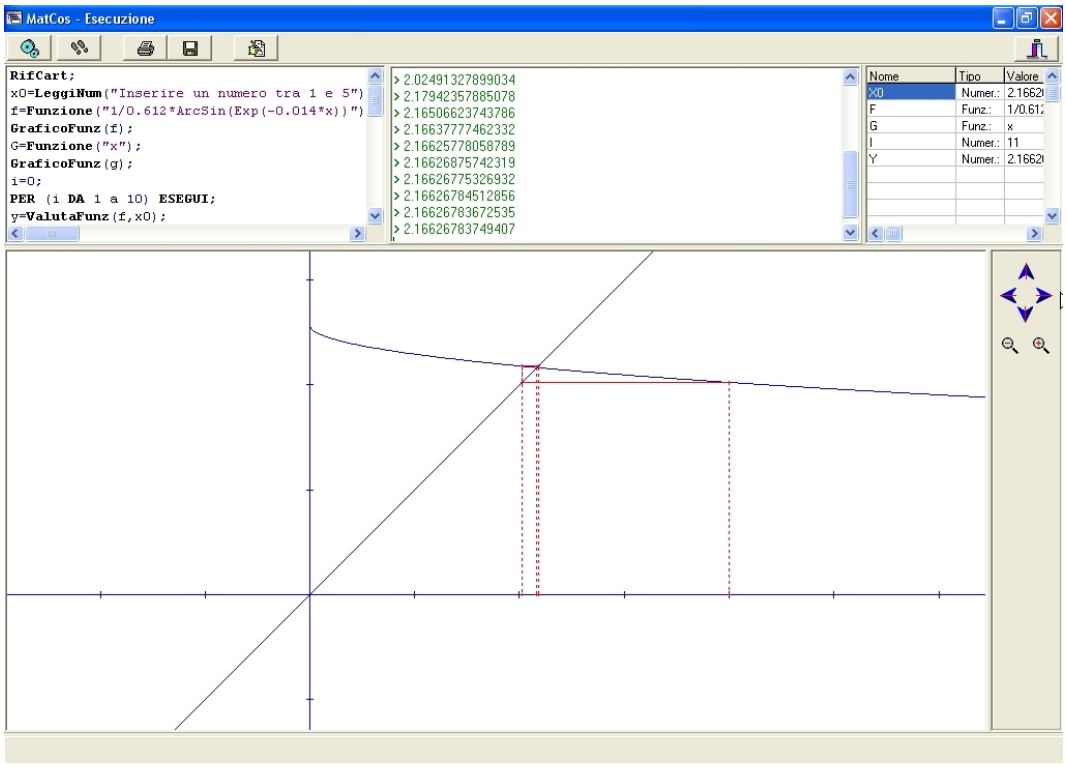


Figura 2.35: Risoluzione approssimata del problema relativo ai sistemi di trasmissione automatica.

Un problema di genetica

In un problema di genetica si giunge all'equazione:

$$\frac{130}{x} = \frac{161}{1-x} - \frac{515}{2-x} + \frac{462}{1+x}$$

che può essere risolta con il metodo iterativo, scrivendola nella forma:

$$x = \frac{130(x^3 - 2x^2 - x + 2)}{815x^2 - 1222x + 729}.$$

Quello che si ottiene eseguendo il programma MatCos è rappresentato in figura 2.36.

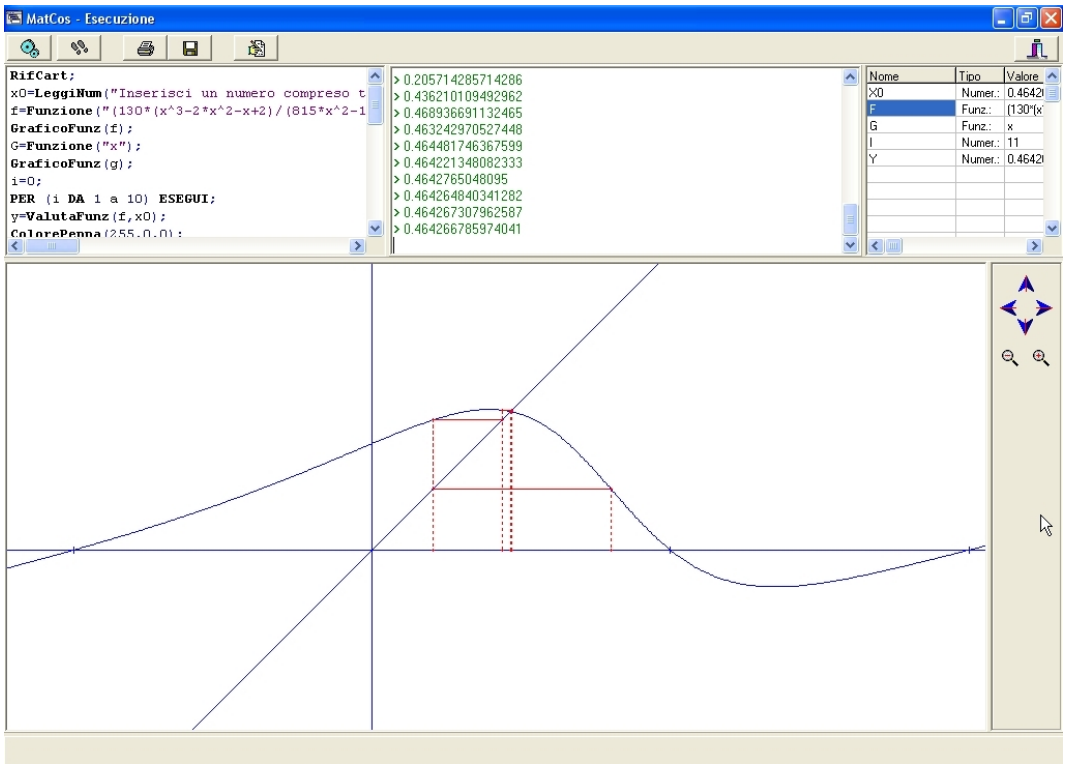


Figura 2.36: Risoluzione approssimata del problema di genetica.

Un problema di Biologia

Nello studio della dinamica di una popolazione di parassiti dell'abete, le cui "esplosioni" mettono a grave rischio intere foreste nel Nord America e in Europa si perviene, per determinare gli stati di equilibrio, alla seguente equazione di quarto grado:

$$-x^4 + x^3 - (a + b^2)x^2 + b^2 x = 0$$

Per cui, oltre all'evidente soluzione $x = 0$, corrispondente all'equilibrio dovuto all'assenza della popolazione, gli altri stati di equilibrio si ottengono dall'equazione:

$$x^3 - x^2 + (a + b^2)x - b^2 = 0.$$

Per i valori dei parametri $a = 0.4$ e $b = 0.1$ si ottiene solo un altro stato di equilibrio, che si riesce a determinare riscrivendo l'equazione nella forma:

$$x = \frac{b^2 - x^3 + x^2}{a + b^2}$$

In Matcos si ottiene il risultato mostrato in figura 2.37.

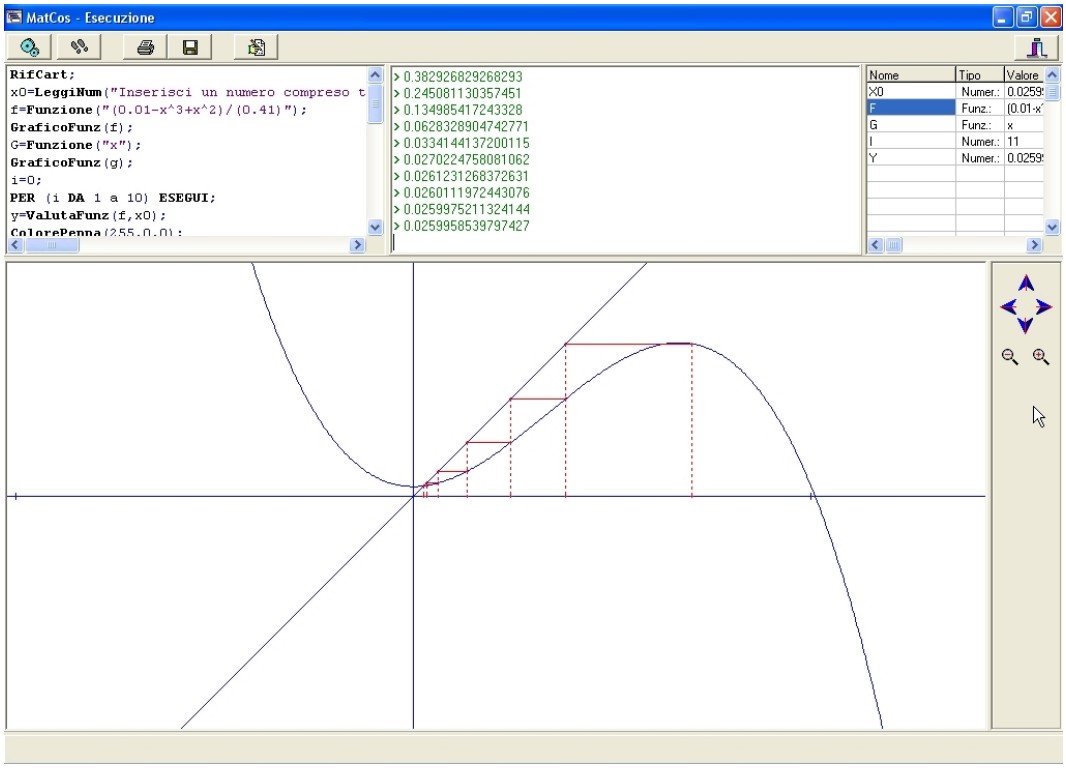


Figura 2.37: Risoluzione approssimata del problema di biologia con $a = 0.4$ e $b = 0.1$.

Per i valori dei parametri $a = 0.2$ e $b = 0.08$ si ottengono altri tre stati di equilibrio. Due di questi stati si ottengon riscrivendo l'equazione nella forma

$$x = \frac{b^2 - x^3 + x^2}{a + b^2}$$

per cui in Matcos si ottengono i risultati mostrati in figura 2.38 e 2.39.
Per ottenere il terzo punto è necessario riscrivere l'equazione in un'altra forma, in particolare:

$$x = \sqrt{x^3 - b^2 + (a + b^2)x}$$

per cui in Matcos si ottiene la rappresentazione riportata in figura 2.40.

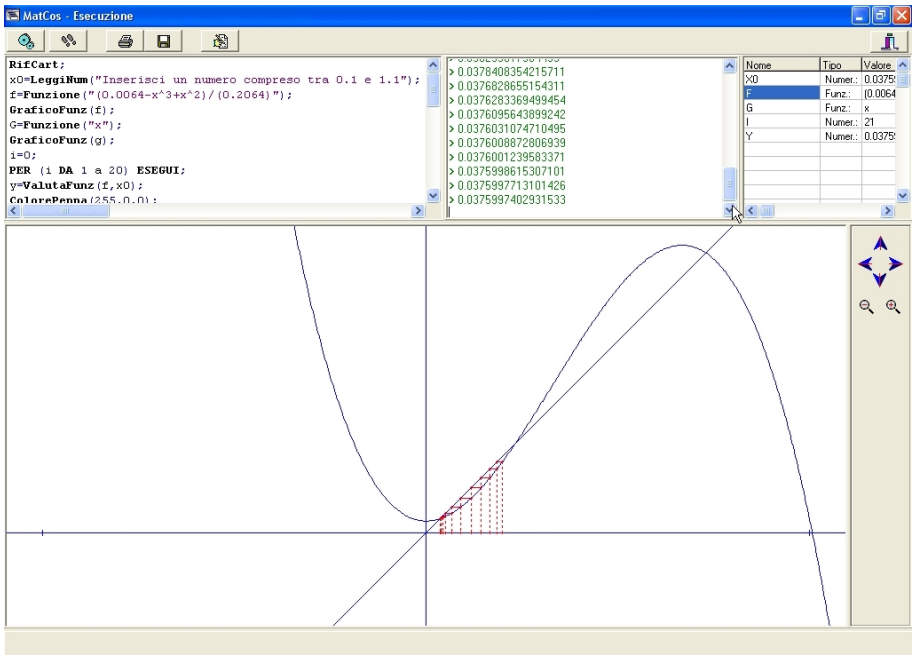


Figura 2.38: Risoluzione approssimata del problema di biologia con $a = 0.2$ e $b = 0.08$ (Primo punto).

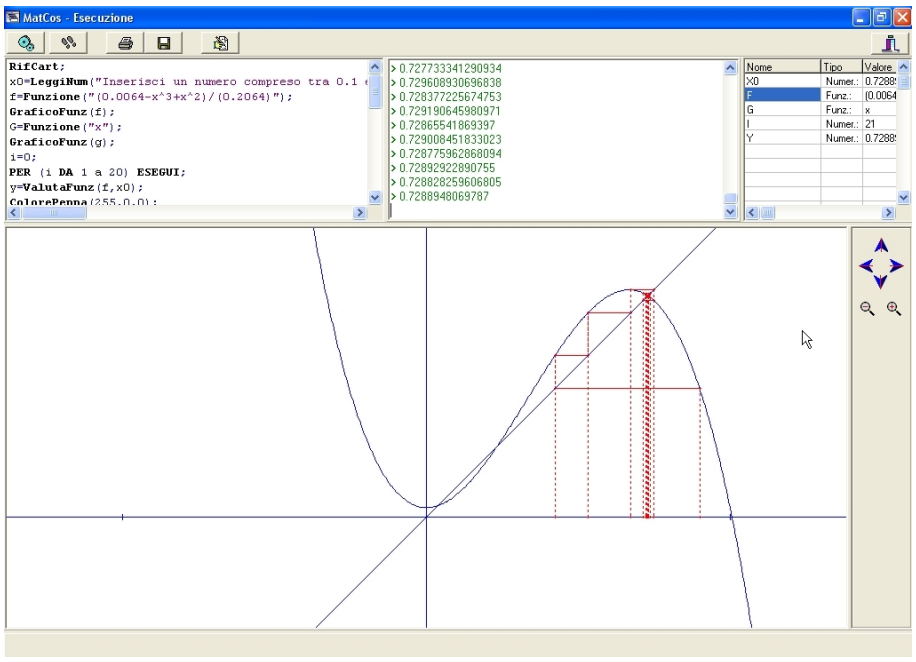


Figura 2.39: Risoluzione approssimata del problema di biologia con $a = 0.2$ e $b = 0.08$ (Secondo punto).

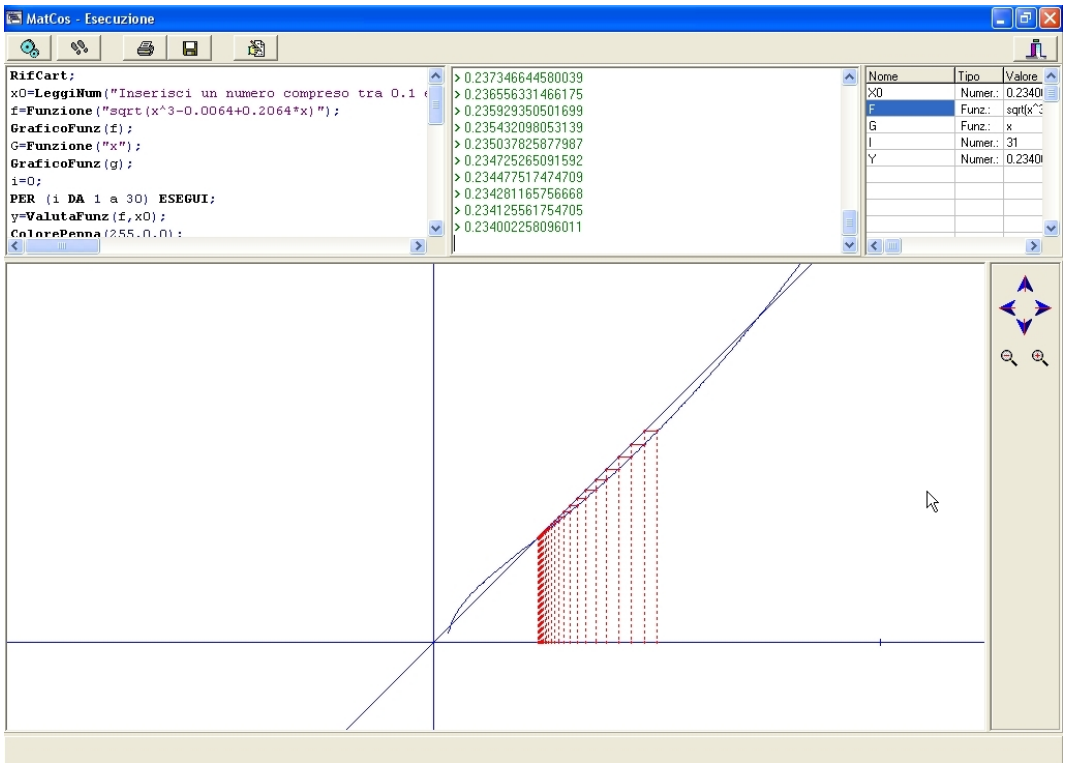


Figura 2.40: Risoluzione approssimata del problema di biologia con $a = 0.2$ e $b = 0.08$ (Terzo punto).

Osservazioni

Dopo aver analizzato i diversi esempi proposti si possono trarre alcune considerazioni sul metodo iterativo:

- Il metodo iterativo NON sempre converge (basta far osservare che inserendo valori esterni ad un certo range il metodo non porta alla soluzione cercata).
- La verifica delle condizioni di convergenza è in genere assai laboriosa, quindi nella pratica si applica direttamente il metodo, verificandone "empiricamente" la convergenza.
- Il "successo" del metodo iterativo può dipendere dalla forma in cui è stata scritta l'equazione da risolvere e/o dal dato iniziale (si ricordi l'esempio di biologia).

2.2.6 Un quesito degli esami di stato del 2006

Per concludere questa lezione si vuole proporre un quesito estratto dalla prova di Maturità per l'anno scolastico 2005/2006 con il fine di applicare il metodo iterativo presetato nella lezione e introdurre un particolare metodo iterativo: il metodo di Newton o delle tangenti, che sarà trattato nella successiva lezione dell'unità didattica.

Riportiamo di seguito il quesito:

"Si dimostri che l'equazione $\sin x = x - 1$ ha una e una sola radice α e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima. Si descriva altresì una procedura di calcolo che consenta di approssimare α con la precisione voluta."

Per quanto riguarda l'**esistenza** della radice basta:

- Tracciare i grafici delle funzioni $y = \sin x + 1$ e $y = x$ (figura 2.41).

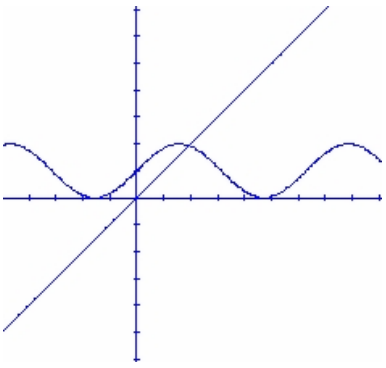


Figura 2.41: Grafico delle funzioni $y = \sin x + 1$ e $y = x$.

- Osservare che l'intersezione può trovarsi esclusivamente nell'intervallo [02] e averne la conferma verificando le ipotesi del teorema degli zeri per la funzione $f(x) = \sin x - x + 1$.

Per l'**unicità** basta:

- Calcolare la derivata di $f(x) = \sin x - x + 1$: $f'(x) = \cos x - 1$.
- Osservare che è sempre negativa in (0,2) per cui è garantita anche l'unicità della radice cercata.

Per dare una **stima** con la calcolatrice si può ricorrere al "gioco" proposto all'inizio considerando l'equazione nella forma $x = \sin x + 1$.

- Scegliendo un numero tra 0 e 2
- Premendo il tasto "sin" e aggiungendo 1.
- Ripetendo questa procedura più volte (anche variando la scelta del dato iniziale)

Considerando 10 iterazioni per tre diversi dati iniziali si ottengono i valori riportati nella tabella in figura 2.42, per cui una stima della radice richiesta può essere 1.934.

$x_0 = 0.5$	$x_0 = 1$	$x_0 = 1.5$
1.479425539	1.841470984	1.997494987
1.995828593	1.963590724	1.910337026
1.911025428	1.923843052	1.942907737
1.942678238	1.938323639	1.931561749
1.931645167	1.933218656	1.935626911
1.935597462	1.935040754	1.934184221
1.934194727	1.934393195	1.934697987
1.934694253	1.934623688	1.934515249
1.934516578	1.934541691	1.934580274
1.934579801	1.934570867	1.934557139

Figura 2.42: Risultati di 10 iterazioni per tre dati iniziali diversi.

Per quanto concerne l'ultima parte del quesito: *"si descriva una procedura di calcolo che consenta di approssimare a con la precisione voluta"*, si può ricorrere al metodo di bisezione già studiato o ad un particolare metodo iterativo che spiegheremo nella seconda parte di questa unità didattica: il Metodo di Newton- Raphson o delle tangenti.

Introduzione al metodo di Newton

Il metodo di Newton è un particolare metodo iterativo per la risoluzione approssimata di un'equazione:

$$f(x) = 0.$$

Esso consiste nel:

- Considerare la retta tangente alla curva $y = f(x)$ in un punto.
- Assumere l'intersezione di tale retta con l'asse x, come ulteriore approssimazione della radice.

Scelto il punto x_0 abbastanza vicino alla radice, si costruisce la successione x_i, $i = 0,1,2,...$ richiedendo che il punto x_{i+1} sia il punto d'intersezione con l'asse x della retta tangente alla curva nel punto $(x_i, f(x_i))$.
I punti della successione andranno a collocarsi graficamente come mostrato in figura 2.43.

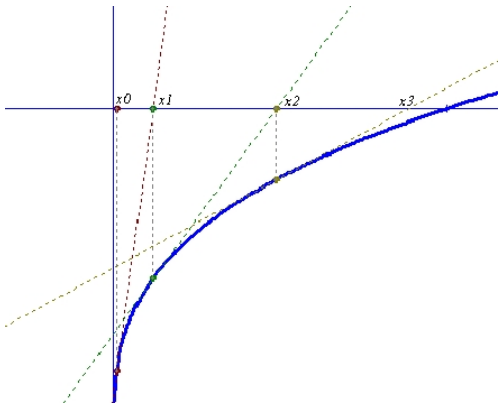


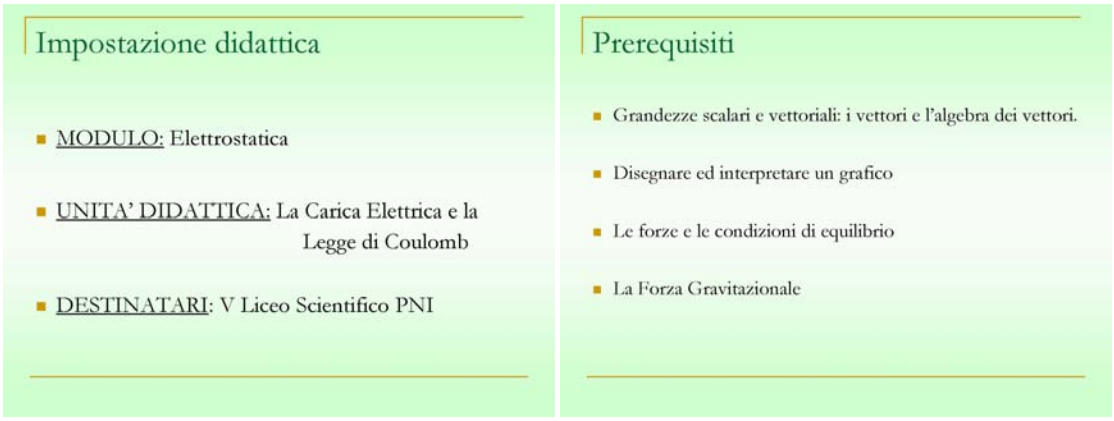
Figura 2.43: Rappresentazione grafica del metodo di Newton.

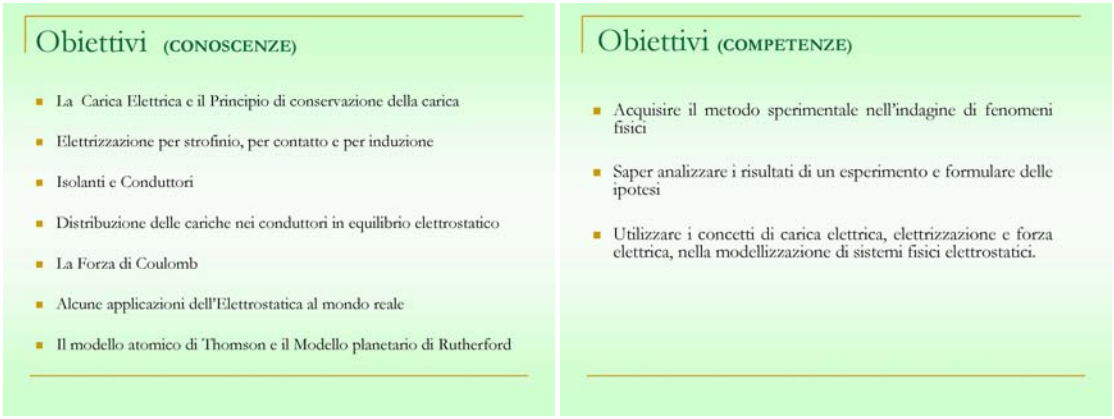
2.3 La Carica Elettrica e la Legge di Coulomb

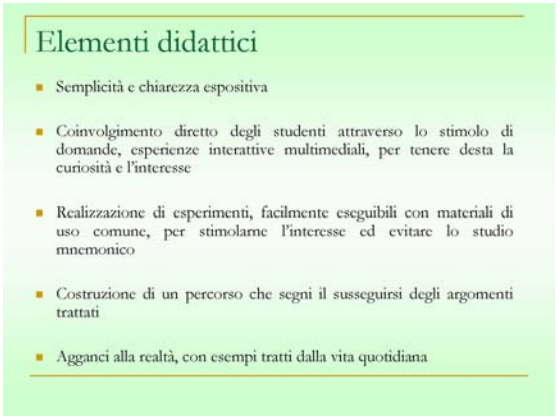
In questo paragrafo è riportato un prodotto multimediale realizzato per l'esame di Didattica della Fisica 1.
La lezione trattata riguarda:

- un argomento di Fisica 2 (Carica elettrica e legge di Coulomb) sviluppato dal punto di vista teorico ed arricchito da esperienze di laboratorio e da esercizi pratici da realizzare anche con materiale povero;
- un collegamento ad un argomento di Fisica 1 (forza gravitazionale) con relativi confronti mostrando differenze ed analogie;
- una parte di fisica moderna (i primi modelli atomici), che è stata poi presentata durante il tirocinio diretto ed è riportata nel capitolo 3.

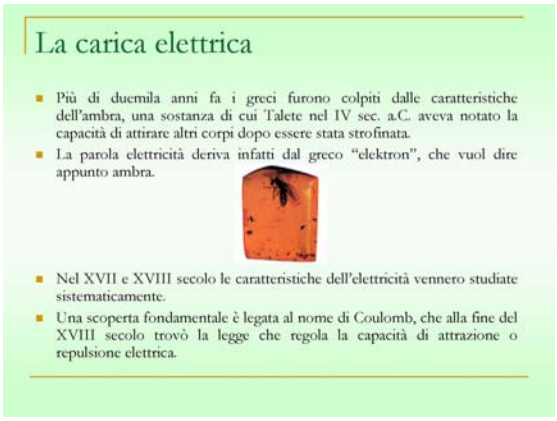
2.3.1 Elementi di programmazione didattica

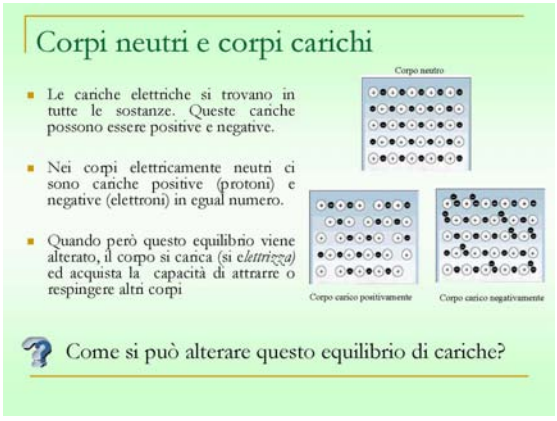




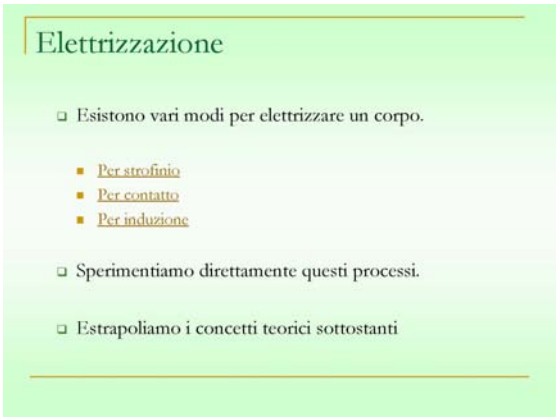


2.3.2 La carica elettrica

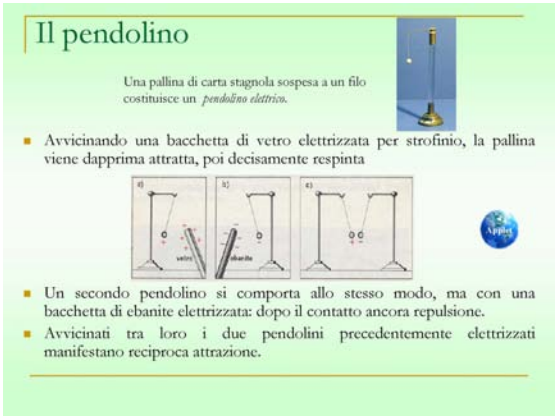


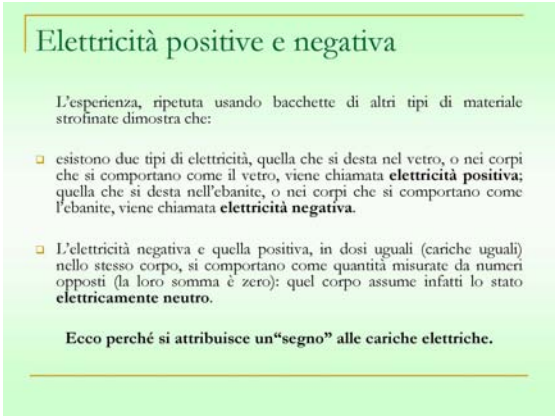


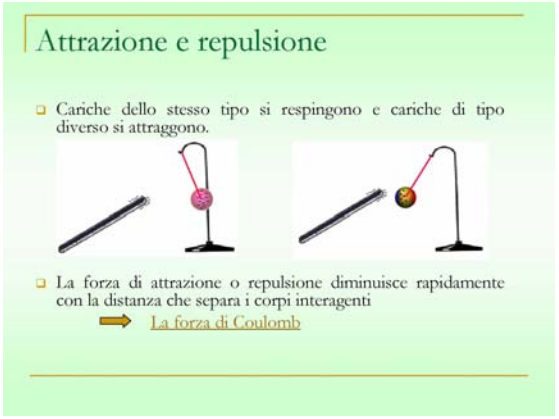
2.3.3 Elettrizzazione ed esperimenti



Elettrizzazione per strofinio

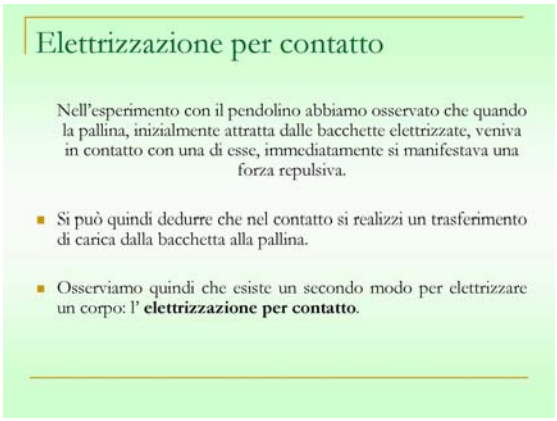






Conduttori e isolanti

Elettrizzazione per contatto



Elettroscopio ed Elettrizzazione per induzione

L'elettroscopio a foglie

L'elettroscopio a foglie è uno strumento che serve per rilevare la carica elettrica posseduta da un corpo.

Questo strumento è composto da un'asta metallica alle cui estremità sono poste una sferetta metallica e due sottili foglioline d'oro o d'alluminio, di uguali dimensioni, quest'estremità è isolata in un contenitore di vetro.

Toccando il pomello in alto con un corpo carico, per esempio positivamente, le due foglie metalliche in basso si allontanano.

La carica acquisita per contatto dall'elettroscopio è arrivata in parte sulle foglie, che si caricano così dello stesso segno e quindi si respingono.

Le foglioline divergeranno tanto di più, quanto più è grande la carica del corpo.

Costruiamo un elettroscopio

Elettrizzazione per induzione

Toccando con una bacchetta carica il pomello dell'elettroscopio, le foglioline divergeranno, poiché nel contatto c'è stato un trasferimento di carica.

E se non portassimo a contatto la bacchetta con il pomello?

Avviciniamo una bacchetta carica al pomello dell'elettroscopio (senza metterli in contatto)

… Cosa accade?

Elettrizzazione per induzione

Le foglioline dell'elettroscopio divergono per tutto il tempo in cui la bacchetta carica si mantiene vicina al pomello dell'elettroscopio, ma dopo si riavvicinano.

- Deduciamo quindi che c'è stato un fenomeno di elettrizzazione temporaneo.

Si tratta dell'**elettrizzazione per induzione**.

Cosa avviene alle cariche durante questo fenomeno?

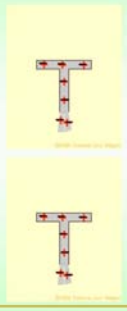
Elettrizzazione per induzione

- Avvicinando la bacchetta carica (supponiamo positivamente) al pomello dell'elettroscopio, nel corpo metallico dell'elettroscopio gli elettroni liberi di muoversi si sposteranno sulla superficie rivolta verso la bacchetta e lasceranno quindi cariche positivamente le foglioline in basso.

Complessivamente il corpo metallico dell'elettroscopio è sempre neutro, ma la carica non è distribuita uniformemente.

- Allontanando la bacchetta carica, gli elettroni "tornano al loro posto", ridistribuendosi uniformemente, e le foglioline si riavvicinano.

Il fenomeno accade in modo analogo quando si avvicina una bacchetta carica negativamente.



Il pozzo di Faraday

Il comune valore delle due opposte cariche elettriche indotte in un conduttore è generalmente minore della carica dell'induttore.

In qualche caso, però, può essere uguale.

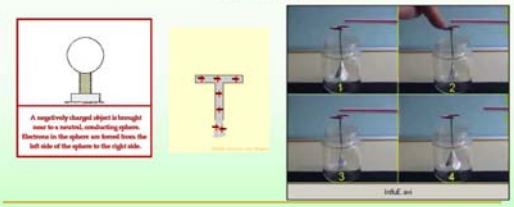
Vediamo, infatti, cosa accade in un Pozzo di Faraday

Carica per Induzione

Grazie all'induzione elettrostatica è possibile caricare due conduttori sferici

Carica per Induzione

Utilizzando anche il nostro corpo, che è un buon conduttore, si può caricare una sola sfera o un elettroscopio



Distribuzione delle cariche sulla superficie dei conduttori

Dalle immagini mostrate, si può osservare che le sfere, appena caricate, distribuiscono le loro cariche uniformemente sulla loro superficie …

come verificare questo fenomeno?

- Una volta terminato il processo di carica, il conduttore raggiunge uno stato di equilibrio, detto **equilibrio elettrostatico**, con le cariche elettriche ferme rispetto ad esso.
- Con alcuni semplici esperimenti si può verificare che le cariche su un conduttore in equilibrio elettrostatico si distribuiscono sulla superficie esterna.

Si ricordi intanto il pozzo di Faraday…

Sfera conduttrice ed emisferi di Cavendish

- Portiamo due emisferi, inizialmente allo stato neutro, a contatto con una sfera carica, in modo da formare con questa un unico conduttore.
- Allontaniamo i due emisferi
- Con un elettroscopio si può provare che gli emisferi sono carichi, mentre la sfera conduttrice è rimasta scarica.

Durante il contatto la carica elettrica è passata dal conduttore sferico ai due emisferi, i quali rappresentano la superficie esterna del conduttore formato dalla sfera e dagli emisferi.

La gabbia di Faraday

La gabbia di Faraday

Per verificare che le cariche si distribuiscono sulla superficie esterna di un conduttore possiamo fare anche un esperimento utilizzando il nostro elettroscopio e costruendo quella che è nota come

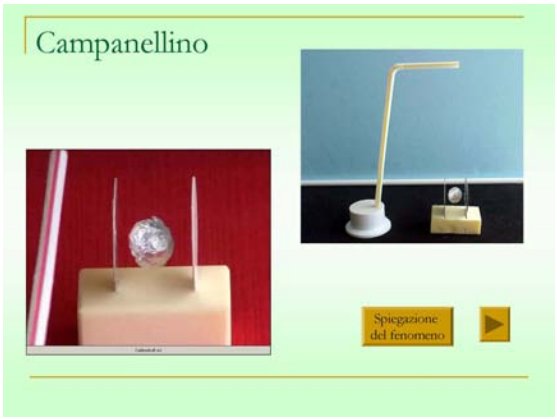
Gabbia di Faraday

Faraday si pose all'interno di una cabina metallica, con alcuni elettroscopi collegati con le pareti della cabina. Elettrizzando la gabbia non osservò alcuna divergenza delle foglioline degli elettroscopi collegati con la superficie interna della gabbia, mentre gli elettroscopi collegati con la superficie esterna evidenziavano con la divergenza delle foglioline la presenza di una carica elettrica.

Costruiamo la Gabbia di Faraday

2.3.4 Applicazioni

2.3.5 Esercizi pratici e on-line



Esercizi on line

- Quante cariche dello stesso segno?
- Di che segno sono le cariche?
- Spiegare il fenomeno presentato nell'applet

Elettroforo

2.3.6 La Forza di Coulomb

Introduzione alla Forza di Coulomb

In tutti gli esperimenti fatti finora abbiamo osservato in modo qualitativo che, *grazie all'intervento delle cariche elettriche* è possibile attrarre o respingere altri corpi.

Interviene dunque una forza.

Ma come è fatta questa forza?

La Forza di Coulomb

Il fisico francese Charles Augustin Coulomb, servendosi di una bilancia di torsione, determinò nel 1784 la legge della forza tra cariche elettriche, nota appunto come

Forza di Coulomb.

Bilancia di torsione

- E' uno strumento con cui si misurano le forze che si esercitano tra due sfere elettricamente cariche.
- Una sfera è fissa ed isolata elettricamente.
- L'altra sfera può invece ruotare. Essa è sospesa mediante un manubrio a un filo isolante ed è tenuta in equilibrio da un contrappeso.

La legge di Coulomb

La legge di Coulomb afferma che la forza di attrazione o di repulsione, che si esercita tra due corpi puntiformi elettrizzati, è direttamente proporzionale al prodotto delle quantità di elettricità possedute dai due corpi e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

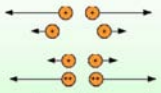
$$F_0 = k_0 \frac{q_1 q_2}{d^2}$$

La Forza di Coulomb

La legge che si trova sperimentalmente è in generale complicata, ma diventa semplice quando le cariche hanno dimensioni molte piccole rispetto alla loro distanza tali da poter essere considerate puntiformi.

Due corpi puntiformi elettrizzati con cariche q_1 ***e*** q_2 ***e posti nel vuoto a una distanza*** d ***, si attraggono (se hanno segno opposto) o si respingono (se hanno lo stesso segno) con una forza di intensità***

$$F_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{d^2}$$



dove ε_0 è la costante dielettrica del vuoto.

La ***direzione della forza*** è quella della retta che congiunge i due corpi.

Costante dielettrica assoluta

In un mezzo materiale la forza di Coulomb F_m risulta essere meno intensa che nel vuoto.

Il rapporto $\varepsilon_r = \frac{F_0}{F_m}$ è detto ***costante dielettrica relativa*** del mezzo.

La legge di Coulomb in un mezzo isolante qualsiasi è: $F_m = \frac{F}{\varepsilon_r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q_1 q_2}{d^2}$

Si introduce quindi una nuova costante $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ che è detta ***costante dielettrica assoluta*** del mezzo considerato.

Grazie ad essa è possibile scrivere la legge di Coulomb nella forma generale:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{d^2}$$

E se ci sono più di due cariche puntiformi ad interagire?

Principio di sovrapposizione

Quando si considera un insieme di **più di due cariche puntiformi**, la forma vettoriale della forza di Coulomb è essenziale.

In questo caso, infatti si applica la legge di Coulomb a ogni coppia di cariche e la forza complessiva agente su una carica qualsiasi potrà essere calcolata operando la somma vettoriale di tutti i contributi.

Confronto con la forza gravitazionale

Conosciamo già un'altra forza che, come la forza di Coulomb, è proporzionale al prodotto degli oggetti che interagiscono e inversamente proporzionale al quadrato della distanza che li separa …

E' la ***Forza gravitazionale***,

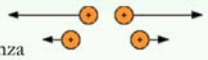
il cui modulo è dato da $F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$

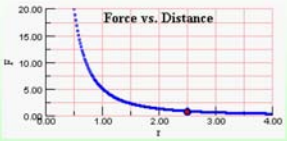
Vediamo le analogie e le differenze tra queste due forze!

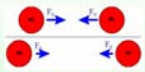
Forza di Coulomb e Forza Gravitazionale

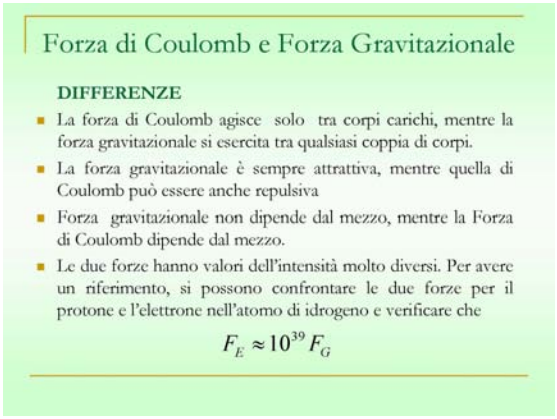
ANALOGIE

- Forze che agiscono a distanza
- Decrescono in proporzione inversa al quadrato della distanza

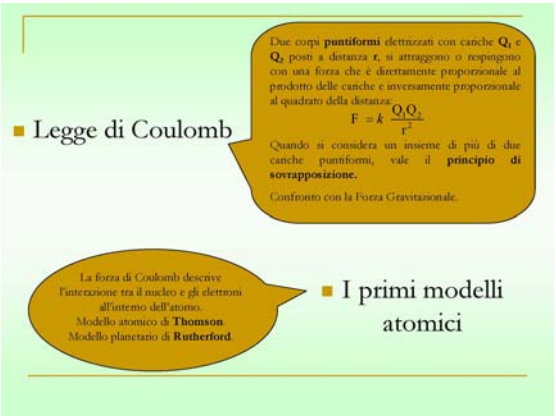








2.3.7 Riassumendo...

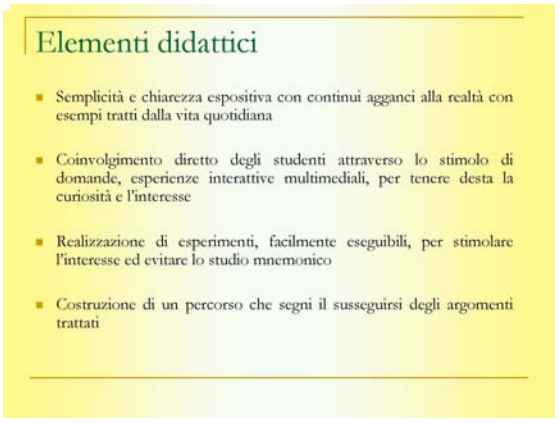


2.4 Forze ed equilibrio

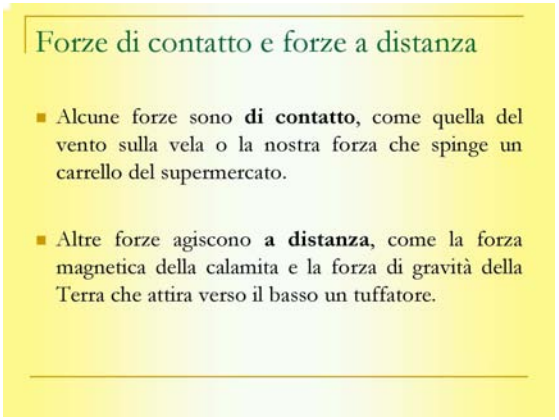
In questo paragrafo è riportato un prodotto multimediale realizzato per l'esame di Didattica della Fisica 2.
La lezione trattata riguarda:

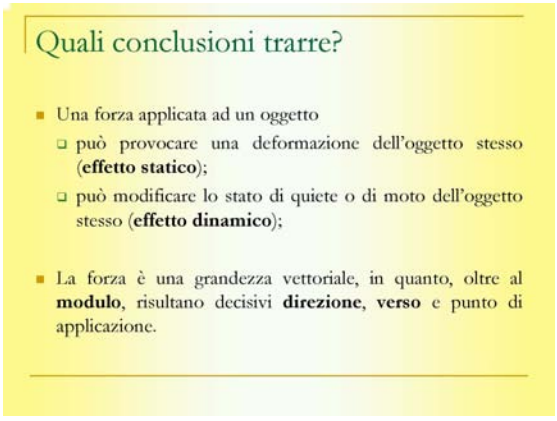
- un argomento di Fisica 1 (Forze ed equilibrio) sviluppato dal punto di vista teorico ed arricchito da esperienze di laboratorio;
- un collegamento ad un argomento di Fisica 2 (forza di Coulomb) con relativi confronti mostrando differenze ed analogie;
- una parte di fisica moderna (Decadimento radioattivo, Fusione e Fissione nucleare), che è stata poi presentata durante il tirocinio diretto ed è riportata nel capitolo 3.

2.4.1 Elementi di programmazione didattica



2.4.2 Concetto di Forza ed equilibrio





Effetto delle forze

Ogni volta che osserviamo un oggetto cambiare velocità abbiamo un indizio sicuro della presenza di una forza.

- Ad esempio tirando un calcio di rigore sul pallone viene esercitata una forza che ne aumenta la velocità.
- La forza esercitata dal portiere, mentre para il rigore, provoca invece una diminuzione della velocità del pallone fino al suo arresto.

Se un oggetto è fermo e rimane fermo allora su di esso non agiscono forze?

- Ogni mattone di una casa subisce l'attrazione della Terra e la compressione da parte di tutti i mattoni che ha sopra di sè, eppure non si muove…
- Se sosteniamo un oggetto gli applichiamo una forza che gli impedisce di muoversi…

Quando capita che una forza non produce movimento, vuol dire che ci sono altre forze che ne annullano l'effetto.

Quali conclusioni trarre?

- *Se un oggetto è fermo e continua a rimanere fermo, cioè è in* ***equilibrio,*** *allora la forza totale (quella che risulta dalla somma di tutte le forze in gioco) che subisce è uguale a zero.*
- *Se invece un oggetto inizialmente fermo comincia a muoversi, allora c'è una forza che ne ha provocato il movimento.*

2.4.3 Carattere vettoriale e misura delle forze

Carattere vettoriale delle Forze

Abbiamo già osservato che la Forza è una grandezza vettoriale, caratterizzata da:

- la sua direzione, cioè la retta lungo cui la forza agisce;
- il verso in cui è orientata;
- la sua intensità.

Possiamo quindi rappresentare una forza con una freccia.

Carattere vettoriale delle Forze

Per essere certi che si tratta di una grandezza vettoriale non basta averla caratterizzata con un'intensità, una direzione ed un verso.

'E necessario che le forze si sommino come vettori.

Prima di verificare ciò, dobbiamo definire in modo preciso questa grandezza dicendo come si fa a misurarla.

La misura delle Forze

- La **direzione** ed il **verso** di una forza sono quelli in cui comincia a muoversi un oggetto inizialmente fermo quando gli è applicata la forza.
- Per misurare l'**intensità** di una forza un metodo consiste nell'applicare la forza ad una molla e nel misurare di quanto essa si allunga.
  - Diremo che due forze hanno uguale intensità se applicate una dopo l'altra alla molla producono uguali allungamenti.
  - Diremo che le due forze sono diverse se una allunga la molla più dell'altra; in particolare diremo che la prima ha un'intensità maggiore della seconda.

La misura delle Forze

Siamo quindi in grado di **confrontare** due forze, ma per poter usare una molla come strumento di misura sono necessarie ancora due cose:

- Fissare l'unità di misura delle forze
- Costruire una scala graduata su cui leggere i valori delle forze.

Il dinamometro

- Nel Sistema Internazionale si è scelto come **unità di misura** per le forze il Newton che si indica con il simbolo N.

Un Newton è l'intensità della forza-peso
con cui la Terra attrae un corpo di massa uguale a 102 g.

Per farci un'idea … noi applichiamo una forza di circa 1N quando teniamo in mano un ettogrammo di burro.

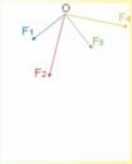
- Per costruire una **scala graduata**, sulla quale leggere i valori delle forze:

-Segniamo 0N nella posizione in cui si trova l'estremità della molla scarica.
-Dopo aver applicato una massa di 102 g, segniamo 1N nella nuova posizione.
-Applichiamo due masse da 102g e segniamo 2N.
-E così via…

Abbiamo così costruito un **dinamometro**,
uno strumento che misura l'intensità delle forze.

Somma delle Forze

Sapendo come si fa a misurare le forze, siamo ora in grado di verificare se esse si sommano come i vettori.



Per fare questo eseguiamo
un semplice esperimento…

Esperimento

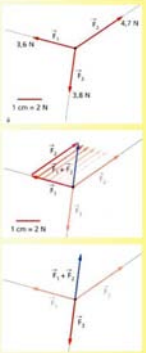
Costruiamo una semplice esperienza usando tre dinamometri, un piccolo anello di metallo, un po' di filo da pesca e tre chiodi.

- Fissiamo con i chiodi i tre dinamometri su un tavolo poggiandoli su un foglio di carta. Devono essere in tensione e ben allineati con i fili da pesca che trasmettono le forze all'anello di metallo.
- Ciascun dinamometro esercita una forza sull'anello di metallo, ma questo non accenna a muoversi.

Per le considerazioni fatte precedentemente, possiamo affermare che la forza totale che agisce sull'anello di metallo deve essere nulla.

Esperimento

- Prendiamo nota dei valori indicati dai tre dinamometri e segniamo con una matita sul foglio di carta le rette individuate dai fili.
- Togliamo i dinamometri.
- Scegliamo una scala per rappresentare le forze (per esempio 1cm=2N) e riportiamo sulle rette, a partire dal centro dell'anello tre frecce, che hanno lunghezze proporzionali ai valori indicati dai dinamometri.
- Sommiamo le due forze in alto con il metodo punta-coda, otteniamo la forza blu.
- Poiché la forza blu ha la stessa intensità della forza $\vec{F}_3$, la stessa direzione e verso opposto, la loro somma è uguale a zero.



Esperimento

- La somma delle tre forze, eseguita con il metodo punta-coda, dà come risultato il vettore nullo.
- La previsione del metodo punta-coda (forza risultante uguale a zero) coincide con la misura della forza totale (che sappiamo essere uguale a zero poiché l'anello di metallo continua a restare fermo).
- Ripetendo lo stesso esperimento con altri vettori e disposizioni delle forze, arriveremo sempre (entro gli inevitabili errori di misura) allo stesso risultato.

Quindi possiamo affermare che:

Le forze sono grandezze vettoriali, perché sono caratterizzate da un'intensità, una direzione, un verso e si sommano con il metodo punta-coda.

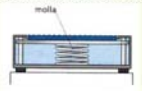
Il punto su cui la forza agisce si chiama punto di applicazione del vettore forza

- Per esercitarsi con la somma di forze … Applet

2.4.4 La Forza-Peso

Forza-Peso

- Una forza di cui facciamo esperienza diretta quotidianamente è la forza-peso. Tutti gli oggetti sulla Terra hanno un peso, perché sono attratti verso il basso dalla forza di gravità.
  La Terra si comporta come una grande calamita, con la differenza che attrae verso di sé tutti gli oggetti e non soltanto quelli di ferro.
- Misuriamo il nostro peso, cioè la forza-peso con cui la Terra ci attrae, con una bilancia.
  Questo strumento è in realtà un dinamometro, nel quale la molla, per effetto della forza applicata, si comprime invece di allungarsi.



Forza-Peso e Massa

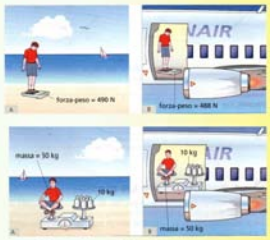
Poiché il peso è una forza, va misurata in Newton.
Quindi alla domanda "Quanto pesi?" bisognerebbe rispondere "Tot Newton" ed invece siamo abituati a rispondere "Tot Kg".

Perché alla domanda su quanto è intensa una forza si risponde con il valore di una massa?

Forza-Peso e Massa

La forza peso che agisce su un oggetto cambia da luogo a luogo.

La massa, invece, è sempre la stessa.



La massa quindi è una proprietà caratteristica di un corpo, mentre la forza peso dipende da dove il corpo si trova.

Forza-Peso e Massa

Si verifica con un semplice esperimento che in un determinato luogo la forza peso e la massa sono direttamente proporzionali.

La costante di proporzionalità sulla Terra è di circa 9,8 N/kg.

Dunque la bilancia pesapersone è tarata in modo da dare, come valore numerico, il risultato della divisione tra la forza-peso (misurata dal dinamometro interno) e 9.8.

2.4.5 La Forza elastica

Deformazioni elastiche

Il dinamometro precedentemente introdotto fonda il suo funzionamento sulle deformazioni subite dalla molla che lo costituisce.

Non tutte le deformazioni però possono essere utilizzate per avere una misura della forza applicata.

Se stringiamo una **pallina da tennis** tra le mani, questa sotto l'azione della forza si deforma per poi riprendere l'aspetto iniziale non appena lasciamo la presa.
Se eseguiamo la stessa esperienza con una **pallina di stucco** notiamo che in questo caso la deformazione prodotta non è temporanea, ma permanente.

Deformazioni elastiche

Le deformazioni che scompaiono
quando la forza cessa la sua azione
sono dette elastiche;
le altre sono dette anelastiche.

Notevole interesse rivestono in fisica le deformazioni elastiche subite dai corpi in quanto dalla loro entità siamo in grado di risalire all'intensità della forza applicata.

Forza elastica

La molla del dinamometro è in grado di esercitare una forza che tende a farla ritornare sempre nella sua posizione di riposo.

Basta provare a tirare o a comprimere una molla e osservare che si percepisce direttamente una forza che si oppone alla nostra.

Questa forza è detta forza elastica ed ha la stessa direzione,
ma verso opposto rispetto alla nostra forza.

Possiamo inoltre osservare (anche senza strumenti di misura) che più allunghiamo (o comprimiamo) la molla, più la forza elastica è intensa.

Forza elastica

Che **relazione quantitativa** esiste tra
la **forza elastica** e la **deformazione**,
cioè lo spostamento di un'estremità della molla?

Per rispondere a questa domanda
eseguiamo un esperimento!

2.4.6 Esperimento: legge di Hooke

Esperimento Legge di Hooke

Dopo aver dotato il dinamometro di un portapesi e di un indice che ci permetta di valutare gli allungamenti poniamo sul portapesi successivamente 1, 2, 3… pesetti campione (di massa 102 g, che quindi esercitano una forza peso di 1 N) e registriamo gli allungamenti della molla.

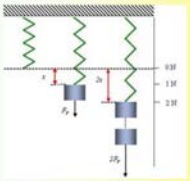
Nella tabella sono riportati i valori ottenuti in un esperimento del genere.

Forza applicata (N)	Allungamento (cm)	$\frac{F}{\Delta l}\left(\frac{N}{cm}\right)$
1.00	1.50	0.67
2.00	3.00	0.67
3.00	4.45	0.67
4.00	5.95	0.67
5.00	7.50	0.67
6.00	10.50	0.57
7.00	18.00	0.39

Esperimento – Legge di Hooke

Notiamo che, almeno in un certo intervallo, gli allungamenti sono proporzionali alle forze applicate e quindi la relazione che lega la forza applicata e l'allungamento è del tipo:

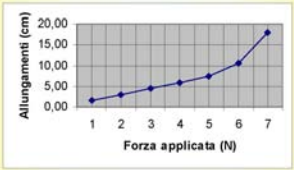
$$\frac{F}{\Delta l} = k$$



dove k è una costante che descrive le caratteristiche fisiche della molla: questo significa che a parità di dimensioni due molle avranno costanti elastiche diverse a seconda del materiale con il quale sono costruite.

Esperimento – Legge di Hooke

Continuando ad aggiungere pesetti sul portapesi si nota che da un certo valore in poi il rapporto $F/\Delta l$ non è più costante, ma in corrispondenza di aumenti relativamente piccoli della forza si producono allungamenti sempre maggiori.



Esperimento – Legge di Hooke

Si può affermare che la proporzionalità diretta tra forza e allungamento risulta vera entro quelli che vengono chiamati i *limiti di elasticità* della molla.

Infatti se aggiungendo pesi, il limite di elasticità viene superato, si nota che la deformazione totale subita dalla molla è divenuta permanente.

Il dinamometro ha così perso le sue proprietà elastiche e non può più essere usato come strumento di misura.

La legge di Hooke

Numerosi esperimenti simili a questo confermano la relazione quantitativa di proporzionalità tra forza e spostamento, che è espressa dalla legge sperimentale di Hooke:

La forza elastica F della molla, entro certi limiti (di elasticità),
è direttamente proporzionale allo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio.

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

dove k è una costante positiva (***costante elastica***);

$\vec{x}$ è il vettore spostamento che ha la coda nel punto di riposo della molla e la punta sull'estremità libera della molla (la sua intensità corrisponde quindi all'allungamento subito dalla molla).

Il ***segno meno*** indica che i vettori $\vec{x}$ e $\vec{F}$ hanno la stessa direzione, ma verso opposto.

2.4.7 Equilibrio di un punto materiale

Equilibrio di un punto materiale

Quando si attacca un peso ad un dinamometro, su di esso agiscono, con un risultato nullo, la forza della molla e la forza di gravità, che sono rappresentate da vettori uguali ed opposti.

Determinare le condizioni che mantengono un corpo in equilibrio in generale è un problema che può essere molto complesso.

Pensiamo ad un grattacielo o ad un ponte. Ogni piccolo volume di materia di cui sono costituiti deve continuare a restare in equilibrio anche in condizioni difficili, come per esempio un terremoto per il grattacielo o le continue sollecitazioni del traffico per un ponte.

In questa lezione ci limiteremo a trattare il problema dell'equilibrio, come si procede sempre in fisica, iniziando da un modello semplificato:

il **punto materiale**.

Condizioni di equilibrio

Il **punto materiale** è un modello astratto, cioè una descrizione semplificata che mette in risalto soltanto le caratteristiche che si considerano più importanti nel particolare problema che si sta esaminando.

Nel nostro caso il punto materiale è una descrizione schematica utile in quanto intendiamo considerare solo il fatto che tale oggetto abbia una massa (ecco perchè punto materiale), ma si possono trascurare altre proprietà, come l'estensione, la forma, la temperatura, ecc.

Per un punto materiale la condizione di equilibrio è
che la somma delle forze che gli sono applicate
sia eguale al vettore nullo.

2.4.8 Reazioni vincolari

Reazioni vincolari

Nella realtà, difficilmente capita che un oggetto sia del tutto libero di muoversi nello spazio; in genere può compiere alcuni spostamenti, mentre altri gli sono proibiti.

- Un oggetto appoggiato su un tavolo può muoversi in lungo e in largo sulla superficie del tavolo, può eventualmente essere sollevato, ma non può muoversi sotto il livello del tavolo.
- Un lampadario appeso al soffitto non è libero di spostarsi dovunque nello spazio. Il filo che lo sostiene lo costringe a muoversi solo su una porzione di una superficie sferica con raggio pari alla lunghezza del filo e centro nel punto in cui il filo è appeso al soffitto.
- Un treno è obbligato a spostarsi sui binari, senza uscire dalle rotaie.

Tutti questi oggetti sono sottoposti a dei vincoli.

Un vincolo è un oggetto che limita la libertà di movimento di un altro oggetto.

Reazioni vincolari

'E evidente che i vincoli esercitano delle forze per condizionare i movimenti degli oggetti …

In cosa consistono queste forze?

Un oggetto appoggiato su un tavolo, malgrado il suo peso, non sprofonda, ma resta fermo.
Ciò vuol dire che a esso è applicata una forza uguale e contraria al suo peso.

Questa forza, si chiama **reazione vincolare**.

Reazioni vincolari

La reazione vincolare esercitata dal tavolo è dovuta all'elasticità del tavolo stesso.

Quando vi appoggiamo un oggetto, la superficie del tavolo si deforma in modo impercettibile, come se fosse un tappeto elastico (ma estremamente rigido).

Man mano che la superficie si comprime, esercita una forza sempre più grande verso l'alto fino a che riesce a controbilanciare il peso dell'oggetto.

La forza vincolare non è sempre uguale, ma dipende dalla forza a cui deve reagire.

Reazioni vincolari

Se appoggiamo su un tavolo un oggetto leggero, la superficie si deforma poco e risponde con una forza piccola. Se invece l'oggetto è pesante, la forza vincolare necessaria per tenerlo in equilibrio è maggiore.

Appoggiando pesi sempre più grandi si arriva a un limite di rottura, quando la struttura elastica del tavolo non ce la fa più a reagire alle sollecitazioni.

Il tavolo si rompe!

2.4.9 Equilibrio su un piano inclinato

Equilibrio di un punto materiale

Ritornando al problema dell'equilibrio si può ora affermare che:

La condizione perchè un punto materiale vincolato sia in equilibrio è che la somma di tutte le forze che gli sono applicate (comprese quelle vincolari) sia uguale al vettore nullo.

Il piano inclinato

Come applicazione dei concetti appena presentati analizziamo una situazione concreta e rispondiamo alla seguente domanda:

"Perchè è più facile spingere un oggetto in salita su un piano inclinato invece che sollevarlo direttamente?"

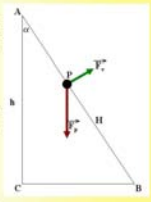
Esaminiamo il problema in dettaglio: consideriamo un oggetto appoggiato su un piano inclinato, che immaginiamo molto liscio (privo d'attrito).

Che forza bisogna applicargli per farlo restare in equilibrio?

Costruiamo un modello rappresentativo dell'oggetto come un punto materiale di massa m, obbligato a muoversi sul piano inclinato che è un vincolo.

Le forze che agiscono su questo oggetto sono due:

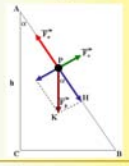
1. La forza-peso diretta verso il basso.
2. La forza vincolare, perpendicolare al piano inclinato.



Il piano inclinato

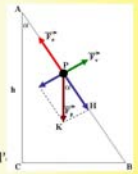
Per mantenere l'oggetto in equilibrio bisogna applicare una forza che controbilanci la risultante di queste due forze.
Poiché la reazione vincolare agisce in direzione perpendicolare al piano inclinato è conveniente scomporre la forza peso in due componenti: una perpendicolare ed una parallela al piano inclinato.

La componente perpendicolare al piano è compensata esattamente dalla reazione vincolare.



La forza equilibrante da esercitare per mantenere in equilibrio l'oggetto dovrà quindi essere: $\vec{F}_e = -\vec{F}_{//}$

Il piano inclinato



Dalla similitudine dei due triangoli ABC e PHK si ricava che:

$$F_e = \frac{h}{l} F_p$$

dove l = AB.

Dunque la forza necessaria per mantenere in equilibrio l'oggetto inclinato è pari ad una frazione (h/l) del suo peso.

Questa frazione è sempre minore di 1 in quanto il cateto di un triangolo rettangolo è sempre minore dell'ipotenusa.

In sostanza, usando un piano inclinato, si riesce a "diminuire" il peso dell'oggetto che si vuole trasportare.

E' stato proprio sfruttando questo principio che gli antichi egizi sono riusciti a sollevare le grosse pietre per la costruzione delle piramidi!

Esperimento: Equilibrio su un piano inclinato

Materiale
Scivolo. Macchinina. 2 dinamometri. Sostegno. Pesi con mollette.

Procedimento
Si misura il peso della macchinina, appendendola ad un dinamometro.

Si sistema la macchinina sullo scivolo. Ora il dinamometro segna una forza diversa poichè anche la forza di sostegno del piano collabora al mantenimento dell'equilibrio.

Esperimento: Equilibrio su un piano inclinato

Misuriamo la lunghezza degli spigoli dello scivolo che delimitano un triangolo rettangolo.

Ricordiamo la teoria dell'equilibrio sul piano inclinato e verifichiamo la relazione:

$$F_e = \frac{h}{l} F_p$$

Calcoliamo il rapporto tra lunghezza del cateto verticale e lunghezza dell'ipotenusa: $\frac{h}{l}$

Disponiamo un dinamometro parallelo al piano inclinato e un secondo dinamometro perpendicolare al primo. Passiamo un pezzo di filo sotto il paraurti della macchinina e ne leghiamo gli estremi agli anelli dei dinamometri. Ora spostiamo i dinamometri, senza variarne la direzione, fino a che il filo che sostiene la macchinina risulti formare un angolo retto.

Esperimento: Equilibrio su un piano inclinato

Leggiamo le misure sui dinamometri.

- Dinamometro perpendicolare al piano
  (questa è la forza pari a quella esercitata dal piano).
- Dinamometro parallelo al piano: F_e

Calcoliamo il rapporto tra questa forza e il peso: $\frac{F_e}{F_p}$

Verifichiamo che questo rapporto risulta uguale (entro gli errori sperimentali) al rapporto $\frac{h}{l}$.

Per cui si può ritenere verificata la relazione: $F_e = \frac{h}{l} F_p$

Un ancoraggio sicuro per arrampicare

Come esercizio per casa si può proporre il seguente problema legato ad una situazione reale:

Gli alpinisti usano durante le scalate degli accorgimenti come quello indicato in figura. Passando nel moschettone la corda a cui si è legati, si ottiene uno strumento di sicurezza che può fermare una caduta.
Nei corsi di alpinismo si raccomanda di fare in modo che l'angolo formato dal cordino non superi i 120°. Perché?

Capitolo 3

Il Tirocinio

Il tirocinio è stato svolto secondo due modalità: diretto e indiretto.
Nel tirocinio indiretto gli insegnanti supervisori hanno presentato gli obiettivi generali della SSIS e delle attività di tirocinio (diretto e indiretto) dei quattro semestri e ci hanno mostrato alcuni aspetti significativi della professionalità docente e del sistema scuola, offrendoci anche esempi diretti, tratti dalla loro esperienza.
Le attività di tirocinio diretto hanno previsto:

- Una prima fase orientativa sulla scuola, prendendola in esame sia come struttura (osservazione dell'istituto scolastico) sia come organizzazione (analisi del POF dell'istituto).
- Una seconda fase caratterizzata da una partecipazione attiva del tirocinante. É stato possibile infatti presentare personalmente alcune lezioni di fisica e di matematica (di seguito riportate); dialogare con gli alunni osservando la tipologia delle domande e delle difficoltà da essi presentate; collaborare con l'IDC nella fase di preparazione e di valutazione dei compiti in classe e delle verifiche orali.

Nei seguenti paragrafi sono riportate le lezioni presentate direttamente alla classe durante le attività di tirocinio diretto ed alcune lezioni presentate ed analizzate durante le attività del tirocinio indiretto. In particolare, di matematica sono presentate delle lezioni su:

- la retta;
- il calcolo combinatorio e la probabilità;
- la risoluzione dei triangoli.

Di fisica sono riportate lezioni su:

- i primi modelli atomici;
- cenni di fisica nucleare;
- forze ed equilibrio.

3.1 TIROCINIO DI MATEMATICA

3.2 La retta con Matcos

La seguente lezione è stata tenuta durante il tirocinio diretto alla III classe di un liceo scientifico PNI. Essa si inserisce nel modulo di Geometria analitica, ma soprattutto vuole essere di sostegno all'apprendimento dei contenuti proposti, mediante l'utilizzo del software didattico MatCos.

3.2.1 Elementi di programmazione didattica

Contenuti

- Equazione della retta
- Significato di coefficiente angolare ed intercetta
- Condizione di parallelismo
- Introduzione ai fasci di rette

Obiettivi

- Saper "tradurre" in linguaggio matematico, problemi di natura diversa.
- Descrivere una retta nel piano attraverso la sua equazione lineare
- Saper tracciare una retta nel piano cartesiano
- Conoscere il significato di coefficiente angolare ed intercetta
- Riconoscere i fasci di rette propri ed impropri

Strumenti e Metodologia:

- Utilizzo del calcolatore, come mediazione tra insegnante ed alunno, per svolgere una fase di simulazione virtuale finalizzata al raggiungimento dell'astrazione.
- Sperimentazione in ambiente MatCos, mediante schede operative guida che stimolano la formulazione di congetture, con il fine di rendere più intuitivo, efficace e partecipato il processo di apprendimento.
- Formalizzazione rigorosa dei concetti congetturati durante la fase di sperimentazione.

La lezione quindi è stata tenuta in laboratorio di informatica per consentire ai ragazzi di lavorare direttamente sul calcolatore e di partecipare attivamente alla lezione.

3.2.2 Introduzione alla retta

Per stimolare l'interesse e la curiosità degli studenti si è deciso di iniziare la lezione analizzando un problema di cui loro stessi fanno esperienza diretta, quotidianamente: il costo di una telefonata dal

loro cellulare.

Poniamo il seguente problema: si consideri un cellulare con un piano tariffario che prevede un costo di 0.20 euro al minuto.

Si riporti in una tabelle la spesa relativa ad una telefonata di 1 minuto, 2 minuti, 3 minuti, etc. Cosa si osserva?

Si nota che c'è sempre lo stesso legame tra la durata della telefonata ed il suo costo:

$$Costo = 0{,}20 * Durata.$$

Rappresentando sull'asse delle ascisse la durata e sull'asse delle ordinate il costo della telefonata, si traccino i punti ottenuti, nel programma MatCos:

```
Rifcart; Punto(1,0.20); Punto(2,0.40); Punto(3,0.60); Punto(4,0.80);
```

Cosa osservi?

Dall'esecuzione del programma si ottiene il grafico riportato in figura 3.1 dal quale si osserva che questi punti nel piano cartesiano sembrano disposti su una linea. Questa congettura che si può fare

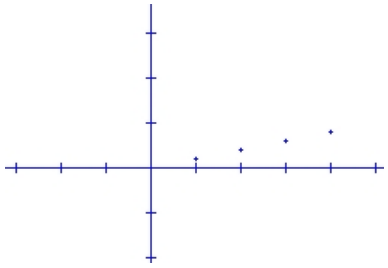


Figura 3.1: Alcuni punti rappresentanti il costo di alcune telefonate in funzione della loro durata.

osservando il posizionamento dei pochi punti tracciati, può essere rafforzata facendo tracciare (con un ciclo) molti punti che soddisfano la medesima relazione rintracciata nella tabella.

```
Rifcart; per (i da 1 a 20) esegui; Punto(i,0.20*i); fine;
```

Dall'esecuzione del programma si ottiene il grafico riportato in figura 3.2.

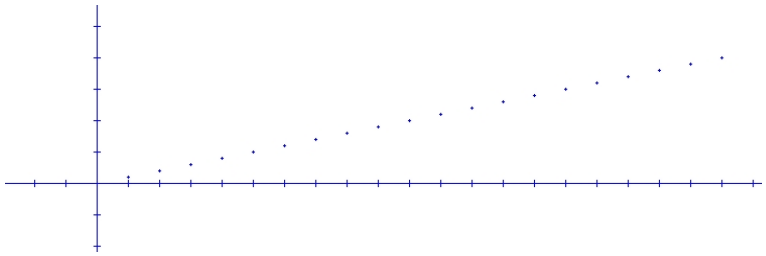


Figura 3.2: Esecuzione del programma MatCos con ciclo.

Ricordando ora che "per due punti passa una ed una sola retta" e introducendo il comando di MatCos: **RETTA(PUNTO,PUNTO)**, si può tracciare la retta scegliendo due qualsiasi dei punti considerati sopra, eseguendo il programma di prima dopo aver aggiunto le righe:

```
ColorePenna(255,0,255); retta(Punto(0,0),Punto(1,0.20));
```

Si ottiene il grafico riportato in figura 3.3 in cui si può osservare che tutti i punti tracciati con il ciclo giacciono sulla stessa retta e quindi la congettura: "i punti rappresentati stanno tutti su una linea" aderisce perfettamente al risultato ottenuto.

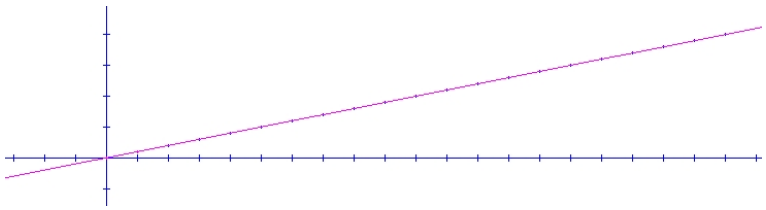


Figura 3.3: Esecuzione del programma MatCos precedente con l'aggiunta della retta passante per due tra i punti tracciati.

Viceversa si può fare verificare che prendendo molti punti a caso sulla retta, questi soddisfano tutti la proprietà:

$$y = 0.20x.$$

Per fare ciò basta eseguire il programma:

```
Rifcart; r=retta(Punto(0,0),Punto(1,0.20)); tabella=matrice(20,2);
Per (i da 1 a 20) esegui; A=puntoacaso_su(r); tabella(i,1)=A.x;
tabella(i,2)=A.y; fine; StampaMatr(tabella);
```

che produce la schermata riportata in figura 3.4.
Si può quindi congetturare che i punti che stanno sulla retta sono **tutti e solo** quei punti le cui coordinate soddisfano la relazione

$$y = 0.20 * x.$$

Osservando la retta tracciata, ora si può anche osservare che parlando 0 minuti si spendono 0 euro, che equivale a dire che la retta che descrive il costo della telefonata in funzione della durata, passa dall'origine del sistema di riferimento. Questo avviene perché il punto (0,0) soddisfa la condizione individuata prima: $y = 0.20 * x$; infatti $0 = 0.20 * 0$.
Osserviamo però che questa relazione è vera per qualsiasi "piano tariffario" per cui possiamo congetturare che qualsiasi relazione del tipo

$$y = mx$$

descriverà una retta passante per l'origine.

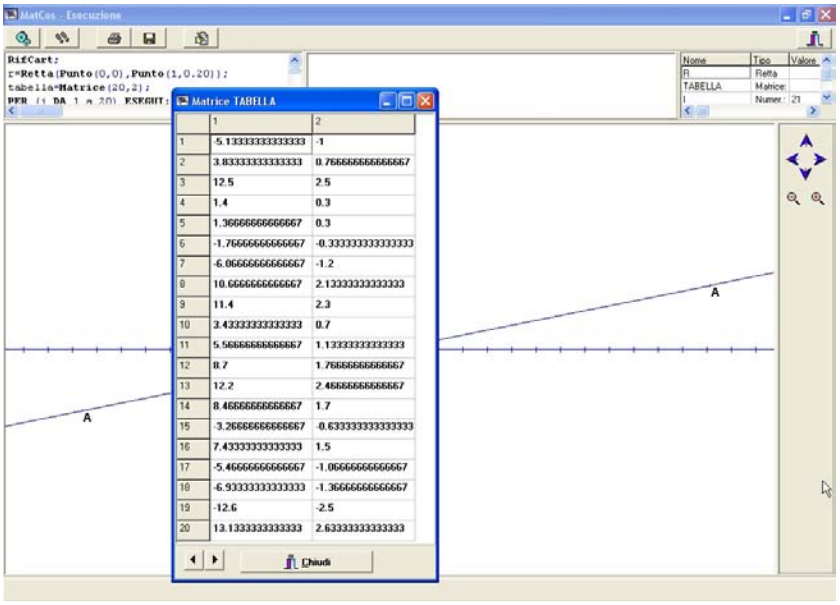


Figura 3.4: Programma MatCos per verificare la relazione che sussiste tra le coordinate dei punti di una data retta.

Per rafforzare questa intuizione, si può considerare il seguente programma che ci fa disegnare le rette relative a diversi piani tariffari (figura 3.5):

```
Rifcart; O=punto(0,0); x=1; per (m da 1 a 10) esegui; y=m*x;
P=punto(x,y); Colore(m); Retta(O,P); Fine;
```

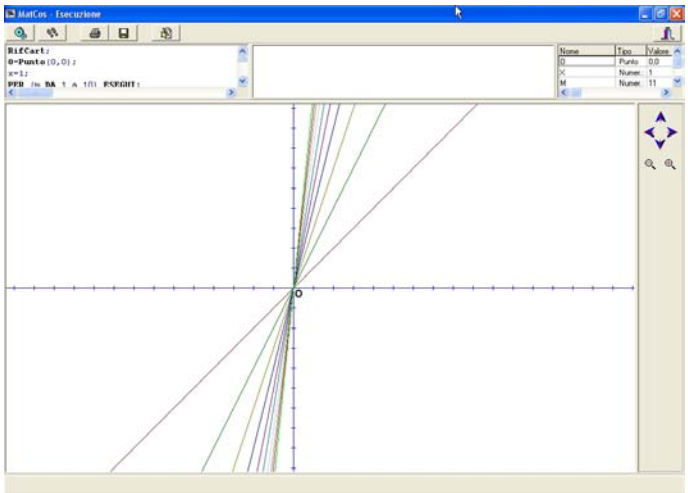


Figura 3.5: Rette rappresentanti diversi “piani tariffari”.

3.2.3 Formalizzazione retta passante per l'origine

Le rette passanti per l'origine sono quelle costituite da punti le cui ordinate sono proporzionali alle ascisse secondo un coefficiente opportuno m. Esse sono dunque descritte da equazioni della forma

$$y = mx$$

ed m è detto *coefficiente angolare*.

Prendendo due punti generici $P(x_p,y_p)$ e $Q(x_q,y_q)$ distinti dall'origine appartenenti alla retta e tracciando le proiezioni P' e Q' rispettivamente di P e Q sull'asse x si ottengono i triangoli simili OPP' e OQQ' per cui si ha $y_p/x_P = y_q/x_q$. Chiamiamo m questo rapporto; per cui si ha che tutti i punti (x,y) che appartengono alla retta soddisfano l'equazione $y = mx$.

3.2.4 Significato del coefficiente angolare

Il coefficiente angolare m è legato all'inclinazione, o pendenza, della retta in esame, come si poteva già intuire dall'esecuzione del precedente programma.

In particolare si può far verificare agli studenti che quando m è positivo la retta forma un angolo acuto con il semiasse positivo delle ascisse, mentre quando m è un numero negativo (figura 3.6), la retta forma con esso un angolo ottuso.

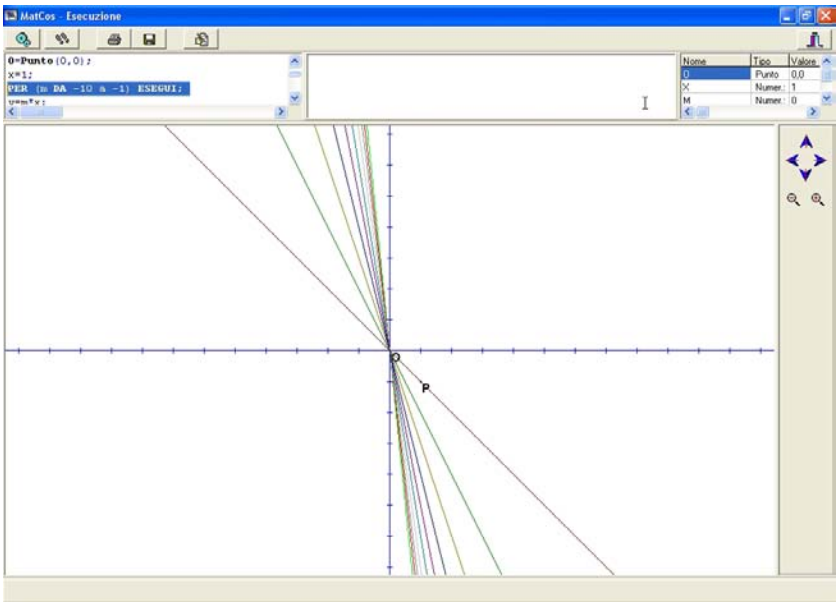


Figura 3.6: Esecuzione del programma MatCos precedente con valori di m negativi.

Un insieme di rette con coefficiente angolare variabile, ma passanti tutte per un punto formano un fascio di rette detto **fascio proprio**.

Il concetto di coefficiente angolare, come pendenza lo incontriamo ogni volta che vediamo un cartello

che indica la pendenza di una strada; essa è data infatti dal rapporto tra spostamento verticale e spostamento orizzontale, proprio come il coefficiente angolare ($m = y/x$ per x diverso da 0). Ad esempio il cartello stradale che segnala una discesa pericolosa con pendenza del 8% dice che spostandomi orizzontalmente di 100 metri mi sposto verticalmente di 8 metri.

3.2.5 Rette non passanti per l'origine

Consideriamo ora un piano tariffario in cui oltre al costo al minuto (pari a 0.20 euro) è previsto anche uno scatto alla risposta di 0.12 euro. Costruiamo una tabella che descriva le spese per una telefonata di 1 minuto, 2 minuti, 3 minuti, etc.. Osserviamo che la relazione che ora intercorre fra i valori x e y è data da

$$y = 0.20 * x + 0.12$$

In modo analogo al caso precedente, tracciando i punti della tabella e la retta passante per due punti, scelti fra quelli riportati in tabella si osserva che anche in questo caso il costo della telefonata in funzione della sua durata è descritto da una retta, però questa volta la retta non passa per l'origine degli assi.
Dall'esempio appena visto si osserva che tutti i punti che appartengono alla retta considerata soddisfano la seguente proprietà: $y = mx + n$. Tale espressione rappresenta proprio l'equazione in forma esplicita di una retta; m è detto coefficiente angolare e n è detta intercetta. In particolare per $n = 0$ si ottiene l'eq. generica di una retta passante per l'origine, come quelle viste prima.
Si può fare verificare che il valore n corrisponde all'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y. Per indagare il significato e le proprietà dell'intercetta, consideriamo il seguente programma che traccia 10 rette con coefficiente angolare fissato $m = 1$ e intercetta variabile (figura 3.7):

```
Rifcart; per (n da -5 a 5) esegui;
Colore(n);
Retta(1,n);
Fine;
```

In questo programma si è fatto uso del comando **RETTA(M,N)** che disegna una retta dando come parametri proprio il coefficiente angolare e l'intercetta. Si osserva che il numero n è legato allo "spostamento" della retta verso l'alto o verso il basso.
Tutte le rette però hanno la stessa inclinazione e sono parallele e ciò ci permette di intuire che la **condizione di parallelismo** tra due rette sia legato al coefficiente angolare (che deve essere lo stesso).
Un insieme di rette tutte parallele tra loro costituisce un fascio di rette detto **fascio improprio**.

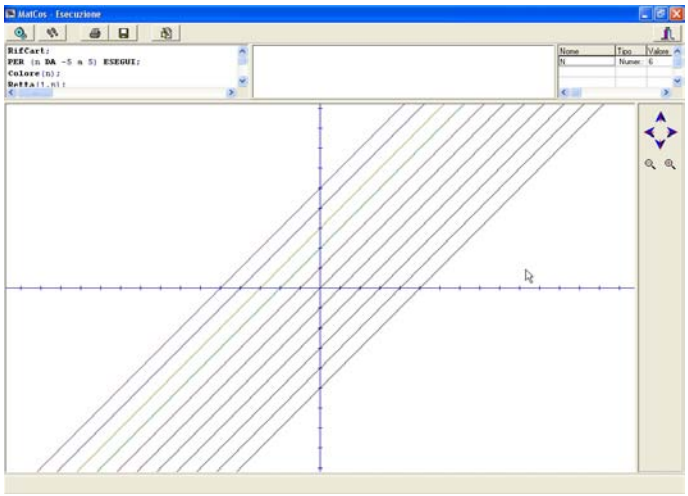


Figura 3.7: Esecuzione di un programma MatCos che traccia 10 rette con coefficiente angolare fissato ed intercetta variabile.

3.2.6 Rette parallele agli assi

Consideriamo ora alcune rette particolari: ad esempio le rette parallele all'asse x. Queste sono caratterizzate dall'avere punti che hanno tutti la stessa ordinata; inoltre queste rette hanno una pendenza (coefficiente angolare) nulla e sono quindi descritte da un'equazione del tipo $y = n$, con $n \in \mathbf{R}$.

Per quanto riguarda le rette "verticali" (asse y e sue parallele) esse sono identificate da tutti i punti che hanno uno stesso valore di ascissa: $x = k$ con $k \in \mathbf{R}$.

Una verifica di queste affermazioni si può effettuare con i programmi MatCos:

```
Rifcart; assey=retta(Punto(0,0),Punto(0,1));
r=Parallela(assey,punto(3,2)); Per (i da 1 a 10) esegui;
P=puntoacaso_su(r); Stampa("Il punto P sulla retta r ha coordinate:
(",P.x, " ,", P.y,")"); fine;
```

e

```
Rifcart; assex=retta(Punto(0,0),Punto(1,0));
r=Parallela(assex,punto(3,2)); Per (i da 1 a 10) esegui;
P=puntoacaso_su(r); Stampa("Il punto P sulla retta r ha coordinate:
(",P.x, " ,", P.y,")"); fine;
```

Questi programmi, come si vede dalle figure 3.8 e 3.9, tracciano rispettivamente una retta parallela all'asse y e una parallela al'asse x passanti per il punto (3,2). Dalle cordinate di 10 punti scelti a caso su queste rette si verificano le proprietà suddette.

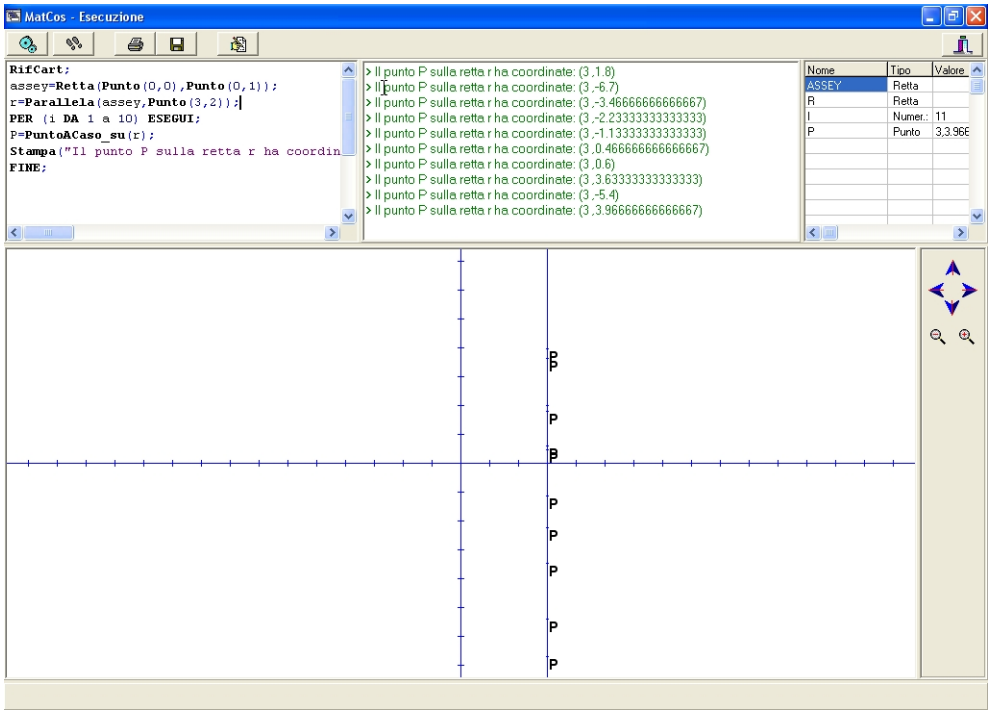


Figura 3.8: Programma MatCos per rette parallele all'asse y.

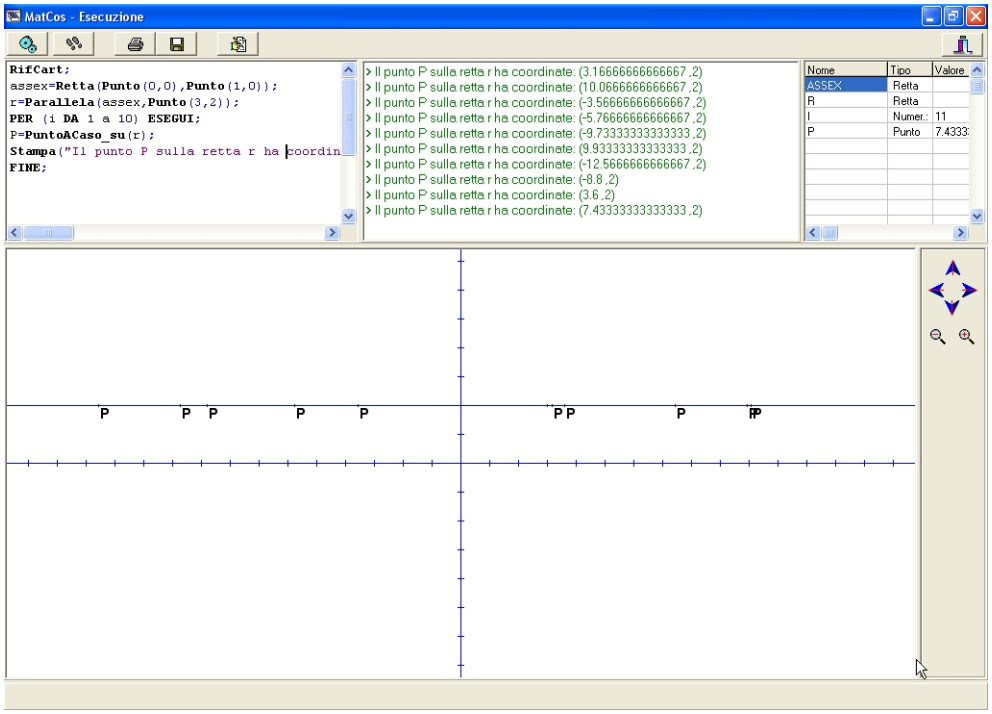


Figura 3.9: Programma MatCos per rette parallele all'asse x.

3.2.7 Equazione della retta in forma implicita

Non tutte le rette quindi si possono scrivere nella forma $y = mx + q$ (si pensi alle rette parallele all'asse y viste prima), in generale, infatti per includere in una sola rappresentazione tutte le rette si usa la scrittura:

$$ax + by + c = 0$$

con a e b non entrambi nulli, che è detta equazione generale di una retta in forma implicita.
Quando b è diverso da 0 ponendo $m = -a/b$ ed $n = -c/b$ si può passare alla forma esplicita $y = mx + n$ fino ad ora considerata.

Un'applicazione in fisica

Come esempio in cui applicare le nozioni apprese sulla retta, si può considerare un'esperienza in laboratorio di fisica in cui verificare ad esempio la legge di Hooke, mostrando che in questo caso il coefficiente angolare che si ricava è proprio la costante elastica della molla.

3.3 Calcolo combinatorio e Probabilità

Le seguenti lezioni sono state tenute durante il tirocinio diretto alla IV classe di un liceo scientifico PNI. Esse riguardano il calcolo combinatorio e i primi concetti di teoria della Probabilità.

3.3.1 Elementi di programmazione didattica

Contenuti

- Calcolo combinatorio (permutazioni, disposizioni e combinazioni)
- Definizioni di Probabilità
- Confronto tra le diverse definizioni

Obiettivi

- Saper "tradurre" in linguaggio matematico, problemi di natura diversa.
- Capire il significato di probabilità.
- Acquisire le diverse valutazioni della probabilità in relazione al particolare contesto

Strumenti e Metodologia: La prima lezione inizia con un'introduzione storica all'argomento ed è poi segnata da molti esempi concreti che motivano l'introduzione dei diversi concetti di calcolo combinatorio. La seconda lezione, invece presenta le diverse definizioni di probabilità, motivando il passaggio da una definizione all'altra mostrando i limiti della definizione in esame.
La spiegazione è sempre animata da domande e dal coinvolgimento diretto degli studenti ed è supportata anche dall'utilizzo del calcolatore e di un software didattico (MatCos).

3.3.2 Prima lezione

3.3.3 Introduzione dell'argomento

Prevedere, con la maggiore certezza possibile, gli avvenimenti futuri è sempre stata un'aspirazione dell'umanità. Il problema di valutare la probabilità che un evento possa verificarsi o no si presentò sin da tempi antichi. Basta pensare al trasporto merci via mare: il rischio di un naufragio è piuttosto alto. Sorsero così, intorno al 1300 le prime società di assicurazione che dovevano valutare al meglio la probabilità di un incidente per decidere, su questa base, un'adeguata tariffa. Si stimolarono così gli studi nel campo delle probabilità, ma ci furono troppe difficoltà nell'affrontare questioni così complesse che dipendono da tanti fattori.
I matematici, quindi pensarono di affrontare questo settore della matematica considerando problemi meno complessi, riguardanti, però, sempre il caso: i giochi d'azzardo.
É proprio con gli studi sul gioco d'azzardo che nasce tra il cinquecento e il seicento quel settore della matematica che oggi conosciamo come Probabilità. In generale questa branca della Matematica si

occupa di tutti quegli avvenimenti il cui svolgimento è legato al caso.
Con il Calcolo delle Probabilità è possibile esprimere in modo quantitativo, cioè mediante un numero, la maggiore o minore possibilità che un evento ha di realizzarsi; è possibile cioè "misurare" la probabilità di un evento.

3.3.4 Definizione classica

Consideriamo la seguente situazione: Due urne A e B con 10 palline ciascuna. A contiene 3 palline con un buono premio e sette palline vuote. B contiene 8 palline con il buono premio e 2 vuote. Da dove sceglieresti di estrarre una pallina?
Il buon senso ci suggerisce di estrarre dall'urna B in quanto in A c'è un numero inferiore di palline con premio rispetto a quelle in B.
E se A contenesse 3 palline con premio e 4 vuote e B contenesse 5 palline con premio e 6 vuote? Da dove sceglieresti di estrarre una pallina?
Il ragionamento fatto prima, ora non ci può aiutare... E' necessario quantificare la probabilità dell'evento a noi favorevole: l'estrazione di una pallina con premio. In questa seconda situazione è necessario considerare i valori relativi: in A le palline con premio sono 3 su 7, mentre in B sono 5 su 11; per cui essendo 3/7=0.43... e 5/11=0.45... conviene estrarre da B anche se c'è un maggior numero di palline vuote. Si può quindi enunciare la definizione classica di probabilità:

Definizione 3.3.1 *La **probabilità** del verificarsi di un evento è data dal rapporto fra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili, purchè questi siano tutti ugualmente possibili:*

$$p = \frac{casi\ favorevoli}{casi\ possibili}$$

3.3.5 Calcolo Combinatorio

Proponiamo ora alcuni esercizi che ci aiuteranno ad introdurre diversi concetti del calcolo combinatorio:

Esempio 1: Si consideri il lancio di un dado e si determini la probabilità che esca un numero dispari.

Esempio 2: Si consideri il lancio di due monete e si calcoli la probabilità che esca almeno una testa.

Per calcolare la probabilità è necessario saper contare il numero di casi possibili e il numero di casi favorevoli. Nel primo esercizio ciò è molto semplice: i casi possibili nel lancio di un dado sono 6 (le sei facce del dado) mentre quelli favorevoli sono 3 (i numeri dispari compresi tra 1 e 6), dunque la probabilità richiesta è data da 3/6=1/2.
Nel secondo esercizio, la situazione si complica un pò poichè abbiamo a che fare con il lancio di due

monete, ma ancora riusciamo a elencare tutti i casi possibili:

Testa Testa

Testa Croce

Croce Testa

Croce Croce.

I casi favorevoli all'evento "Esce almeno una testa" sono 3; per cui la probabilità è data da 3/4.

Ci accorgiamo subito che per calcolare il valore di una probabilità è necessario poter contare il numero dei casi favorevoli e di quelli possibili. Non sempre però questo calcolo è immediato, come nei due esempi precedenti. Esistono però degli strumenti che ci permettono di farlo con facilità. Consideriamo il seguente:

Esempio 3: In quanti modi possibili si può svolgere un torneo di tennis in cui vince chi si aggiudica due partite consecutive oppure si aggiudica un totale di tre partite.

In questo caso per risolvere l'esercizio possiamo utilizzare i cosiddetti **diagrammi ad albero**. Un diagramma ad albero è costituito da più nodi collegati da segmenti, detti rami.

Il diagramma ad albero che permette di risolvere l'esempio 3 è mostrato nella figura 3.10, da cui si

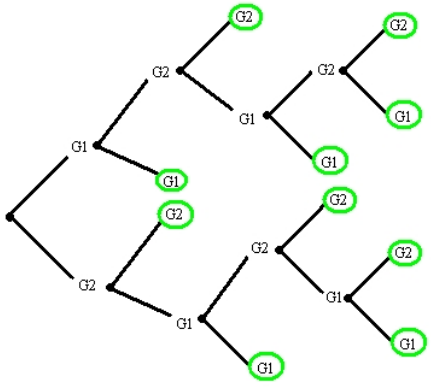


Figura 3.10: Diagramma ad albero relativo all'esempio 3.

evince che ci sono 10 modi possibili in cui si può svolgere il torneo (le 10 "foglie" del diagramma).

Esempio 4: Si estraggano da un mazzo di 40 carte le dieci carte di spade, le si mescolino e quindi le si scoprano una alla volta. Qual è la probabilità che esse si presentino esattamente nell'ordine: asso, due tre quattro, cinque, sei, sette, donna, cavallo e re.

In questo caso contare manualmente i casi possibili e quelli favorevoli diventa più complicato ed anche il diagramma ad albero sarebbe troppo complesso. É necessario un altro strumento: le permutazioni.

Permutazioni semplici

Consideriamo il problema di determinare quanti sono gli anagrammi (anche senza significato) della parola MELA.
Molto semplicemente si può seguire questo ragionamento: ci sono 4 possibilità di scegliere la prima lettera; per ognuna di queste ci sono 3 possibilità (le lettere rimanenti) per scegliere la seconda lettera; sulla scelta della terza lettera ci sono 2 possibilità e infine rimane solo l'ultima lettera. Dunque gli anagrammi possibili della parola MELA sono $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.
Questo modo di procedere si basa su quello che è definito il **principio fondamentale del calcolo combinatorio** che si può enunciare nel modo seguente:

Definizione 3.3.2 *Si realizzino n esperimenti. Si supponga che il primo esperimento abbia n_1 esiti possibili, che per ognuno di questi il secondo esperimento abbia n_2 esiti possibili e così via fino all'n-esimo esperimento che avrà n_n esiti possibili. Allora, se sequenze distinte di esiti degli n esperimenti producono esiti finali distinti, gli n esperimenti hanno in tutto $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_n$ esiti possibili.*

Da questo principio si ricava un primo strumento del Calcolo Combinatorio che permette di determinare il numero di riordinamenti possibili di n oggetti distinti.

Definizione 3.3.3 *Dati n elementi distinti, si dicono **permutazioni semplici** di tali elementi tutti i possibili raggruppamenti formati in modo che ognuno contenga tutti gli n elementi e differisca dagli altri per l'ordine secondo il quale gli n elementi si susseguono:*

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$$

Conoscendo ora le permutazioni, l'esercizio 4 diventa di immediata risoluzione: i casi possibili sono infatti tutti i possibili riordinamenti delle 10 carte di spade: 10!, mentre di casi favorevole ce n'è uno soltanto; dunque la probabilità richiesta è pari a $\frac{1}{10!}$.
Consideriamo ora il seguente:

Esempio 5: Una partita di calcio tra la squadra A e la squadra B è terminata con il risultato di 4 a 3 a favore della squadra A. In quanti modi diversi possono essersi succeduti i risultati?

In questo caso non sono sufficienti neanche le permutazioni semplici. I 4 gols della squadra A e i 3 gol della squadra B sono indistinguibili tra loro.

Permutazioni con ripetizioni

Ricollegandoci al problema degli anagrammi di una parola, è come dover considerare la parola TELEVISIONE in cui le tre E sono indistinguibili tra loro, così come le due I e quindi si ha un

numero inferiore di riordinamenti. In particolare si hanno le cosiddette permutazioni con ripetizioni la cui valutazione è espressa dalla seguente:

Definizione 3.3.4 *Il numero di permutazioni di n oggetti di cui k_1 uguali ad uno stesso oggetto A, k_2 uguali ad uno stesso oggetto B, ..., k_m uguali ad uno stesso oggetto Z, è dato dalla formula:*

$$P_n^{(k_1,k_2,\ldots,k_m)} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$$

L'esempio 5 è dunque risolto applicando la formula appena presentata:

$$Numero\ di\ modi\ diversi = \frac{7!}{4!\cdot 3!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 3\cdot 2} = 35.$$

Consideriamo ora il seguente:

Esempio 6: Qual è la probabilità di azzeccare un codice segreto composto da tre cifre diverse tra loro? E se le cifre non fossero necessariamente diverse tra loro?

Sopraggiunge qui un ulteriore problema: non si tratta più di determinare dei riordinamenti, ma dei raggruppamneti di n elementi in gruppi di k.

Disposizioni semplici e con ripetizione

Si tratta delle cosiddette disposizioni di n oggetti a k a k.
Per il principio fondamentale del calcolo combinatorio esse risultano:

$$D_{n,k} = n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

quando gli elementi non possono ripetersi, mentre sono uguali a:

$$D'_{n,k} = n^k$$

quando ciascun elemento può essere ripetuto più volte nel gruppo considerato.

Definizione 3.3.5 *Dati n elementi distinti e un numero $k \leq n$, si dicono **disposizioni semplici** tutti i raggruppamenti che si possono formare con gli elementi dati, in modo che ogni raggruppamento ne contenga k tutti distinti tra loro e che due raggruppamenti differiscano tra loro o per qualche elemento oppure per l'ordine secondo il quale gli elementi si susseguono.*

Definizione 3.3.6 *Dati n elementi distinti si dicono **disposizioni con ripetizione** di classe k tutti i raggruppamenti che si possono formare con gli elementi dati, in modo che ogni raggruppamento ne contenga k (con eventuali ripetizioni di uno stesso elemento) e che due raggruppamenti differiscano tra loro o per qualche elemento oppure per l'ordine secondo il quale gli elementi si susseguono.*

Si può dunque risolvere l'esempio sul codice segreto applicando la formula delle disposizioni semplici di 10 cifre in gruppi di 3:

$$D_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Come applicazione delle disposizioni con ripetizione si può pensare al calcolo del numero di colonne da giocare per fare 13 al Totocalcio: Si tratta di tutti i possibili raggruppamenti a gruppi di 13 dei tre simboli 1, x, 2. Per cui si ha che per assicurarsi la vincita bisogna giocare ben

$$3^{13} \textit{ colonne}.$$

Rimanendo in tema di vincite al gioco, consideriamo infine il seguente:

Esempio 7: Qual è la probabilità di vincere un terno al lotto?

Questa volta ci troviamo di fronte ad una situazione diversa dalle precedenti, in quanto ora non è più importante l'ordine con cui sono disposti gli elementi.

Combinazioni

Un altro strumento del calcolo combinatorio sono infatti le cosiddette combinazioni di n oggetti a gruppi di k. Ricaviamone la formula a partire dalle disposizioni semplici:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Definizione 3.3.7 *Si chiama* ***combinazione*** *di n elementi presi a k a k (con $k \leq n$), un qualunque sottoinsieme di k elementi di un dato insieme di n elementi, tutti distinti tra loro.*

La probabilità di vincere un terno al Lotto è data dunque dalle combinazioni di 87 numeri (quelli rimanenti una volta estratti i tre numeri giocati) a 2 a 2 diviso tutti i possibili raggruppamenti di 90 numeri a 5 a 5:

$$\frac{C_{87,2}}{C_{90,5}} \simeq \frac{1}{11748}.$$

3.3.6 Seconda lezione

3.3.7 Limiti della definizione classica

Iniziamo questa seconda lezione ricordando la definizione classica di probabilità e mettendo in luce i limiti che essa possiede:

- É applicabile quando tutti gli esiti dell'esperimento hanno uguale probabilità di verificarsi. Ciò porta ad una contraddizione logica (si usa il concetto di probabilità all'interno della sua stessa definizione) ed inoltre non sempre accade ciò: si pensi ad un incontro di calcio oppure alla possibilità che un pezzo prodotto da una macchina sia difettoso.
- É applicabile solo quando si conosce il numero di esiti possibili dell'esperimento ed esso sia un numero finito.

3.3.8 Definizione frequentistica

Esiste un certo legame tra la frequenza di un evento ripetibile e la probabilità dello stesso evento. Proprio questo legame portò a formulare la:

Legge empirica del caso
Se si esegue un grande numero di prove, tutte nelle stesse condizioni, la frequenza relativa di un evento assume valori prossimi alla sua probabilità, e l'approssimazione cresce all'aumentare del numero di prove.

Si può quindi dare una nuova definizione di probabilità:

Definizione 3.3.8 *La probabilità di un evento è la sua frequenza relativa, calcolata su un numero molto grande di prove eseguite nelle stesse condizioni.*

Esempio: Una casa automobilistica vuole offrire ai suoi clienti una speciale garanzia contro i guasti di qualunque tipo per un certo modello di automobile nei primi tre anni dall'acquisto. Allo scopo di valutare il costo di una tale garanzia vuole conoscere la probabilità dell'evento "guasto entro i primi tre anni". Viene commissionata perciò un'apposita statistica, da cui risulta che, su 12512 auto, 431 hanno avuto almeno un guasto nei primi tre anni di vita. In base a tali risultati si può affermare che la probabilità che quel modello di automobile abbia un guasto nei primi tre anni di vita è $\frac{431}{12512} = 0.03444... \simeq 3.4\%$

3.3.9 Programma MatCos per la Legge Empirica del Caso

Si può facilmente implementare in MatCos un programma che possa far verificare la legge empirica del caso. Simulando il lancio di un oggetto sul piano cartesiano e valutando la probabilità che

essa ricada in uno dei quattro quadranti. Considerando l'oggetto puntiforme, il lancio può essere simulato dalla scelta casuale di un punto con il comando PUNTO_A_CASO e successivamente si potrà valutare la frequenza relativa di ciascuno dei quattro quadranti.

```
Rifcart; quad1=0; quad2=0; quad3=0; quad4=0;
n=legginum("Inserisci il numero di lanci");
per (i da 1 a n) esegui; P=Punto_A_caso; x=P.x; y=P.y;
SE ((x>=0) e (y>=0)) ALLORA quad1=quad1+1;
SE ((x<0) e (y>=0)) ALLORA quad2=quad2+1;
SE ((x<0) e (y<0)) ALLORA quad3=quad3+1;
SE ((x>=0) e (y<0)) ALLORA quad4=quad4+1;
fine; Prob1=quad1/n; Prob2=quad2/n; Prob3=quad3/n; Prob4=quad4/n;
stampa("La frequenza relativa nel Primo Quadrante è:  ",prob1);
stampa("La frequenza relativa nel Secondo Quadrante è:  ",prob2);
stampa("La frequenza relativa nel Terzo Quadrante è: ",prob3);
stampa("La frequenza relativa nel Quarto Quadrante è:  ",prob4);
```

L'esecuzione del programma porta alla visualizzazione di una schermata come quella mostrata in figura 3.11.

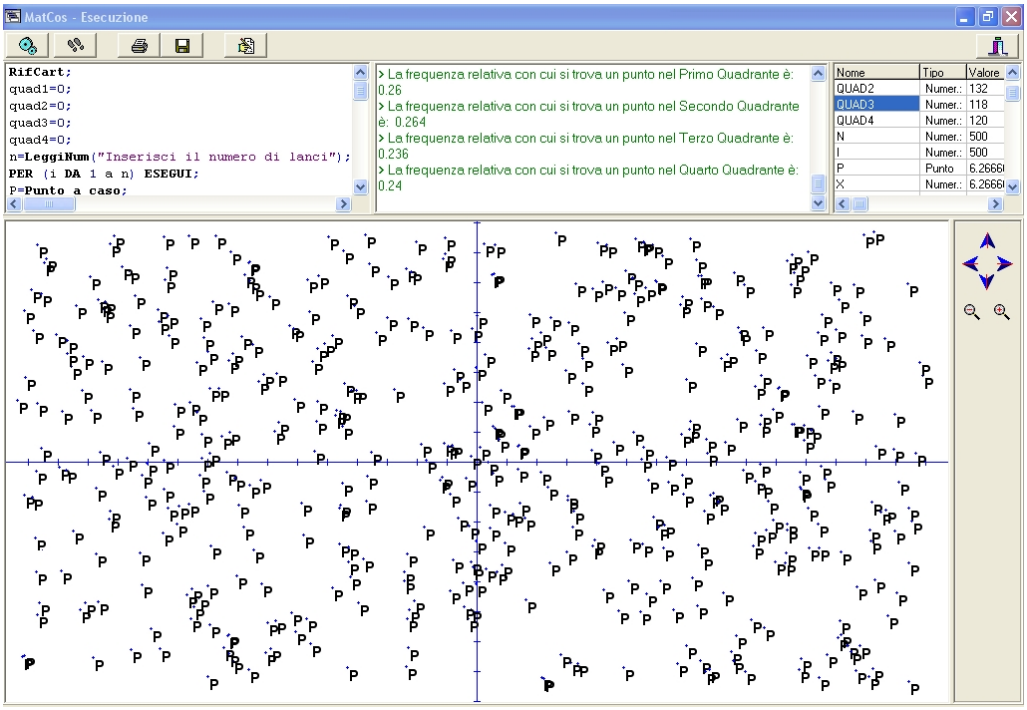


Figura 3.11: Esecuzione del programma MatCos per la legge empirica del caso.

Si può fare osservare agli studenti come al crescere del numero di lanci la frequenza relativa tende sempre più ad avvicinarsi al valore teorico della probabilità: 1/4=0.25.

Limiti della definizione frequentistica

Anche la definizione frequentistica ha i suoi limiti:

- non dà il valore esatto di probabilità di un evento, ma solo una sua approssimazione.
- si può applicare solo a eventi ripetibili (non vale ad esempio per determinare la probabilità che vinca una squadra in un incontro di calcio.)

3.3.10 Definizione soggettiva

La definizione frequentistica, di tipo statistico, è strettamente legata alla ripetibilità dell'evento. Nel caso di eventi irripetibili (incontro di calcio, corsa dei cavalli, ...) si può dare un'altra definizione di probabilità, detta soggettiva.

Definizione 3.3.9 *La probabilità di un evento è il rapporto tra il prezzo che si è disposti a perdere se l'evento non si avvera e la posta che si ottiene se si verifica l'evento.*

Esempio: Tizio decide di scommettere 10 euro sulla vittoria della Juventus in un incontro di calcio, sapendo che in caso di vittoria incasserà 75 euro. Qual è la probabilità che egli attribuisce alla vittoria della Juventus?
Si ottiene semplicemente: $p = 10/75 \rightarrow p = \frac{2}{15}$.

3.3.11 Confronto

Abbiamo visto tre modi diversi per valutare la probabilità di un evento e queste sono applicabili solo in determinate circostanze. Laddove si possano applicare le tre definizioni, la valutazione soggettiva dovrà necessariamente coincidere con il valore ottenuto dalla definizione classica e anche quello ottenuto dalla frequentistica dovrà tendere al valore oggettivo della probabilità (definzione classica).
Analizziamo ora un caso in cui risultino applicabili tutte e tre le definizioni proposte: consideriamo il gioco della *roulette*.
Una delle regole del gioco è che si può puntare 1 sul "rosso" ricevendo in cambio 2. La probabilità soggettiva che si accetta, giocando, è dunque data da:

$$p = \frac{1}{2}.$$

Ora i numeri sulla roulette sono 18 neri, 18 rossi e lo 0 che non ha colore ed è favorevole al banco. Perciò la valutazione oggettiva (definizione classica) della probabilità che esca un numero rosso è data da:

$$p = \frac{18}{37} = 0.49$$

mentre la probabilità che esca un numero nero o lo zero, cioè la probabilità di perdere è data da:

$$p = \frac{19}{37} = 0.51.$$

Anche statisticamente si può stimare questa probabilità, infatti al crescere del numero di lanci si osserva che la frequenza relativa tende proprio alla probabilità oggettiva.
Si può concludere dunque che la ricchezza del casinò è fondata sullo 0.

3.4 Tirocinio indiretto: Risoluzione dei triangoli

Il seguente Modulo relativo alla **Trigonometria** è rivolto ad un quarto anno di liceo scientifico ed è stato suddiviso in due unità didattiche:

1. Risoluzione di un triangolo rettangolo e applicazioni (4 ore).
2. Risoluzione di un triangolo qualunque e applicazioni (5 ore).

Prerequisiti: Geometria piana. Goniometria. La retta. Alcune nozioni di fisica (per le applicazioni)		
Unità di Apprendimento	**Contenuti**	**Obiettivi**
1 Risoluzione di un triangolo rettangolo e applicazioni (4 ore)	• Nota storica sulla nascita della trigonometria • Teoremi sui triangoli rettangoli. • Risoluzione dei triangoli rettangoli. • Applicazioni dei teoremi sui triangoli rettangoli.	• Saper risolvere triangoli rettangoli. • Individuare e saper applicare in altri contesti (matematici e non) i concetti fondamentali della trigonometria.
2 Risoluzione di un triangolo qualunque e applicazioni (5 ore)	• Teoremi sui triangoli qualsiasi. • Risoluzione di un triangolo qualsiasi. • Applicazioni dei teoremi sui triangoli qualsiasi	• Saper risolvere triangoli qualsiasi. • Individuare e saper applicare in diversi contesti i concetti fondamentali della trigonometria. • Saper impostare problemi legati ad altre discipline, costruendone una modellizzazione matematica e applicando alcuni concetti teorici studiati.

3.4.1 Elementi di programmazione didattica

Nei seguenti paragrafi è descritto come sono state strutturate le due unità didattiche, presentando gli argomenti e l'impostazione di ciascuna lezione.

Risoluzione di un triangolo rettangolo e applicazioni

La prima unità didattica prevede l'acquisizione dei seguenti **CONTENUTI**:

- Note storiche sul perché è nata la trigonometria.
- Seno, coseno e tangente di un angolo acuto.
- Teoremi sui triangoli rettangoli.
- Risoluzione dei triangoli rettangoli.
- Applicazioni dei teoremi sui triangoli rettangoli in matematica ed in altre discipline.

Come obiettivo essa si propone di raggiungere lo sviluppo delle seguenti **COMPETENZE**:

- Individuare e saper applicare in altri contesti (matematici e non) i concetti fondamentali della trigonometria.

- Saper "tradurre" in linguaggio matematico, problemi di natura diversa.

Questa unità didattica sarà sviluppata in 4 ore: 2 ore di lezione, 2 ore di esercitazione.
Nella *prima lezione* verranno introdotte alcune notizie storiche per spiegare le origini della trigonometria. Successivamente verrà presentato in dettaglio l'oggetto di studio della trigonometria (relazioni metriche tra i lati e gli angoli di un triangolo) e si procederà, come si fa in genere in matematica dallo studio di una particolare famiglia di triangoli: i triangoli rettangoli per poi cercare di estendere i risultati per un triangolo qualunque. In particolare verrà mostrato come a partire dalle definizioni di funzioni goniometriche si possano dedurre due importanti risultati sui triangoli rettangoli. Verrà infine mostrato cosa significa risolvere un triangolo e quali sono gli elementi necessari per risolvere un triangolo rettangolo.
Nella *seconda lezione* verranno presentate diverse applicazioni dei teoremi sui triangoli rettangoli in ambito matematico e fisico: Area di un triangolo e di un quadrilatero; Coefficiente angolare di una retta; Coordinate polari; Rotazioni degli assi cartesiani; Scomposizione di vettori.

Risoluzione di un triangolo qualunque e applicazioni

La seconda unità didattica prevede l'acquisizione dei seguenti **CONTENUTI**:

- Teoremi sui triangoli qualsiasi.
- Risoluzione di un triangolo qualsiasi.
- Applicazioni dei teoremi sui triangoli qualsiasi.

Come obiettivo essa si propone di raggiungere lo sviluppo delle seguenti **COMPETENZE**:

- Individuare e saper applicare in diversi contesti i concetti fondamentali della trigonometria.
- Saper impostare problemi legati ad altre discipline, costruendone una modellizzazione matematica e applicando alcuni concetti teorici studiati.

Questa unità didattica sarà sviluppata in 5 ore: 2 ore di lezione, 3 ore di esercitazione.
Nella *prima lezione* verranno presi in esame triangoli qualsiasi e verranno presentati i seguenti teoremi:

- Teorema dei seni.
- Teorema del coseno (o di Carnot).

Verranno estratte le condizioni necessarie per l'applicazione di questi teoremi e verranno analizzati i quattro casi che si possono presentare nella risoluzione di un triangolo qualsiasi.
Nella *seconda lezione* saranno mostrate diverse applicazioni della trigonometria in ambiti diversi: in geometria (mediane di un triangolo); in topografia (altezza di una torre accessibile e inaccessibile; distanza tra due punti separati da un ostacolo; distanza tra due punti non entrambi accessibili; distanza tra due punti entrambi inaccessibili); in astronomia (distanza Terra-Luna; raggio della Terra).

Strumenti e metodologia

La presentazione di ogni argomento verrà motivato dalla sua utilità nella risoluzione di problemi concreti. La spiegazione sarà sempre animata da domande e coinvolgimento diretto degli studenti e sarà supportata anche dal'utilizzo del calcolatore e di un software didattico (MatCos). L'utilizzo del calcolatore, come mediazione tra insegnante ed alunno, permette di svolgere una fase di simulazione virtuale finalizzata al raggiungimento dell'astrazione. La sperimentazione in ambiente MatCos, mediante schede operative guida, stimola la formulazione di congetture e rende così più intuitivo, efficace e partecipato il processo di apprendimento.
Successivamente verranno formalizzati in modo rigoroso i concetti congetturati durante la fase di sperimentazione. Il passaggio da un argomento a quello successivo sarà sempre motivato e rafforzato da collegamenti e confronti fra gli argomenti in esame.
Le esercitazioni prevederanno esercizi strettamente collegati a problemi concreti in modo da mostrare operativamente l'utilità degli strumenti teorici studiati nella risoluzione di problemi reali. Nelle prove di verifica, saranno proposti esercizi a risposta chiusa, per verificare l'acquisizione dei concetti teorici fondamentali, ed esercizi a risposta aperta (sempre relativi a problemi reali) per verificare l'acquisizione di abilità e competenze nell'applicare in situazioni concrete i concetti teorici acquisiti.

Lezioni dettagliate

Nei seguenti paragrafi sono riportate in modo dettagliato le lezioni delle due unità didattiche previste in questo modulo:

- Risoluzione di un triangolo rettangolo.
- Applicazioni dei teoremi sui triangoli rettangoli.
- Risoluzione di un triangolo qualsiasi.
- Applicazioni trigonometriche in topografia e astronomia.

3.4.2 Lezione 1: Risoluzione di un triangolo rettangolo

Per stimolare l'interesse e la curiosità degli studenti si può iniziare la lezione analizzando alcuni problemi concreti:

Esempio 1: Si vuole installare su una terrazza di Roma un pannello solare quadrato, con il lato lungo 3 m. I costruttori raccomandano di installare il pannello in modo che formi con il piano orizzontale un angolo di 10° inferiore a quello della latitudine del luogo (trovandosi Roma alla latitudine di 41°, il pannello dovrà essere inclinato di 31°). A che altezza dal pavimento della terrazza arriverà la sommità del pannello? (figura 3.12)

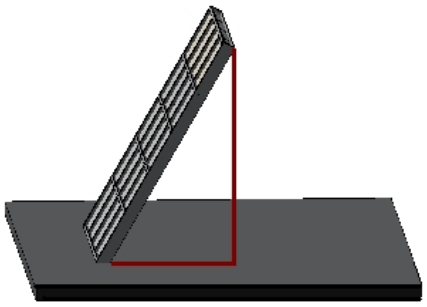


Figura 3.12: Schematizzazione esempio 1

Esempio 2: Determinare l'altezza della torre di Pisa sfruttando l'ombra che essa crea a mezzogiorno. (figura 3.13)

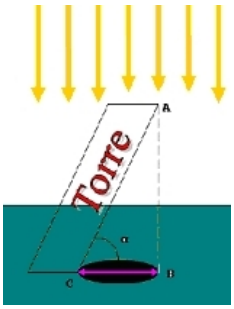


Figura 3.13: Schematizzazione esempio 2

Esempio 3: Che angolo forma con l'orizzontale una strada che ha una pendenza del 100%? (figura 3.14)

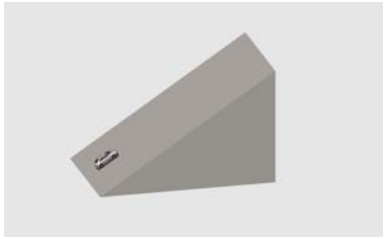


Figura 3.14: Schematizzazione esempio 3

Esempio 4: Calcolare la distanza dalla costa di una nave avvistata sotto un certo angolo $\alpha = 30°$, rispetto alla verticale, da un faro alto 150 metri. (figura 3.15)

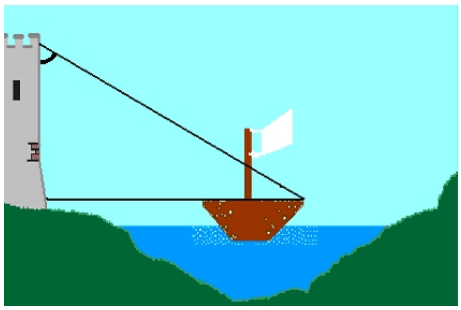


Figura 3.15: Schematizzazione esempio 4

"Traducendo" in linguaggio matematico i problemi appena proposti ci si accorge che essi si possono facilmente schematizzare utilizzando un triangolo rettangolo (come si vede nelle figure 3.12, 3.13, 3.14 e 3.15) e si evince l'esigenza di indagare le relazioni tra gli elementi che costituiscono un tale triangolo (trigonometria).

Anche in contesti meno "moderni" sono stati affrontati problemi analoghi.

La trigonometria nasce infatti dal desiderio di applicazioni all'astronomia, per prevedere i moti e le posizioni dei corpi celesti e per aiutare a determinare l'ora, compilare i calendari, e per essere di aiuto alla navigazione e allo studio della geografia. Successivamente ha trovato ulteriori applicazioni in svariati campi tecnici e scientifici, anche molto lontani dall'astronomia.

Proprio grazie alla trigonometria è stato possibile stimare, sin dai tempi antichi, il raggio della Terra e le distanze Terra-Sole e Terra-Luna. Nel corso delle lezioni vedremo proprio quale fu il procedimento che portò alla determinazione di tali misure.

La trigonometria ha lo scopo di stabilire delle relazioni metriche tra i lati e gli angoli di un triangolo. Risolvere un triangolo significa determinare gli elementi incogniti, noti tre dei suoi elementi, purchè almeno uno di questi sia un lato.

Perchè è necessaria questa precisazione?

Se di un triangolo fossero noti solo i tre angoli, il triangolo non risulterebbe definito perchè vi sono infiniti triangoli, tutti simili tra loro aventi quei tre angoli. Inoltre notiamo che dare i tre angoli equivale (in un triangolo generico) a darne solo due perchè il terzo è subito determinabile, essendo il supplementare della somma degli altri due.

Nell'affrontare questo nuovo tema, seguiamo il procedimento tipico della matematica: iniziamo con l'analizzare una particolare famiglia di triangoli: i triangoli rettangoli, e poi cercheremo di affrontare lo stesso problema per un triangolo qualsiasi.

Semplicemente utilizzando la similitudine tra triangoli si possono ricavare due importanti teoremi sui triangoli rettangoli. Cerchiamo di guidare gli studenti alla formulazione di questi teoremi.

Eseguiamo in Matcos il seguente programma:

```
Rifcart; C=Punto(0,0); A=punto; B=Punto(A.x,0);
Segmento(A,B); AB=distanza(A,B); segmento(C,A);
CA=Distanza(c,A); CB=Distanza(C,B); r=retta(C,A);
A1=punto_su(r); B1=Punto(A1.x,0); Segmento(A1,B1); A1B1=distanza(A1,B1);
A2=punto_su(r); B2=Punto(A2.x,0); Segmento(A2,B2); A2B2=distanza(A2,B2);
CA2=distanza(C,A2); CA1=distanza(C,A1); CB1=distanza(C,B1); CB2=distanza(C,B2);
alfa=ampiezza(angolo(b,c,a)); stampa("il rapporto tra AB e CA è ", AB/CA);
stampa("il rapporto tra A1B1 e CA1 è ", A1B1/CA1);
stampa("il rapporto tra A2B2 e CA2 è ", A2B2/CA2);
stampa("il rapporto tra AB e CB è ", AB/CB);
stampa("il rapporto tra A1B1 e CB1 è ", A1B1/CB1);
stampa("il rapporto tra A2B2 e CB2 è ", A2B2/CB2);
stampa("il rapporto tra CB e CA è ", CB/CA);
stampa("il rapporto tra CB1 e CA1 è ", CB1/CA1);
stampa("il rapporto tra CB2 e CA2 è ", CB2/CA2);
```

Dall'esecuzione del programma che produce la schermata mostrata in figura 3.16 si può osservare che i rapporti opportunamente costruiti considerando i triangoli rettangoli ACB, $A1CB1$ e $A2CB2$ si mantengono costanti.

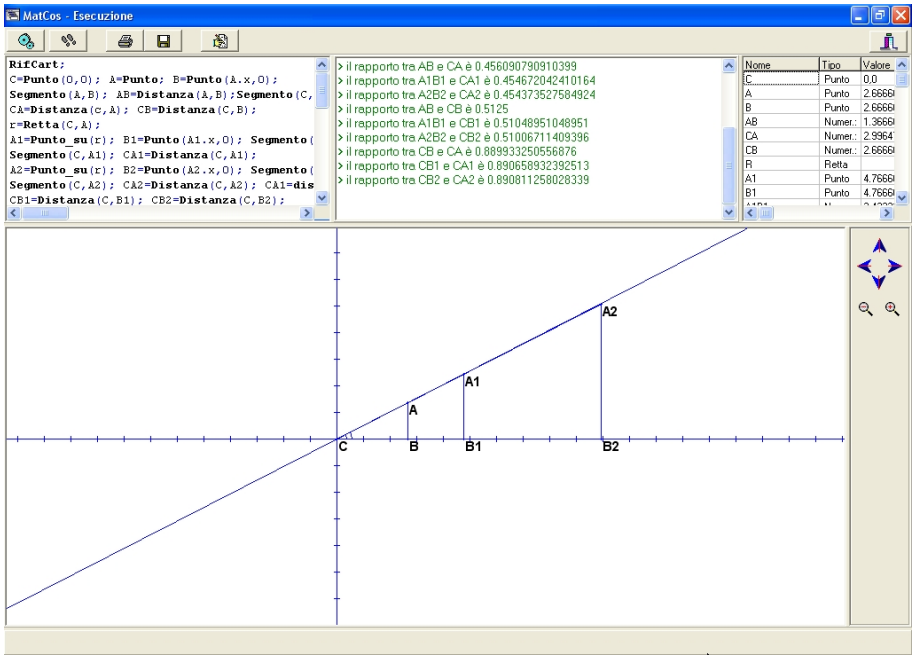


Figura 3.16: Esecuzione di un programma MatCos sui triangoli rettangoli.

Si ppuò quindi congetturare che essi siano legati all'angolo in C e valgano per qualsiasi triangolo rettangolo.

Per rafforzare questa congettura si può modificare il programma di sopra introducendo un ciclo che sceglie dieci punti a caso sulla retta AO e determina i corrispondenti rapporti con i lati OB.

```
Rifcart;
C=Punto(0,0); A=punto; r=retta(C,A);
Per (i da 1 a 10) esegui;
B=Punto(A.x,0);
Segmento(A,B); AB=distanza(A,B);
segmento(C,A); CA=Distanza(C,A);
CB=Distanza(C,B);
stampa("il rapporto tra AB e CA è ", AB/CA);
stampa("il rapporto tra AB e CB è ", AB/CB);
stampa("il rapporto tra CB e CA è ", CB/CA);
A=puntoacaso_su(r);
fine;
```

L'esecuzione di questo programma porta alla schermata mostrata in figura 3.17.

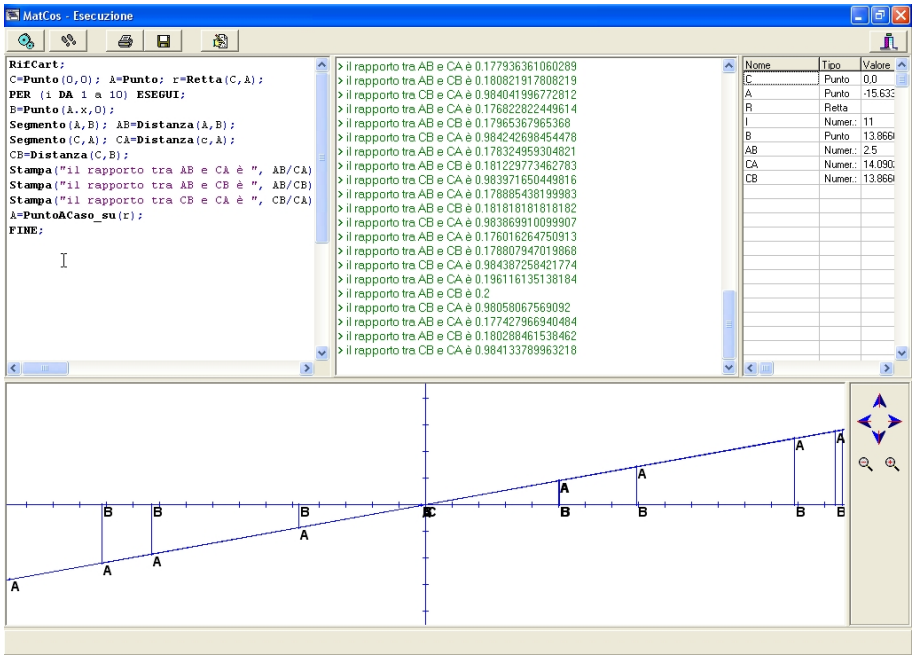


Figura 3.17: Esecuzione di un programma MatCos (con ciclo) per introdurre i Teoremi sui triangoli rettangoli.

A questo punto si possono intodurre le seguenti definizioni:

Seno, coseno e tangente di un angolo acuto

Dato un angolo acuto α:

Si chiama **coseno** di α e si indica con $\cos\alpha$ il rapporto tra la misura del lato adiacente e la misura dell'ipotenusa di un qualsiasi triangolo rettangolo avente l'angolo α come uno dei suoi angoli acuti

$$\cos\alpha = \frac{lato\ adiacente}{ipotenusa}.$$

Si chiama **seno** di α e si indica con $\sin\alpha$ il rapporto tra la misura del lato opposto e la misura dell'ipotenusa di un qualsiasi triangolo rettangolo avente l'angolo α come uno dei suoi angoli acuti

$$\sin\alpha = \frac{lato\ opposto}{ipotenusa}.$$

Anche il rapporto tra $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ dipende solo dall'angolo α; a tale rapporto si dà il nome di **tangente** di α e si indica con

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{lato\ opposto}{ipotenusa} \cdot \frac{ipotenusa}{lato\ adiacente} = \frac{lato\ opposto}{lato\ adiacente}.$$

Con le definizioni appena introdotte e i programmi Matcos eseguiti all'inizio della lezione si possono enunciare i seguenti teoremi:

Teorema 1 *In un triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto a esso, o per il coseno dell'angolo acuto a esso adiacente.*

Teorema 2: *In un triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto della misura dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al primo cateto.*

Grazie a questi due teoremi si risolvono in modo immediato gli esercizi proposti all'inizio della lezione e, in generale, con la loro applicazione è possibile risolvere un qualsiasi triangolo rettangolo. Per avere una verifica di questi due teoremi si può realizzare un programma MatCos che permette di tracciare un triangolo rettangolo e di verificare le relazioni esistenti tra i suoi lati e le funzioni goniometriche dei suoi angoli:

```
A=Punto;
r=retta(A,punto);
s=perpendicolare(r,A);
B=punto_su(r); C=punto_su(s); T=poligono(A,B,C); cancella(r,s);
beta=ampiezza(angolo(A,B,C)); gamma=ampiezza(angolo(B,C,A));
ipo=Distanza(C,B); cat1=Distanza(A,C); cat2=Distanza(A,B);
```

```
stampa("il valore dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente
al cateto AB è ", ipo*cos(beta));
stampa("il valore dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto
al cateto AB è ", ipo*Sen(gamma));
stampa("il valore di AC per la tangente dell'angolo opposto
al cateto AB è ", cat1*sen(gamma)/cos(gamma));
stampa("il valore del cateto AB è ", cat2);
stampa("il valore dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente
al cateto AC è ", ipo*cos(gamma));
stampa("il valore dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto
al cateto AC è ", ipo*Sen(beta));
stampa("il valore di AB per la tangente dell'angolo opposto
al cateto AC è ", cat2*sen(beta)/cos(beta));
stampa("il valore del cateto AC è ", cat1);
```

L'esecuzione di questo programma produce la schermata mostrata in figura 3.18.

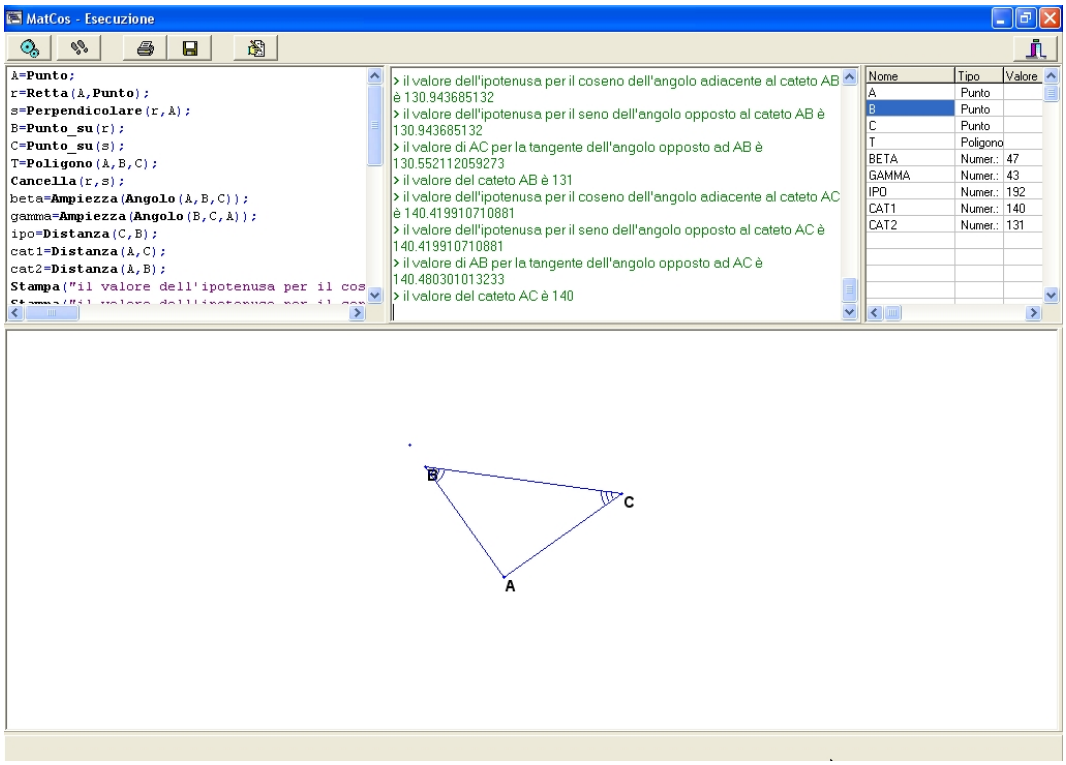


Figura 3.18: Programma MatCos per la verifica dei Teoremi sui triangoli rettangoli.

Nella risoluzione di un triangolo rettangolo possono presentarsi quattro casi: oltre all'angolo retto, possono essere noti

1. i due cateti;
2. l'ipotenusa e un cateto;
3. un cateto e un angolo acuto;
4. l'ipotenusa e un angolo acuto.

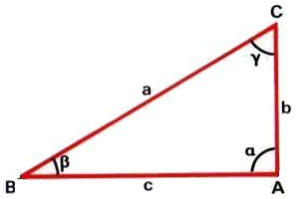


Figura 3.19: Triangolo rettangolo

Primo caso: In riferimento alla figura 3.19, noti b e c per il Teorema 2, si ha:

$$tg\beta = \frac{b}{c} \longrightarrow \beta = arctg\frac{b}{c} \longrightarrow \gamma = 90^\circ - \beta.$$

Per il Teorema 1, si ha:

$$b = a\sin\beta \longrightarrow a = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Secondo caso: Noti a e b per il Teorema 1, si ha:

$$\sin\beta = \frac{b}{a} \longrightarrow \beta = arcsin\frac{b}{a} \longrightarrow \gamma = 90^\circ - \beta.$$

Ancora per il Teorema 1, si ha poi:

$$c = a\sin\gamma.$$

Terzo caso: Noti b e β si ricava subito $\gamma = 90^\circ - \beta$; dal Teorema 1 si ricava l'ipotenusa e dal Teorema 2 l'altro cateto:

$$a = \frac{b}{\sin\beta} \qquad e \qquad c = b\ cotg\beta = b\ tg\gamma.$$

Quarto caso: Noti a e β si ha $\gamma = 90^\circ - \beta$ e per il Teorema 1:

$$b = a\sin\beta \qquad e \qquad c = a\cos\beta = a\sin\gamma.$$

3.4.3 Lezione 2: Applicazioni dei teoremi sui triangoli rettangoli

In questa lezione verranno presentate diverse applicazioni dei teoremi sui triangoli rettangoli in ambito matematico e fisico:

- Area di un triangolo e di un quadrilatero
- Coefficiente angolare di una retta
- Angolo tra due rette
- Coordinate polari
- Rotazioni degli assi cartesiani
- Scomposizione di vettori
- Lavoro di una forza
- Un problema di ottica.

Area di un triangolo

Se di un triangolo sono note le misure a e b di due lati e l'ampiezza γ dell'angolo tra essi compreso, il valore S della sua area è:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Infatti, se AH è l'altezza relativa al lato BC e se h ne è la misura, dal triangolo rettangolo AHC

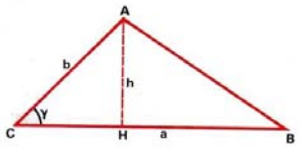


Figura 3.20: Un triangolo generico

si ha:

$$h = b\sin\gamma.$$

Se ne deduce che:

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Area di un quadrilatero

L'area di un quadrilatero qualunque è uguale al semiprodotto delle misure delle diagonali per il seno di uno degli angoli fra esse compreso.

Nella figura 3.21 è rappresentato un quadrilatero qualunque $ABCD$. Le sue diagonali si incontrano nel punto O; p, q, r, s sono le misure delle parti in cui le due diagonali sono divise da O; α è l'ampiezza dell'angolo $\widehat{AOB}$.

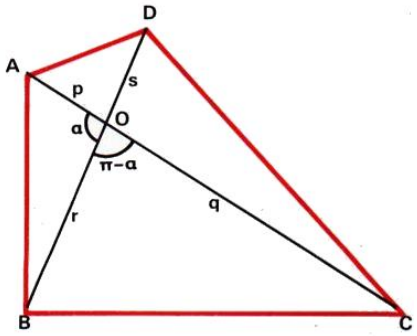


Figura 3.21: Un quadrilatero

L'area S del quadrilatero è data dalla somma delle aree dei quattro triangoli AOB, BOC, COD, DOA; quindi è:

$$S = \frac{1}{2}pr\sin\alpha + \frac{1}{2}rq\sin(\pi-\alpha) + \frac{1}{2}qs\sin\alpha + \frac{1}{2}sp\sin(\pi-\alpha) =$$
$$\frac{1}{2}pr\sin\alpha + \frac{1}{2}rq\sin\alpha + \frac{1}{2}qs\sin\alpha + \frac{1}{2}sp\sin\alpha =$$
$$\frac{1}{2}\sin\alpha(pr + rq + qs + sp) =$$
$$\frac{1}{2}\sin\alpha(p+q)(r+s).$$

Posto $AC = p + q = d$ e $BD = r + s = d'$ si ottiene la formula cercata:

$$S = \frac{1}{2}dd'\sin\alpha.$$

Coefficiente angolare di una retta

Consideriamo una generica retta $y = mx + q$ e indichiamo con α l'angolo che essa forma con l'asse delle x (figura 3.22). Dati due punti $P(x_P,y_P)$ e $Q(x_Q,y_Q)$ della retta, il coefficiente angolare m sarà:

$$m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}.$$

Osservando ora il triangolo rettangolo PQH, e applicando il Teorema 2, si ha che:

$$m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{PH}{QH} = tg\alpha.$$

Dunque il coefficiente angolare di una qualsiasi retta, non parallela all'asse y, è la tangente goniometrica dell'angolo che la retta forma con l'asse x. .

In particolare:

se la retta è l'asse x o è parallela all'asse x, si ha: $\alpha = 0°$ per cui $m = tg\ 0° = 0$;

se la retta forma un angolo acuto con l'asse x, si ha $m = tg\ \alpha > 0$;

se la retta forma un angolo ottuso con l'asse x, si ha $m = tg\ \alpha < 0$.

Quando la retta è perpendicolare all'asse x, cioè è parallela all'asse y si ha $\alpha = 90°$ e poichè $tg\ 90°$

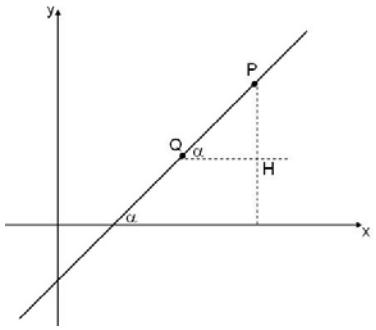


Figura 3.22: Retta generica sul piano cartesiano

non è definita, il coefficiente angolare della retta non è definito e si suol dire che, in questo caso è $m = \infty$.

ESERCIZI

1. Scrivere l'equazione della retta passante per il punto $P(-1; \sqrt{3})$ e formante un angolo di 120° con l'asse x.
2. Determinare il parametro k in modo che la retta di equazione

$$kx - (2k-1)y + 3 = 0$$

formi un angolo di 135° con l'asse x.

Coordinate polari

Per rapresentare i punti del piano, sono necessarie sempre due informazioni e fino ad ora abbiamo visto che ogni punto è identificato dalle sue coordinate cartesiane, ma esistono anche altri sistemi di coordinate. Un esempio è dato dal sistema di coordinate polari.
In questo sistema si fissa nel piano un punto O, detto polo e una semiretta Ox, detta asse polare, avente origine nel punto O; si scelgono poi un verso positivo delle rotazioni attorno al polo e una unità di misura u per i segmenti. Un generico punto P del piano è completamente individuato quando si conoscono la sua distanza d dal polo e l'angolo orientato θ di cui l'asse polare deve ruotare per sovrapporsi a OP (figura 3.23).

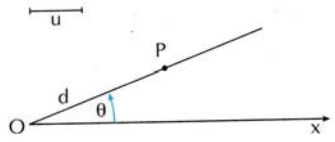


Figura 3.23: Coordinate polari

Grazie ai teoremi sui triangoli rettangoli è possibile ricavare la trasformazione delle coordinate polari in coordinate cartesiane e viceversa.
Assumiamo il polo come origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali; il semiasse positivo dell'asse delle x coincida con l'asse polare e assumiamo la stessa unità di misura sia sugli assi cartesiani che sull'asse polare.
Per un generico punto P di coordinate cartesiane $(x; y)$, per il Teorema 1 si ha:

$$\begin{cases} x &= d\cos\theta \\ y &= d\sin\theta \end{cases} \tag{3.1}$$

Per il Teorema di Pitagora si ha $d = \sqrt{x^2 + y^2}$, per cui il sistema 3.1 si può scrivere:

$$\begin{cases} x &= \sqrt{x^2 + y^2}\cos\theta \\ y &= \sqrt{x^2 + y^2}\sin\theta \end{cases} \tag{3.2}$$

da cui:

$$\begin{cases} \cos\theta &= \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\theta &= \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \tag{3.3}$$

Il sistema 3.3 unitamente alla relazione $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ permettono il passaggio dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari. Il sistema 3.1 garantisce, invece, il passaggio inverso.

Rotazioni degli assi cartesiani

Un'altra applicazione della trigonometria sempre in ambito matematico, si ritrova nella rotazione degli assi cartesiani. A volte risulta utile, infatti cambiare sistema di riferimento mediante una rotazione simultanea degli assi x e y di un certo angolo orientato α (figura 3.24).

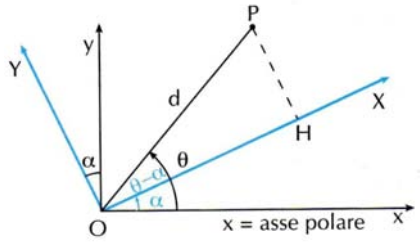


Figura 3.24: Rotazioni degli assi cartesiani

Dette (x,y) le coordinate di un punto qualunque P nel *vecchio* sistema e (X,Y) quelle dello stesso punto rispetto al *nuovo* sistema; cerchiamo di ricavare il legame esistente tra x, y, e X, Y.
Per fare questo si introduce un terzo sistema di riferimento: un sistema di coordinate polari avente come origine il punto O e come asse polare la semiretta positiva delle ascisse Ox. Siano d e θ le

coordinate polari del punto P in questo nuovo sistema; sarà così:

$$\begin{cases} x &= d\cos\theta \\ y &= d\sin\theta \end{cases} \tag{3.4}$$

Conduciamo da P la perpendicolare PH all'asse OX e, considerando il triangolo rettangolo OHP, in cui è $\widehat{HOP} = \theta - \alpha$, potremo scrivere:

$$\begin{cases} X &= d\cos(\theta-\alpha) &= d(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha) \\ Y &= d\sin(\theta-\alpha) &= d(\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha) \end{cases} \tag{3.5}$$

Ricordando ora il sistema 3.4 si ottiene:

$$\begin{cases} X &= x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ Y &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases} \tag{3.6}$$

Mediante il sistema 3.6 è possibile, dunque ottenere le nuove coordinate nel sistema OXY di un generico punto P, note le sue coordinate nel vecchio sistema Oxy.

Scomposizione di vettori

I teoremi sui triangoli rettangoli sono ampiamente utilizzati nella risoluzione di diversi problemi di fisica. Ne riportiamo qui alcuni esempi legati alla scomposizione di grandezze vettoriali: equilibrio di un grave su un piano inclinato; il lavoro di una forza; il moto di un proiettile.

Equilibrio di un grave su un piano inclinato

Per determinare le condizioni di equilibrio di un corpo su un piano inclinato è necessario applicare delle forze in modo da ottenere una forza risultante nulla. Per fare questo, diventa essenziale

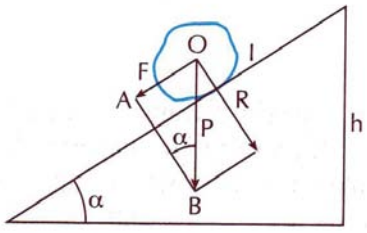


Figura 3.25: Equilibrio di un grave su un piano inclinato

scomporre le forze agenti sul corpo nelle loro componenti lungo le direzioni degli assi del sistema di riferimento scelto. Ad esempio si può scomporre la forza peso P secondo la direzione del piano e secondo la direzione ad esso perpendicolare.

Tale scomposizione si effettua applicando semplicemente il Teorema 1 al triangolo AOB mostrato in figura 3.25. Si ottiene quindi:

$$F = P\sin\alpha \qquad e \qquad R = P\cos\alpha.$$

3.4.4 Lezione 3: Risoluzione di un triangolo qualsiasi

Dopo aver analizzato in dettaglio il problema della risoluzione di un triangolo rettangolo, cerchiamo di indagare lo stesso problema per triangoli qualsiasi. In matematica infatti si procede sempre partendo da un caso semplificato per poi generalizzare i risultati (quando possibile e in modo opportuno) ai casi più complessi.

La trigonometria è nata, come abbiamo già detto, per risolvere problemi concreti legati all'astronomia e ha trovato applicazioni in contesti diversi. Non sempre però si ha a che fare con triangoli rettangoli, anzi molto spesso in situazioni reali si deve affrontare il problema della risoluzione di un triangolo qualsiasi.

Esempio 1: Consideriamo una torre visibile ed accessibile. Sia P il punto dal quale si possono osservare sia il il punto H, il più basso della torre, sia K, il più alto. Si possono avere tre casi diversi, a seconda che il punto P sta sul piano orizzontale passante per H, o sta al di sopra di H, o al di sotto, come mostrato nella figura 3.26.

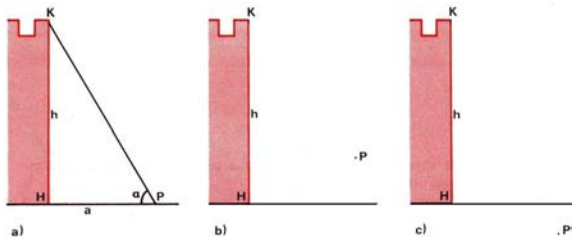


Figura 3.26: Altezza di una torre accessibile

Nel primo caso, misurata la distanza a di P da H e, con un apposito strumento, l'ampiezza α che il raggio visuale PK forma con la direzione orizzontale, per il Teorema 2 sui triangoli rettangoli, l'altezza h della torre è data da:

$$h = a\ tg\alpha.$$

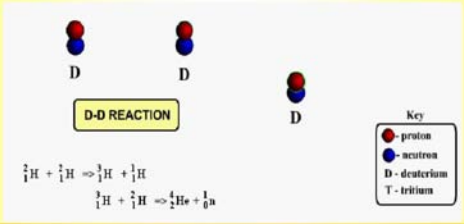
Negli altri casi come si può procedere?

Esempio 2: Consideriamo il problema di determinare la distanza tra due punti A e B, visibili l'uno dall'altro, ma non entrambi accessibili a chi deve misurare la loro reciproca distanza, per esempio a causa di un corso d'acqua o perchè B è situato in un campo nemico (figura 3.27). Come procedere?

Figura 3.27: Distanza tra due punti non entrambi accessibili

Fusione a catena

I prodotti ottenuti da una prima reazione di fusione, possono divenire i reagenti per una seconda fusione …



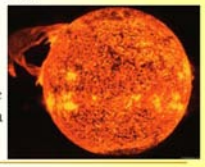
Fusione

Mentre i nuclei che si vogliono scindere per fissione possono essere lasciati fermi, in quanto fungono da bersagli per i neutroni, i nuclei candidati alla fusione devono muoversi con velocità tali da vincere le reciproche repulsioni elettrostatiche.

Imprimere velocità elevate ai nuclei significa portare la materia in cui sono contenuti a temperature elevatissime.

E' per questo che tale fenomeno avviene normalmente solo nelle stelle.

L'energia prodotta dal Sole, che permette l'esistenza della vita sulla Terra è ottenuta mediante fusione.



Applicazioni

L'uomo è riuscito a produrre la fusione dell'idrogeno in maniera **incontrollata** nelle bombe all'idrogeno.

La fusione atomica **controllata**, invece, è molto problematica ed è stata ottenuta solo per tempi brevissimi, ma rimane come speranza per il futuro per risolvere i problemi energetici dell'umanità.

3.8 Tirocinio indiretto: Statica

Il seguente Modulo relativo alla **STATICA** è rivolto ad un terzo anno di liceo scientifico ed è stato suddiviso in tre unità didattiche:

1. Le forze (8 ore).
2. L'equilibrio di un punto materiale (6 ore).
3. L'equilibrio di un corpo rigido (6 ore).

Prerequisiti: Elementi di goniometria, Sistemi di riferimento, vettori, moti.		
Unità di Apprendimento	**Contenuti**	**Obiettivi**
1 Le forze (8 ore)	• Concetto di forza ed effetti da essa prodotti. • Forze fondamentali in natura. • Proprietà vettoriali della forza. • Misura delle forze. • Particolari forze: Forza Peso, Forza Elastica,...	• Riconoscere il carattere vettoriale delle forze e saper operare con esse. • Individuare gli effetti che le forze producono sui corpi e calcolare l'intensità di diversi tipi di forze (forza peso, forza elastica e forza d'attrito). • Riconoscere che tutte le forze derivano da quattro interazioni fondamentali, individuare le analogie e le differenze che vi sono tra queste e le relazioni che esse hanno con le forze con cui abbiamo a che fare quotidianamente. • Modellizzare situazioni fisiche che coinvolgono la forza peso e la forza elastica • Verificare sperimentalmente una legge fisica.
2 L'equilibrio di un punto materiale (6 ore)	• Le condizioni di equilibrio per un punto materiale. • Reazioni vincolari. • Il piano inclinato.	• Riconoscere quando si può usare come modello un punto materiale nella descrizione di un oggetto fisico. • Individuare le forze agenti su un punto materiale, determinare le componenti di ciascuna forza e comporre opportunamente le forze per stabilire se esso sia in equilibrio o meno. • Risolvere problemi che riguardano l'equilibrio di punti materiali.
3 L'equilibrio di un corpo rigido (6 ore)	• Corpo rigido. • Momento di una forza e di una coppia di forze. • Effetto di più forze (sulla stessa retta d'azione, concorrenti, parallele) su un corpo rigido. • Le condizioni di equilibrio per un corpo rigido.	• Analizzare l'effetto di più forze su un corpo rigido. • Calcolare la risultante, il momento totale delle forze applicate a un corpo e comporre le forze applicate a un corpo rigido per stabilire se esso sia in equilibrio o meno. • Utilizzare i concetti di forza e di momento nella risoluzione di problemi che riguardano l'equilibrio di corpi rigidi.

3.8.1 Elementi di programmazione didattica

Nei seguenti paragrafi è descritto come sono state strutturate le tre unità didattiche, presentando i contenuti e gli obiettivi di ciascuna unità e descrivendo l'impostazione didattica delle lezioni.

Unità didattica 1: Le Forze

La prima unità didattica prevede l'acquisizione dei seguenti **CONTENUTI**:

- Concetto di forza ed effetti da essa prodotti.
- Forze fondamentali in natura.
- Proprietà vettoriali della forza.
- Misura delle forze.
- Particolari forze: la Forza Peso, la Forza d'Attrito e la Forza Elastica.

Come obiettivo essa si propone di raggiungere lo sviluppo delle seguenti **COMPETENZE**:

- Riconoscere il carattere vettoriale delle forze e saper operare con esse.

- Individuare gli effetti che le forze producono sui corpi e calcolare l'intensità di diversi tipi di forze (forza peso, forza elastica e forza d'attrito).
- Riconoscere che tutte le forze derivano da quattro interazioni fondamentali, individuare le analogie e le differenze che vi sono tra queste e le relazioni che esse hanno con le forze con cui abbiamo a che fare quotidianamente.
- Modellizzare situazioni fisiche che coinvolgono la forza peso, la forza elastica e le forze d'attrito.
- Verificare sperimentalmente una legge fisica.

Questa unità didattica sarà sviluppata in 8 ore: 4 ore di lezione, due ore di esercitazione e due ore di laboratorio.
Nella *prima lezione* verrà introdotto il concetto di forza e gli effetti da essa prodotti; verranno presentate da un punto di vista qualitativo le quattro tipologie di forze presenti in natura (gravitazionale, elettromagnetica, nucleare forte e nucleare debole); verranno messe in luce le proprietà vettoriali di questa grandezza (intensità, direzione e verso), mostrando come sommare più forze; verrà presentato il dinamometro come strumento per misurare e confrontare le forze.
Nella *seconda lezione* verranno esaminate alcune particolari forze; verrà osservato che esistono forze di contatto e forze che invece agiscono a distanza. Come esempio di forza a distanza verrà analizzata la forza-peso, facendo notare bene la distinzione tra massa e peso di un corpo. Come esempio di forza di contatto verranno presentate le forze d'attrito e la forza elastica (già implicitamente utilizzata nel dinamometro per misurare altre forze).
Nella *terza lezione* si può verificare in laboratorio la proporzionalità diretta che c'è tra lo spostamento di una molla dalla sua posizione di equilibrio e la forza elastica da essa esercitata (Legge di Hooke).
Nella *quarta lezione* verranno svolti e proposti esercizi relativi alla somma di più forze, alla forza peso, alle forze d'attrito e alla forza elastica. Come applicazione di questi concetti alla vita reale, si può scegliere di svolgere esercizi relativi ad esempio alle "pastiglie" dei freni o alle scarpette da arrampicata per mostrare un utilizzo concreto delle forze d'attrito e analizzare lo studio di alcune forme aerodinamiche progettate invece per ridurre il più possibile tale forza.

Unità didattica 2: L'Equilibrio di un Punto Materiale

La seconda unità didattica prevede l'acquisizione dei seguenti **contenuti**:

- Le condizioni di equilibrio per un punto materiale.
- Reazioni vincolari.
- Il piano inclinato.

Come obiettivo essa si propone di raggiungere lo sviluppo delle seguenti **COMPETENZE**:

- Riconoscere quando si può usare come modello un punto materiale nella descrizione di un oggetto fisico.
- Individuare le forze agenti su un punto materiale, determinare le componenti di ciascuna forza e comporre opportunamente le forze per stabilire se esso sia in equilibrio o meno.
- Risolvere problemi che riguardano l'equilibrio di punti materiali.

Questa unità didattica sarà sviluppata in 6 ore: 4 ore di lezioni e 2 ore di esercitazione.
Nella *prima lezione* si prenderà spunto dalla descrizione del dinamometro e dal suo funzionamento per introdurre il concetto di equilibrio. Verranno quindi esaminate le problematiche relative all'equilibrio di un corpo e si proseguirà trattando in dettaglio le condizioni di equilibrio per un punto materiale libero.
Nella *seconda lezione* verranno introdotte le reazioni vincolari che modificano opportunamente le condizioni di equilibrio trattate precedentemente ed si esaminerà in dettaglio il problema dell'equilibrio di un punto materiale su un piano inclinato (privo di attrito), dimostrando così che è più facile spingere un oggetto in salita su un piano inclinato invece di sollevarlo direttamente.
Nella *terza lezione* verranno svolti e proposti esercizi che riguardano l'equilibrio in sistemi in cui si può scegliere un punto materiale, come modello per descrivere l'oggetto in esame. Si può scegliere di analizzare il funzionamento degli ancoraggi per arrampicata come applicazione di questi concetti alla vita reale.

Unità didattica 3: L'Equilibrio di un Corpo Rigido

La terza unità didattica prevede l'acquisizione dei seguenti **contenuti**:

- Corpo rigido.
- Momento di una forza e di una coppia di forze.
- Effetto di più forze (sulla stessa retta d'azione, concorrenti, parallele) su un corpo rigido.
- Le condizioni di equilibrio per un corpo rigido.

Come obiettivo essa si propone di raggiungere lo sviluppo delle seguenti **COMPETENZE**:

- Analizzare l'effetto di più forze su un corpo rigido.
- Calcolare la risultante, il momento totale delle forze applicate a un corpo e comporre le forze applicate a un corpo rigido per stabilire se esso sia in equilibrio o meno.
- Utilizzare i concetti di forza e di momento nella risoluzione di problemi che riguardano l'equilibrio di corpi rigidi.

Questa unità didattica sarà sviluppata in 6 ore: 3 ore di lezioni e 3 ore di esercitazione.
Nella *prima lezione* verrà introdotto il corpo rigido, verrà introdotto il concetto di momento di una forza e momento di una coppia di forze; verranno mostrati gli effetti di una o più forze su un corpo

rigido (forze che agiscono sulla stessa retta d'azione, forze concorrenti, forze parallele), verranno dunque dedotte le condizioni di equilibrio per un corpo rigido.
Nella *seconda lezione* verranno riprese le condizioni di equilibrio per un corpo rigido e verranno svolti diversi esercizi per determinare esplicitamente in diversi contesti tali condizioni. Come esempi concreti si può considerare il funzionamento e l'utilità di una chiave inglese, di un apribottiglie e di una gru.

Strumenti e metodologia

Le lezioni teoriche verranno svolte in aula. La spiegazione di ogni nuovo argomento prenderà spunto da una situazione concreta della vita reale. La spiegazione sarà sempre animata da domande e coinvolgimento diretto degli studenti. Il passaggio da un argomento a quello successivo sarà sempre motivato e rafforzato da collegamenti e confronti fra gli argomenti in esame.
Le esercitazioni, anch'esse svolte in aula, prevederanno esercizi di tipo diverso: a risposta chiusa per verificare l'acquisizione dei concetti teorici fondamentali; a risposta aperta (principalmente relativi a problemi reali) per verificare l'acquisizione di abilità e competenze nell'applicare i concetti teorici acquisiti in situazioni concrete.
L'attività di laboratorio si svolgerà in laboratorio e sarà finalizzata all'acquisizione del metodo di verifica sperimentale di una legge fisica e all'applicazione di concetti matematici (proporzionalità diretta, dipendenza lineare) e della teoria degli errori svolta in altri moduli.

3.8.2 Alcune lezioni

In questo paragrafo sono riportate in modo dettagliato due lezioni di questo modulo:

- Una lezione sull'equilibrio di un punto materiale.
- Una lezione sull'equilibrio di un corpo rigido.

Equilibrio di un punto materiale

Abbiamo visto nelle lezioni precedenti che le forze producono diversi effetti: statici, nel caso di deformazione di un corpo, o dinamici, nel caso in cui variano lo stato di quiete o di moto di un corpo. Non è detto però che se un corpo è fermo e continua a rimanere fermo, su di esso non agiscono forze. Si pensi alla situazione in cui si tiene in mano un oggetto. La mano esercita una forza sull'oggetto, ma questo non necessariamente si deforma, né si muove. Come spiegarci questa situazione? Sull'oggetto che stiamo esaminando è vero che la mano esercita una forza, ma c'è anche un'altra forza che agisce: la forza peso dell'oggetto stesso. Queste due forze sono dirette l'una opposta all'altra e si controbilanciano perfettamente.
É esattamente quello che accade quando si attacca un peso ad un dinamometro. Su di esso agiscono, con un risultato nullo, la forza della molla e la forza di gravità che quindi devono essere rappresentate

da vettori uguali ed opposti.
Quindi si può affermare che: se un oggetto è fermo e continua a rimanere fermo (cioè è in equilibrio), allora la forza totale che agisce su di esso è il vettore nullo.
Determinare le condizioni che mantengono un corpo in equilibrio è un problema che può essere molto complesso. Pensiamo ad un grattacielo o ad un ponte. Ogni piccolo volume di materia di cui sono costituiti deve continuare a restare in equilibrio anche in condizioni difficili, come per esempio un terremoto per il grattacielo o le continue sollecitazioni del traffico per un ponte.
Noi inizieremo a trattare il problema dell'equilibrio a partire, come si procede sempre in fisica, da un modello semplificato: il punto materiale.

Il punto materiale

Il punto materiale è un modello astratto, cioè una descrizione semplificata che mette in risalto soltanto le caratteristiche che si considerano più importanti nel particolare problema che si sta esaminando.
Nel nostro caso il punto materiale è una descrizione schematica utile in quanto intendiamo studiare soltanto il movimento dell'oggetto nel suo insieme, trascurando il movimento delle sue parti. E' essenziale considerare il fatto che tale oggetto abbia una massa (ecco perché punto materiale), ma si possono trascurare altre proprietà, come l'estensione, la forma, la temperatura, ecc.

Per un punto materiale la condizione di equilibrio è che la somma delle forze che gli sono applicate sia eguale al vettore nullo.

Le reazioni vincolari

Nella realtà, difficilmente capita che un oggetto sia del tutto libero di muoversi nello spazio; in genere può compiere alcuni spostamenti, mentre altri gli sono proibiti.
Esempio 1: Un oggetto appoggiato su un tavolo può muoversi in lungo e in largo sulla superficie del tavolo, può eventualmente essere sollevato, ma non può muoversi sotto il livello del tavolo.
Esempio 2: Un lampadario appeso al soffitto non è libero di spostarsi dovunque nello spazio. Il filo che lo sostiene lo costringe a muoversi solo su una porzione di una superficie sferica con raggio pari alla lunghezza del filo e centro nel punto in cui il filo è appeso al soffitto.
Esempio 3: Un treno è obbligato a spostarsi sui binari, senza uscire dalle rotaie.
Tutti questi oggetti sono sottoposti a dei vincoli.

Un vincolo è un oggetto che limita la libertà di movimento di un altro oggetto.

Negli esempi precedenti i vincoli sono il tavolo, il filo e le rotaie. É evidente che i vincoli esercitano delle forze per condizionare i movimenti degli oggetti.

In cosa consistono queste forze?
Un oggetto appoggiato su un tavolo, malgrado il suo peso, non sprofonda, ma resta fermo. Ciò vuol dire che a esso è applicata una forza uguale e contraria al suo peso. Questa forza, che si chiama *forza vincolare*, è dovuta all'elasticità del tavolo. Quando vi appoggiamo un oggetto, la superficie del tavolo si deforma in modo impercettibile, come se fosse un tappeto elastico (ma estremamente rigido). Man mano che la superficie si comprime, esercita una forza sempre più grande verso l'alto fino a che riesce a controbilanciare il peso dell'oggetto.

La forza vincolare non è sempre uguale, ma dipende dalla forza a cui deve reagire.

Se appoggiamo su un tavolo un oggetto leggero, la superficie si deforma poco e risponde con una forza piccola. Se invece l'oggetto è pesante, la forza vincolare necessaria per tenerlo in equilibrio è maggiore. Appoggiando pesi sempre più grandi si arriva a un *limite di rottura*, quando la struttura elastica del tavolo non ce la fa più a reagire alle sollecitazioni.
Ritornando al nostro problema dell'equilibrio si può ora affermare che:

La condizione perché un punto materiale vincolato sia in equilibrio è che la somma di tutte le forze che gli sono applicate (comprese quelle vincolari) sia uguale al vettore nullo.

Equilibrio di un punto materiale su un piano inclinato

Per concludere questa lezione sull'equilibrio di un punto materiale analizziamo una situazione concreta e rispondiamo così alla seguente domanda:

"Perché è più facile spingere un oggetto in salita su un piano inclinato invece che sollevarlo direttamente?"

Esaminiamo il problema in dettaglio: consideriamo un oggetto appoggiato su un piano inclinato, che immaginiamo privo d'attrito. Che forza bisogna applicargli per farlo restare in equilibrio?
Costruiamo un modello rappresentativo dell'oggetto come un punto materiale di massa m, obbligato a muoversi sul piano inclinato che è un vincolo (si veda la figura 3.37). Le forze che agiscono su questo oggetto sono due:

1. La forza-peso $\overrightarrow{F_p}$ diretta verso il basso.
2. La forza vincolare $\overrightarrow{F_v}$ perpendicolare al piano inclinato.

Per mantenere l'oggetto in equilibrio bisogna applicare una forza che controbilanci la risultante di queste due forze.
Poiché $\overrightarrow{F_v}$ agisce in direzione perpendicolare al piano inclinato è conveniente scomporre $\overrightarrow{F_p}$ in due

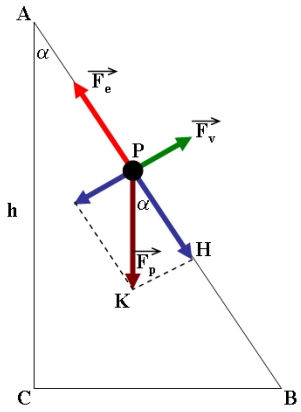


Figura 3.37: Modello rappresentativo di un oggetto, come punto materiale, su un piano inclinato.

componenti $\overrightarrow{F_\perp}$ e $\overrightarrow{F_\parallel}$. La componente $\overrightarrow{F_\perp}$ perpendicolare al piano è compensata esattamente da $\overrightarrow{F_v}$ perché il punto non si stacca dal piano. La forza equilibrante $\overrightarrow{F_e}$ dovrà quindi essere $\overrightarrow{F_e} = -\overrightarrow{F_\parallel}$.
Dalla similitudine dei due triangoli ABC e PHK si ricava che

$$F_e = \frac{h}{l} F_p,$$

dove $l = AB$. Dunque la forza necessaria per mantenere in equilibrio l'oggetto su un piano inclinato è pari ad una frazione (h/l) del suo peso. Questa frazione è sempre minore di 1 in quanto il cateto di un triangolo rettangolo è sempre minore dell'ipotenusa.
In sostanza, usando un piano inclinato si riesce a "diminuire" il peso dell'oggetto che si vuole trasportare.
É stato proprio sfruttando questo principio che gli antichi egizi sono riusciti a sollevare le grosse pietre per la costruzione delle piramidi! (figura 3.38).

Figura 3.38: La grande piramide di Giza è costituita da pietre di massa pari a 2.5 tonnellata. L'unica "tecnologia" di cui disponevano gli antichi egizi per sollevare tali pietre era proprio il piano inclinato.

Equilibrio di un corpo rigido

Gli oggetti che incontriamo nell'esperienza di tutti i giorni non sono semplici punti materiali. Hanno un'estensione e le forze che agiscono su di essi non sono di solito, applicate in uno stesso punto, ma in punti diversi. É per questo che il modello del punto materiale deve essere sostituito da un modello un po' più complesso che descriva meglio le situazioni reali: il corpo rigido.

Il corpo rigido

Un corpo rigido può essere pensato come un insieme di numerosi punti materiali che hanno distanze fisse l'uno dall'altro. Anche il corpo rigido, come il punto materiale è il risultato di un'astrazione, si tratta cioè sempre di un modello semplificato dei corpi reali. Per il corpo rigido oltre alla massa è stata considerata anche un'altra proprietà: la rigidità.
Un corpo rigido è dunque un oggetto assolutamente non deformabile. Questa ipotesi semplifica ancora il problema reale, in quanto ci evita di prendere in considerazione gli effetti di deformazione che tutte le forze producono.
Un corpo non rigido, sotto l'azione di una o più forze può stirarsi, comprimersi, torcersi. Un corpo rigido, invece, può soltanto spostarsi (traslare) nello spazio o ruotare su se stesso. Il suo moto naturale è dunque una *rototraslazone*.
Iniziamo lo studio delle condizioni di equilibrio di un corpo rigido dall'esame di un corpo che può soltanto ruotare e non traslare, per esempio una porta che ruota attorno ai suoi cardini o il manubrio di una bicicletta.
Per mettere in rotazione una porta dobbiamo agire su di essa con una forza. L'esperienza però ci insegna che la stessa forza sullo stesso corpo rigido può avere effetti diversi a seconda del punto in cui è applicata: se, per esempio spingiamo sulla porta vicino ai cardini, l'effetto è scarso, mentre otteniamo un'efficacia molto maggiore se premiamo vicino alla maniglia (figura 3.39).

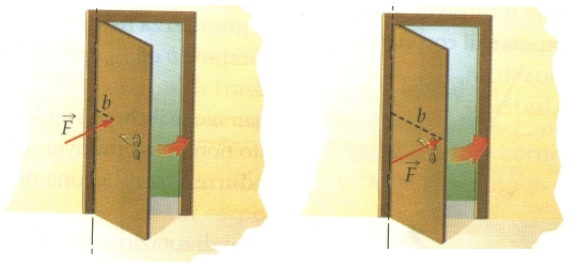


Figura 3.39: Effetto prodotto da una stessa forza applicata in punti diversi

Momento di una forza

L'effetto della rotazione dovuto ad una forza non può essere descritto dalla sola conoscenza della forza stessa, ma è necessario introdurre una nuova quantità che dipenda anche dalla posizione del

suo punto di applicazione.

Per una forza $\vec{F}$ applicata in un punto P tale quantità è il momento della forza $\vec{M}$ rispetto al punto A, definito come

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F},$$

dove $\vec{r}$ è il vettore posizione di P rispetto ad A.

Dalla definizione di prodotto vettoriale, il vettore $\vec{M}$ ha direzione perpendicolare al piano che contiene $\vec{r}$ e $\vec{F}$, e verso dato dalla regola della mano destra. La sua intensità è data da

$$M = rF \sin \alpha$$

dove α è l'angolo formato dai vettori $\vec{r}$ ed $\vec{F}$.

La distanza tra il punto P e la retta che contiene $\vec{F}$ si chiama anche *braccio* del momento e si indica di solito con b.

Nella figura 3.40 è mostrata una foto in cui si vede come far ruotare un bullone utilizzando una chiave. La rotazione è più agevole se si allunga la chiave con un tubo, proprio perchè l'effetto di rotazione della forza non dipende soltanto dalla forza ma anche dal suo braccio.

Dalla definizione di momento possiamo inoltre osservare che esso ha valore massimo quando $\vec{r}$ ed $\vec{F}$ sono perpendicolari ed è uguale al vettore nullo quando essi sono paralleli.

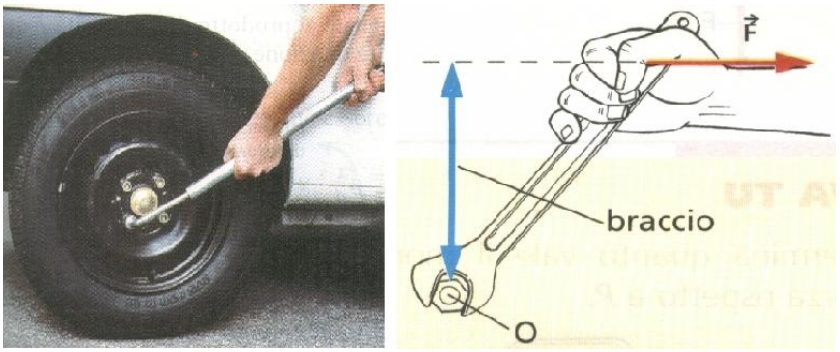


Figura 3.40: Esempio di applicazione reale del concetto di Momento di una forza.

Coppia di forze

Nel caso della porta, o del bullone, l'effetto di rotazione è dovuto all'azione di una sola forza, mentre quando ruotiamo il manubrio di una bicicletta o quando giriamo una chiave nella toppa di una serratura o ruotiamo la maniglia di una finestra (figura 3.41), la rotazione del corpo è ottenuta applicando, in punti distinti due forze uguali ed opposte.

Quando due forze uguali ed opposte agiscono in punti diversi dello stesso corpo rigido, si dice che si ha una coppia di forze.

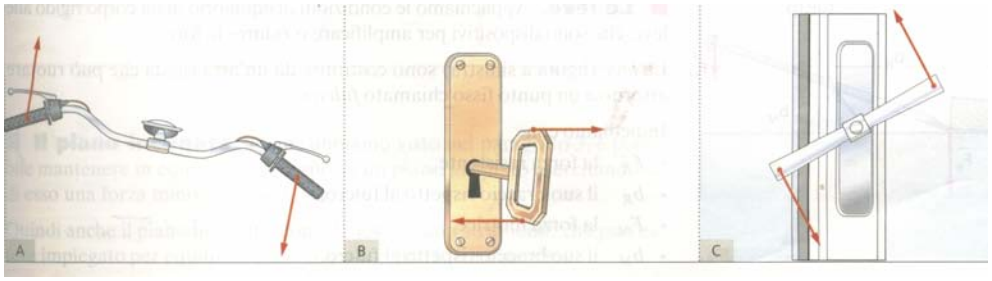


Figura 3.41: Esempi concreti in cui interviene una coppia di forze.

Visto che una coppia di forze provoca una rotazione, è utile caratterizzare tale effetto mediante la somma dei momenti delle due forze rispetto ad un generico punto A nello spazio.

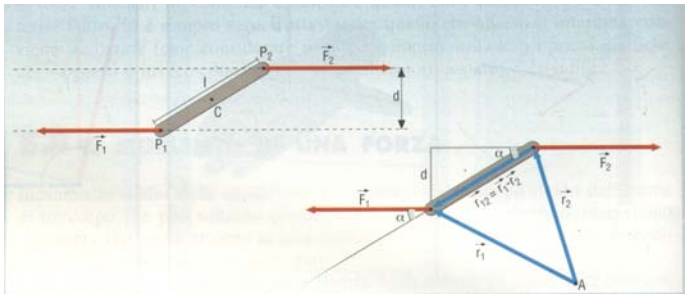


Figura 3.42: Diagramma rappresentativo di una coppia di forze agente sugli estremi di un'asta rigida

Consideriamo la figura 3.42, in cui due forze uguali e opposte $\overrightarrow{F}_1$ e $\overrightarrow{F}_2$, entrambe di intensità F sono applicate alle due estremità P_1 e P_2 di un'asta rigida (manubrio di una bicicletta) di lunghezza l. La distanza tra le rette a cui appartengono le due forze, che è sempre minore o uguale ad l, è indicata con d. Indicando con $\overrightarrow{r}_1$ il vettore che congiunge A con P_1 (punto di applicazione di $\overrightarrow{F}_1$) e con $\overrightarrow{r}_2$ il vettore corrispondente relativo a $\overrightarrow{F}_2$, otteniamo:

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M}_1 + \overrightarrow{M}_2 = \overrightarrow{r}_1 \times \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{r}_2 \times \overrightarrow{F}_2 = \overrightarrow{r}_1 \times \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{r}_2 \times (-\overrightarrow{F}_1) = (\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2) \times \overrightarrow{F}_1.$$

Abbiamo trovato dunque un risultato importante: i vettori $\overrightarrow{r}_1$ e $\overrightarrow{r}_2$ (e, quindi, i momenti $\overrightarrow{M}_1$ e $\overrightarrow{M}_2$) dipendono dal particolare punto A che si è scelto, ma la somma $\overrightarrow{M}$, detta *Momento della coppia di forze* dipende <u>soltanto</u> dalle due forze in gioco e dai loro punti di applicazone P_1 e P_2. Infatti $\overrightarrow{r}_{12} = \overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2$ è il vettore che congiunge P_1 e P_2 ed è del tutto indipendente da A.
Dalla figura 3.42 si riconosce inoltre che $r_{12} \sin\alpha$ è uguale alla distanza d tra le rette di azione delle due forze; quindi indicando con F il modulo di $\overrightarrow{F}_1$ e $\overrightarrow{F}_2$, l'intensità di $\overrightarrow{M}$ è data da

$$M = r_{12} F \sin\alpha = dF,$$

dove α è l'angolo formato tra le direzioni dei vettori $\overrightarrow{r_{12}}$ e $\overrightarrow{F}_1$.
In generale, il **momento di una coppia di forze** $\overrightarrow{F}$ e $-\overrightarrow{F}$ applicate nei punti P_1 e P_2 di un corpo rigido, separati dal vettore $\overrightarrow{r_{12}}$ è dato da:

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r_{12}} \times \overrightarrow{F}$$

ed esprime in modo quantitativo l'effetto di rotazione di due forze uguali ed opposte applicate in punti diversi di un corpo rigido.

Effetti di più forze applicate ad un corpo rigido

Abbiamo considerato fino ad ora casi in cui il corpo rigido in esame (la porta, o il manubrio) poteva solo ruotare, senza traslare. Vediamo ora di esaminare la situazione in cui il corpo rigido può muoversi di moto rototraslatorio.
Consideriamo una sbarra rigida, che poggia su un piano senza attrito e applichiamo ad essa una forza orizzontale $\overrightarrow{F}$ in direzione perpendicolare all'asta stessa.

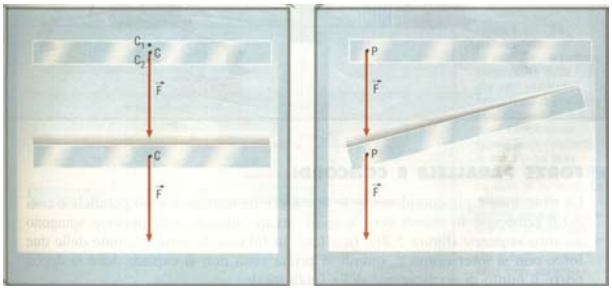


Figura 3.43: Sbarra rigida soggetta all'azione di una forza: gli effetti prodotti dipendono dal punto di applicazione della forza stessa.

Ci accorgiamo che il moto della sbarra dipende dal punto di applicazione della forza.

- Se la forza è applicata nel punto medio della sbarra, questa trasla parallela a se stessa nel verso della forza.
- Se $\overrightarrow{F}$ è applicata in un punto P spostato verso un estremo della sbarra, questa eseguirà una rototraslazione, cioè un movimento in cui si sposta nel verso della forza e, contemporaneamente, ruota (come mostrato in figura 3.43). La sbarra terminerà di ruotare solo quando sarà disposta nella direzione della forza.

Tutto ciò ci dice che la forza è un *vettore applicato*, cioè l'effetto da essa prodotto dipende anche dal punto di applicazione.
Emerge dunque un nuovo problema relativo agli effetti di più forze applicate a un corpo rigido. Sappiamo infatti come si sommano più forze, ma ora diventa necessario anche individuare il punto di applicazione del vettore somma. L'effetto prodotto dalla forza risultante dipenderà infatti dal

punto in cui essa è applicata.

Iniziamo con l'osservare che:

una forza che agisce su un corpo rigido può essere spostata lungo la sua retta d'azione in un altro punto dello stesso corpo senza che l'effetto della forza cambi.

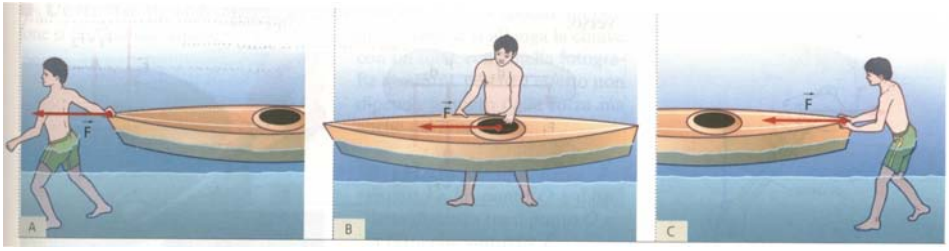


Figura 3.44: Esempio concreto per mostrare che spostando la forza lungo la sua retta d'azione si ottiene sempre lo stesso effetto.

In presenza di due forze, possono presentarsi i seguenti casi:

Forze che agiscono sulla stessa retta

La forza risultante è la somma vettoriale delle forze e può essere spostata sulla sua retta di azione senza cambiare i suoi effetti.

Forze concorrenti

La forza risultante è la somma vettoriale delle due forze con la regola del parallelogramma applicata nel punto di intersezione delle due rette d'azione.

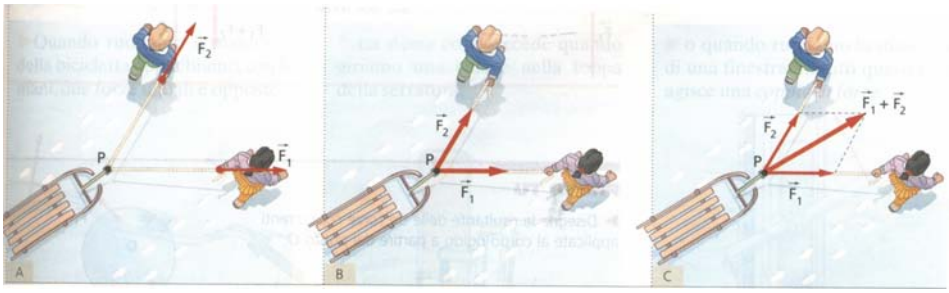


Figura 3.45: Esempio concreto di forze concorrenti.

Forze parallele

La forza risultante è la somma vettoriale delle due forze applicata in un punto tale che le distanze dalle due forze siano inversamente proporzionali alle intensità delle forze stesse.
Il punto di applicazione P della forza risultante si può cioè individuare mediante la proporzione:

$$d_1 : d_2 = F_2 : F_1$$

dove d_1 è la distanza del punto P dalla forza $\overrightarrow{F}_1$ e d_2 è la distanza del punto P dalla forza $\overrightarrow{F}_2$. In particolare la risultante sarà interna alle due forze se esse sono concordi, mentre sarà esterna se esse sono discordi.

Condizioni di equilibrio per un corpo rigido

Dal momento che il movimento naturale di un corpo rigido è una rototraslazione, perchè esso sia in equilibrio occorre che non possa ruotare e che non possa traslare. Allora le condizioni generali di equilibrio di un corpo rigido si possono così riassumere:

- Perchè esso non trasli, deve essere uguale al vettore nullo la somma vettoriale di tutte le forze che gli sono applicate:
$$\overrightarrow{F}_{tot} = \overrightarrow{0}.$$
- perchè esso non ruoti, deve essere uguale al vettore nullo la somma vettoriale dei momenti di tutte le forze:
$$\overrightarrow{M}_{tot} = \overrightarrow{0}.$$

Bibliografia

[1] Amaldi, U., *Fisica: Idee ed Esperiemnti Vol.1*, Zanichelli.

[2] Amaldi, U., *Fisica: Idee ed Esperiemnti Vol.2*, Zanichelli.

[3] Amaldi, U., *Fisica: Idee ed Esperiemnti Vol.3*, Zanichelli.

[4] Amaldi, U., *Intrroduzione alla Fisica Vol.1*, Zanichelli.

[5] Amaldi, U., *Intrroduzione alla Fisica Vol.2*, Zanichelli.

[6] Caforio, A., Ferilli, A., *Physica 3*, Le Monnier.

[7] Costabile, F., *Algebra per il biennio Volume I*, Liguori.

[8] Costabile, F., *Algebra per il biennio Volume II*, Liguori.

[9] Costabile, F., *Geometria per il biennio Volume I*, Liguori.

[10] Costabile, F., *Geometria per il biennio Volume II*, Liguori.

[11] Costabile, F., *Matematica tre*, Liguori.

[12] Costabile, F., *Matematica quattro*, Liguori.

[13] Costabile, F., *Matematica cinque*, Liguori.

[14] Dodero, N., Baroncini, P., Manfredi, R., *Nuovi elementi di matematica A*, Ghisetti e Corvi.

[15] Dodero, N., Baroncini, P., Manfredi, R., *Lineamenti di matematica Modulo B*, Ghisetti e Corvi.

[16] Dodero, N., Baroncini, P., Manfredi, R., *Lineamenti di matematica Modulo D*, Ghisetti e Corvi.

[17] Manfredi, R., Fabbri, Grassi, *Lineamenti di matematica Modulo L*, Ghisetti e Corvi.

SITOGRAFIA Matematica

[18] http://web.unife.it/progetti/geometria/Escher_A/tessell.htm

[19] http://set.intermedia.sa.it/moduli/tema_3/unita_lavoro/trasfgeo/traslazione.htm

[20] http://matmedia99.ing.unina.it/Generale/Argomenti/isometrie.htm

[21] http://www.crmpa.it/pmma/Simulazione/Esperimento%20tassellazione%2001.htm

[22] http://progettomatematica.dm.unibo.it/Trigonometria/home2.htm

[23] http://utenti.lycos.it/cervelloni/index.html

[24] http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/java/trig/

SITOGRAFIA Fisica

[25] http://www.regentsprep.org/Regents/physics/phys03/aeleclab

[26] http://electronics.howstuffworks.com/photocopier1.htm

[27] http://micro.magnet.fsu.edu/electromag/java/rutherford/index.html

[28] http://www.colorado.edu/physics/2000/index.pl

[29] http://web.mit.edu/8.02t/www/802TEAL3D/visualizations/electrostatics/index.htm

[30] http://www.hazelwood.k12.mo.us/ grichert/sciweb/electric.htm

[31] http://www.physicsclassroom.com/mmedia/estatics/isop.html

[32] http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/maussion/statelec /PagesEngl/14Cag.html

[33] http://webphysics.davidson.edu/physlet_resources/bu_semester1/menu_semester1.html

[34] http://webphysics.davidson.edu/physlet_resources/bu_semester2/menu_semester2.html

[35] http://webphysics.davidson.edu/physletprob/ch9_problems/ch9_1_electrostatics

[36] http://www.glenbrook.k12.il.us/gbssci/phys/Class/estatics/u8l2a.html

[37] http://www.ba.infn.it/ fisi2005/index.html

[38] http://www.ba.infn.it/www/didattica.html

[39] http://www.colorado.edu/physics/2000/waves_particles/wavpart2.html

[40] http://www.colorado.edu/UCB/AcademicAffairs/ArtsSciences/physics /PhysicsInitiative/Physics2000/index.pl

[41] http://lectureonline.cl.msu.edu/ mmp/kap4/cd082.htm

[42] http://www.eas.asu.edu/ holbert/eee460/bwr.html

[43] http://www.eas.asu.edu/ holbert/eee460/eee460.html

[44] http://www.eas.asu.edu/ holbert/eee460/decay.html

[45] http://www.eas.asu.edu/ holbert/eee460/fission.html

[46] http://www.glenbrook.k12.il.us/gbssci/phys/Class/vectors/u3l3c.html

[47] http://www.ba.infn.it/ zito/museo/leonardo.html

[48] http://www.falstad.com/mathphysics.html