Il laboratorio di matematica

Massimi e minimi

Una scatola capiente...

(in relazione all'attività proposta da "MATEMATICA 2003")

Livello scolare: 2°biennio.

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Avere familiarità con crescenza, decrescenza, positività, massimi e minimi di una funzione. <u>Saper dedurre da una tabella di valori l'esistenza di massimi e minimi.</u> Rappresentare e risolvere problemi di secondo grado. Utilizzare metodi grafici e metodi di approssimazione per risolvere problemi di massimo e minimo.	Equazioni e disequazioni di secondo grado. Esempi di funzioni e dei loro grafici.	Misurare. <u>Associare ad un applicazione reale, una funzione che la descriva, come suo modello.</u> Risolvere e porsi problemi di max e min. Ricercare massimi e minimi data una funzione.	Fisica (il principio di Fermat è prova dell'importanza che ha, l'acquisire abilità di ricerca di max e min)

<u>Contesto</u>

Ricercare i massimi e minimi di una funzione per ottimizzare attività reali.

Questa attività può essere proposta in una classe di un secondo biennio come primo esempio di problemi di secondo grado e di problemi di massimo o minimo.

<u>Descrizione dell'attività</u>

L'attività richiede di considerare una lastra cartacea quadrata, di lato 120 cm, di ricavare, ritagliando le parti indicate in figura (1) e ripiegando opportunamente i lembi, una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo e di rappresentare con una tabella, graficamente e formalmente, la variazione del suo volume per determinare le dimensioni della scatola che rendano massima la funzione che rappresenta tale volume[1].

[1] L'uso degli strumenti informatici è fortemente consigliato nella conduzione di quest'attività.

L'attività si struttura in due fasi.

<u>Prima fase</u>

L'insegnante propone agli studenti il seguente problema:
Considerate una lastra cartacea quadrata di lato 120 cm. Ricavate, ritagliando le parti indicate in figura (1) e ripiegando opportunamente i lembi, una scatola a forma di parallelepipedo rettangolo individuando le dimensioni di volume massimo.
Scegliete una variabile rispetto alla quale il suo volume varia (per esempio la misura dell'altezza della scatola, x) e rappresentate, in una tabella, alcuni valori assunti dal volume di tale parallelepipedo rettangolo al variare della variabile considerata, individuando, sul grafico, il punto di volume massimo.

La figura 1 illustra il progetto della scatola richiesta agli studenti.
I lembi da ritagliare sono quattro. Indichiamo con x la misura dell'altezza del futuro parallelepipedo e con y e z le dimensioni della base del parallelepipedo.

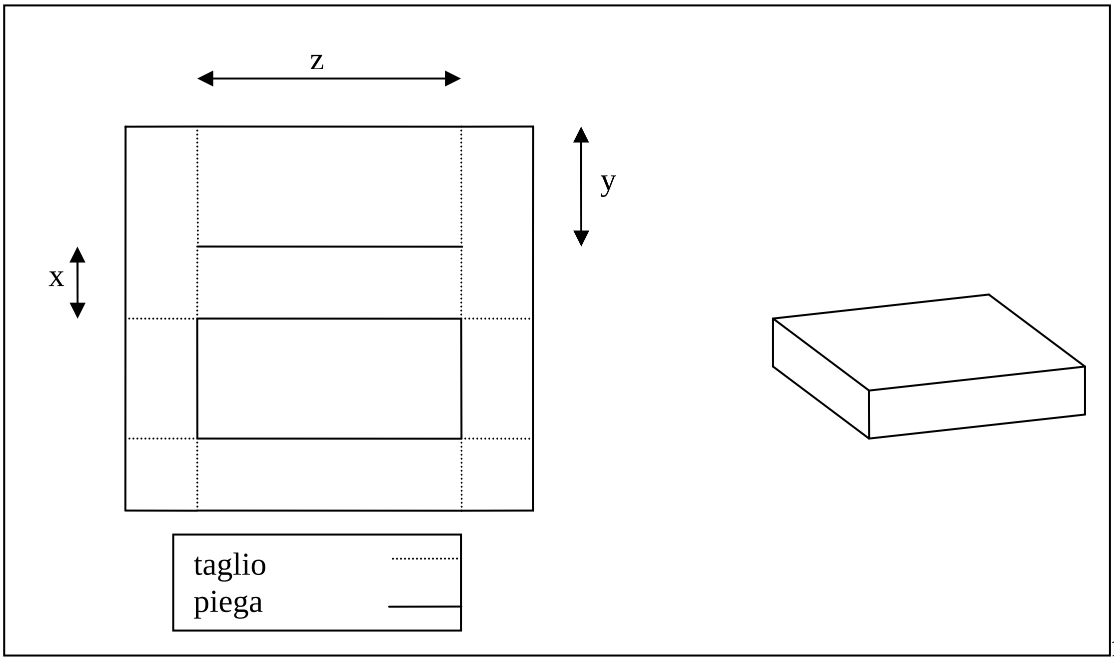


fig. 1

Con l'aiuto della calcolatrice Ti-89 (fig. 2)gli studenti ricavano una tabella di 4 colonne(x,y,z e Derivata volume) analizzando la quale dovranno dedurre le dimensioni della scatola (fig. 3).

SUGGERIMENTI:

- Impostare x come varibile, y_1,y_2 le altre due variabili in gioco espresse in funzione di x ed infine la variabile y_3 che rappresenta il volume del parallelepipedo.

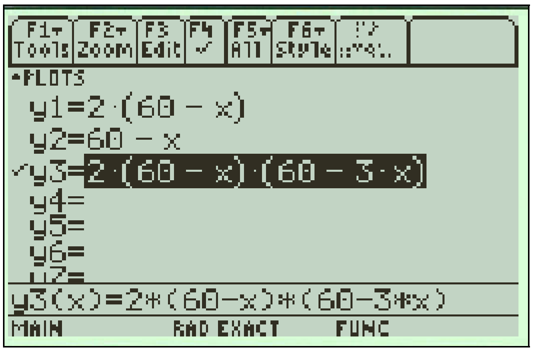
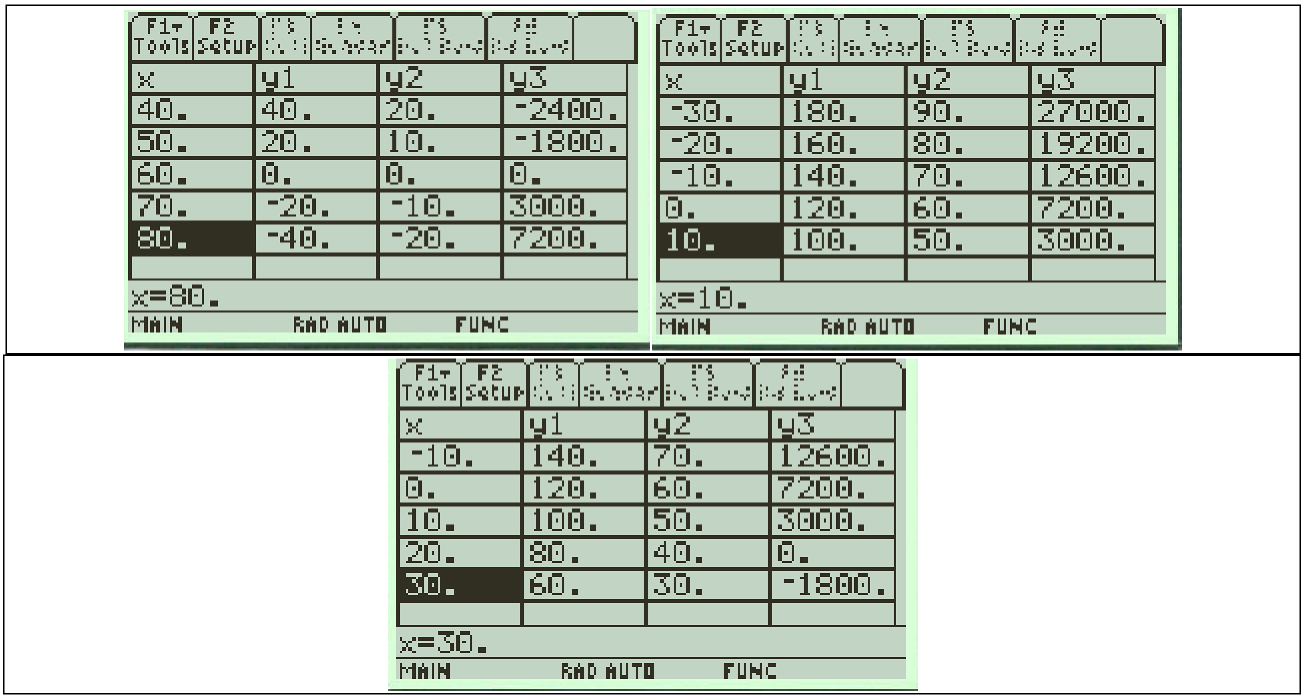


fig. 2



x	y1	y2	y3
40.	40.	20.	-2400.
50.	20.	10.	-1800.
60.	0.	0.	0.
70.	-20.	-10.	3000.
80.	-40.	-20.	7200.

x	y1	y2	y3
-30.	180.	90.	27000.
-20.	160.	80.	19200.
-10.	140.	70.	12600.
0.	120.	60.	7200.
10.	100.	50.	3000.

x	y1	y2	y3
-10.	140.	70.	12600.
0.	120.	60.	7200.
10.	100.	50.	3000.
20.	80.	40.	0.
30.	60.	30.	-1800.

fig. 3

Dall'osservazione della tabella, dovranno percepire come non sempre dall'annullarsi della derivata prima del volume, consegue la soluzione del problema (le misure delle dimensioni si annullano o sono negative). Dopo vari tentativi e ragionamenti logici, lo studente comprende che il volume massimo si ottiene in corrispondenza dei valori:

$$x=20 \quad y=40 \quad z=80$$

Si può proporre anche l'utilizzo del programma Excel, lasciando agli studenti libertà di scelta delle variabili in gioco, richiedendo loro la risoluzione del problema proposto; in entrambi i casi,richiedere l'invenzione di un problema reale con conseguente risoluzione, può essere più significativo didatticamente.

Seconda fase

L'insegnante invita gli studenti a formalizzare il problema indicando con *x* la misura dell'altezza del futuro parallelepipedo,rispetto al quale varia il volume, a determinare il suo volume in funzione di *x* e a calcolarne il massimo.

Gli studenti dovrebbero notare che, detta *x* misura dell'altezza, è possibile ricavare un sistema di due equazioni, semplicemente,osservando ,dal progetto della scatola, che il lato della lastra può esprimersi tramite le seguenti equazioni:

$$2x+z=120$$
$$2x+2y=120$$

dalle quali si ricavano le misure y e z in funzione di x

$$z=2(60-x)$$
$$y=60-x \qquad 0<x<60$$

Percui il volume del parallelepipedo è dato da

$$V = (y\ z)x=2x(60-x)^2$$

Calcolando la derivata della funzione volume, gli studenti dedurranno che il massimo volume della scatola sarà ottenuto quando le sue dimensioni risulteranno:

$$x=20 \quad y=40 \quad z=80$$

Possibili sviluppi

- Problemi di massimo e minimo.
- Dimostrazioni sintetiche di alcune proprietà determinate per via analitica.
- Mettiamo i ragazzi alla prova proponendo il medesimo problema proposto poc'anzi ma con lato della lastra leggermente più grande, ad esempio pari a 123.(In questo caso l'utilizzo della calcolatrice diviene essenziale per determinare in modo preciso le dimensioni della scatola)

Elementi di prove di verifica

1. Triangoli

Si consideri l'insieme dei triangoli tali che la somma di un lato e dell'altezza a esso relativa misuri 3 cm. Dopo aver scritto un'equazione della funzione che esprime l'area di tali triangoli al variare della misura del lato, rappresenta il grafico di tale funzione su un piano cartesiano e determina il triangolo di area massima.

2. Rettangoli

Considerate l'insieme di tutti i rettangoli isoperimetrici. Scegliete una variabile rispetto alla quale la loro area varia (per esempio uno dei lati del rettangolo) e rappresentate la variazione dell'area individuando, sul grafico, il punto di area massima. Rappresentate, inoltre, in una tabella, alcuni valori assunti dall'area dei rettangoli al variare del lato considerato.

3.Fermat

Le leggi della riflessione e della rifrazione si possono compendiare in questo unico principio i Fermat :la luce nella sua propagazione segue sempre il cammino per cui impiega il minimo tempo

Dopo aver scritto un'equazione della funzione che esprime il tempo per andare da A a B impiegato da un raggio di luce che si muove con velocità v, individuare le coordiante di un punto C posto sulla retta s a cui corrisponde il minimo tempo perché la luce passi da A a B.