TESI di MASTER

Una sperimentazione didattica sulla relatività

Franca Sormani

PREMESSA

La teoria della relatività, dopo un secolo dalla sua formulazione, è una teoria ormai consolidata, confermata da migliaia di esperimenti. Ci si deve porre allora il problema se debba diventare parte integrante dell'insegnamento della fisica o continuare a rimanere relegata, nella migliore delle ipotesi, ad un paio di settimane di lezioni .
Ovviamente la risposta non può che essere la prima, per diversi motivi.
Innanzitutto il processo educativo nella scuola deve guidare lo studente verso la costruzione di una sua consapevole visione del mondo in cui la fisica ha un'importante collocazione culturale in quanto "non solo ci fa conoscere il mondo, non solo è in grado di cambiarlo, ma è capace di trasformare le categorie con le quali lo interpretiamo".
In questo senso la fisica non solo contribuisce , nel contatto con le altre discipline, ad una visione completa dell'evoluzione del pensiero e della storia dell'umanità e alla formazione culturale dell'allievo (attraverso lo sviluppo di capacità di analisi e di collegamento e delle facoltà di astrazione e di unificazione che la fisica richiede per indagare sul mondo naturale), ma concorre anche alla acquisizione di una mentalità flessibile ed è indispensabile per le scelte che ogni cittadino è chiamato a compiere nella vita democratica.
Inoltre analisi recenti mostrano come gli studenti siano affascinati da argomenti di Relatività o di Fisica delle Particelle più di quanto non lo siano, in generale, dalla Fisica Classica;
La fisica "è una" e molti concetti (per esempio quelli legati ai principi di conservazione) sono fondamentali tanto per la Fisica Classica che per la Fisica Moderna.
E' dunque necessario studiare la Fisica Moderna , perché è fondamentale per la cultura del cittadino, suscita interesse negli studenti (con un vantaggio per l'apprendimento) ed è conveniente insegnarla, perché evidenzia principi fisici generali, comuni in parte anche alla Fisica Classica cosa che permette di rivedere e approfondire molti concetti generali, con evidenti benefici per la didattica.
Un altro obiettivo primario dell'insegnamento della disciplina deve essere quello di far nascere nell'allievo la sensibilità e la percezione alla base della capacità di comprendere la linea di demarcazione tra fisica e meta-fisica e (soprattutto all'inizio dello studio di ogni nuovo contenuto) la capacità di superare il cosiddetto "pensiero di senso comune" che troppe volte impedisce la comprensione dei contenuti stessi e del modo di procedere della scienza fisica (si vedano misconcezioni …)
Diventa a questo punto fondamentale "una ridefinizione dei saperi legandolo ad una nuova idea di cultura, di scuola, di processi di insegnamento/apprendimento … si è preso atto della necessità di selezionare nuclei di conoscenza disciplinare da approfondire e sviluppare "[1]. Infatti il Documento del Gruppo di Studio AIF-SIF [1], ha individuato il ruolo e il significato di una fisica insegnata per nuclei fondanti, cioè traducendo l'idea di nucleo fondante nel contesto della cultura scientifica: "Un diverso modo di guardare alla cultura scientifica e ai processi di insegnamento/apprendimento implica un diverso modo di individuare i contenuti: dalla quantità alla qualità. Dovrà essere privilegiata la ricerca di nuclei disciplinari fondanti ai quali ancorare percorsi didattici culturalmente significativi e riflessioni sul significato culturale delle scienze affinché queste emergano come discipline caratterizzate da una propria struttura interna, da specifici metodi di indagine e dall'uso di particolari linguaggi, nonché da una loro fecondità in una dimensione culturale più ampia di interconnessione con altre discipline."

In questa ottica l'insegnamento della relatività è fondamentale in quanto le concezioni di spazio-tempo sono "enti e / o idee centrali per il nostro essere nel mondo e per la nostra conoscenza di esso", ma sono anche emblematiche del succedersi nel corso dello sviluppo storico dei rapporti tra fisica e meta-fisica, tra fisica e pensiero cultuale.
Inoltre la teoria della relatività è anche una teoria quadro, che vincola la forma in cui devono essere espresse teorie specifiche.

Alcune riflessioni

Alla luce di quanto detto sopra la meta-fisica ha un ruolo sicuramente fondamentale nella progettazione di percorsi concettuali, in quanto questi dipendono necessariamente da una nostra ' visione del mondo' ma anche perché "il problema dell'apprendimento deve essere aggredito da una prospettiva culturale più ampia che tenga conto anche di tutti quegli aspetti (metafisici, religiosi,estetici, emotivi, pragmatici e sociali) che concorrono alla formazione di quella "mappa o costellazione di credenze [spesso] implicite, generalmente piuttosto solide, che ogni individuo si è creato su come funziona il mondo*"* [1]

Come ogni altra teoria fisica, la relatività ristretta può essere interpretata in modi diversi e, dunque, insegnata seguendo percorsi diversi. In particolare durante il corso si è sottolineato che i due 'filoni' principali seguiti nella didattica quello "algebrico" e quello "geometrico", hanno le loro radici nei due diversi approcci alla teoria, quello di Einstein e quello di Minkowski, che a loro volta rientrano nel dibattito su spazio e tempo che si è sviluppato nel corso della storia. Riprenderò, pertanto, i temi principali che sono stati affrontati, temi che hanno poi determinato la mia scelta didattica.

Cosa sia lo spazio (anche dal punto di vista del suo essere finito od infinito) e cosa il tempo sono stati due problemi che hanno improntato di sé tutta la storia de1 pensiero filosofico e scientifico.

Il concetto di spazio vuoto (il nulla) ,in Occidente, fu introdotto dai greci e il vuoto fu considerato da Democrito lo scenario dell'azione degli atomi, ossia il contenitore della materia: questa concezione fu accettata da Epicuro, Lucrezio e gli stoici, ma rimase minoritaria fino alla sua ripresa da parte di Newton. La teoria prevalente fino al Medio Evo fu infatti quella di Aristotele, che definiva lo spazio come una qualità posizionale degli oggetti materiali, e la posizione di un corpo come il sistema delle sue relazioni con gli altri corpi: in questa concezione non ha senso parlare né di spazio assoluto né tanto meno di spazio vuoto, e il rifiuto di entrambi si tramandò da Aristotele fino ai razionalisti (Cartesio, Spinoza, Leibniz) e agli empiricisti (Locke, Berkeley, Hume), per continuare poi nell'idealismo (Hegel), nello spiritualismo (Bergson) e nell'esistenzialismo (Heidegger).

L'introduzione della nozione di tempo nello studio dei fenomeni naturali è risultata ancora più importante dell'introduzione del concetto di spazio: lo spazio non può essere infatti compreso se non si ricorre al concetto o al fenomeno di moto e quest'ultimo, fissando il prima e il dopo, è naturalmente legato al tempo. Ed il tempo è un qualche cosa di intrinsecamente legato allo spazio.

> "*...l'esistenza del tempo non è possibile senza quella del cangiamento; quando, infatti, noi non mutiamo nulla entro il nostro animo o non avvertiamo di mutar nulla, ci pare che il tempo non sia trascorso affatto...*"(Aristotele)
> "*quando percepiamo il prima ed poi, allora diciamo che il tempo c'è*"(Aristotele)
> "*Che cos'è il tempo? Se nessuno me lo chiede, lo so; se dovessi spiegarlo a chi me lo chiede, non lo so: eppure posso affermare con sicurezza di sapere che se nulla passasse, non esisterebbe un passato; se nulla sopraggiungesse, non vi sarebbe un futuro; se nulla esistesse non vi sarebbe un presente. Passato e futuro: ma codesti due tempi in che senso esistono, dal momento che il passato non esiste ancora? e il presente, alla sua volta, se rimanesse sempre*

presente e non tramontasse nel passato, non sarebbe tempo, ma eternità. Se dunque il presente, perché sia tempo, deve tramontare nel passato, in che senso si può dire che esiste, se sua condizione all'esistenza è quella di cessare dallo esistere; se cioè non possiamo dire che intanto il tempo esiste in quanto tende a non esistere?"(S. Agostino)

Nel 1687 Newton [2]resuscitò il concetto di spazio assoluto come recipiente degli oggetti materiali, precisandone la struttura matematica di continuo tridimensionale, vuoto, statico ed euclideo. Questa concezione prevalse anche nella filosofia moderna: Kant attribuì infatti allo spazio newtoniano la natura dell'intuizione *a priori*, ossia di paradigma della conoscenza umana del mondo esterno. "*Lo spazio non è un concetto empirico, proveniente da esperienze esterne. [...]. Lo spazio è una rappresentazione a priori, necessaria, che sta a fondamento di tutte le intuizioni esterne. Non è possibile farsi la rappresentazione che non ci sia spazio, mentre si può benissimo pensare che non vi sia in esso alcun oggetto. Lo spazio dev'essere pertanto considerato come la condizione della possibilità dei fenomeni e non come una determinazione da essi dipendente; ed è una rappresentazione a priori, che sta necessariamente a fondamento dei fenomeni esterni. [...]. Lo spazio è ... un'intuizione pura. [...]. Dunque, soltanto da un punto di vista umano possiamo parlare di spazio, di esseri estesi ecc. Ma se prescindiamo dalla condizione soggettiva ... la rappresentazione dello spazio perde ogni significato*." [3]

Con la relatività speciale di Einstein, nel 1905, [3] si ritorna a una concezione relazionale e operativa dello spazio, anche se da un punto di vista puramente matematico il distacco dello spazio newtoniano non è troppo radicale: si ha ora un continuo quadridimensionale (per l'aggiunta del tempo), ancora vuoto, statico e piatto (senza curvatura), benché non più euclideo (non a caso, mettendo l'accento su aspetti diversi della teoria, è possibile interpretare la Relatività Ristretta come un vero e proprio trionfo dell'assoluto)

Un vero distacco dallo spazio newtoniano si ha invece nello spazio-tempo della relatività generale di Einstein, del 1915, che ha una struttura dinamica e una curvatura, dipendenti dalla materia che vi è contenuta. L'assenza di materia, e dunque l'esistenza dello *spazio-tempo vuoto*, è possibile, ma la sua struttura non coincide necessariamente con quella statica e piatta dello spazio-tempo della relatività speciale: esistono infatti modelli cosmologici in cui la quantità di materia dell'universo è nulla, ma lo spazio-tempo è comunque dinamico e curvo. "Non esiste un qualcosa come uno spazio vuoto, ossia uno spazio senza campo. Lo spaziotempo non pretende di avere un'esistenza per proprio conto, ma soltanto una qualità strutturale del campo".

Ritornando alla relatività ristretta, dalle letture di articoli di Einstein[4, 22, 23] emerge l'influenza della sua visione del mondo nel definire le leggi fisiche e la grande autorità che ha avuto in questo secolo nell'orientare non solo la ricerca scientifica, ma anche la riflessione sulla ricerca scientifica. Si nota, in particolare, la sua fiducia [6]

- <u>nell'intima unità della natura e nella necessità di arrivare ad una teoria unificata</u> "*L'esperienza è l'alfa e l'omega di tutto il nostro sapere intorno alla realtà , abbiamo assegnato alla ragione e all'esperienza il loro posto in un sistema di fisica teorica. La ragione assicura la struttura al sistema; i contenuti empirici e le loro relazioni reciproche, grazie alle proposizioni conseguenti della teoria, devono trovare la loro rappresentazione. Nella possibilità di una tale rappresentazione consiste unicamente il valore e la giustificazione dell'intero sistema e, in particolare, dei concetti e dei principi che ne stanno alla base*." Inoltre "*Il fine più alto del fisico è quello di pervenire a leggi elementari universali che permettano la ricostruzione dell'universo per via deduttiva. Nessuna via logica conduce a queste leggi universali: soltanto l'intuizione, fondata sull'esperienza, può condurre a esse. Una tale incertezza metodologica potrebbe far credere alla possibilità di un numero imprecisato di sistemi di fisica teorica, tutti ugualmente giustificati: opinione senza dubbio corretta dal punto di vista teorico. Lo sviluppo della fisica ha però dimostrato che, di tutte le costruzioni possibili, una soltanto, almeno per il momento, si è dimostrata decisamente superiore a tutte le altre*"

- <u>nel principio di *semplicità* e di *economia* e fiducia nella *simmetria* delle leggi fisiche</u>. L'analisi critica ad una teoria si deve basare essenzialmente su due criteri: la "perfezione interna" e "la conferma esterna". Einstein, ammette anche la pluralità di teorie deduttive sullo stesso campo di fenomeni, evidentemente diverse solo per i loro principi , ma sostiene che poi si debba distinguerle per la loro semplicità matematica o meglio per la loro migliore funzionalità, da intendersi sia come funzionalità rispetto alla matematica che come funzionalità esplicativa dei risultati degli esperimenti**.** La 'semplicità logica' delle premesse, per Einstein, deve essere considerata come un criterio per valutare la bontà di una singola teoria e soprattutto per valutare la scelta fra teorie diverse riguardanti lo stesso campo di fenomeni naturali. La "conferma esterna"riguarda invece la non contraddizione tra teoria e fatti empirici,ma *"una volta che si è arrivati a un'idea teorica, si fa bene a conservarla fino a che essa non conduca a una conclusione insostenibile."*
- <u>nella spiegazione formale della realtà naturale attraverso la matematica;</u> **"**Sulla base della esperienza fin qui raccolta, abbiamo il diritto di credere che la natura sia la realizzazione di ciò che di più matematicamente semplice è immaginabile. Io sono convinto che per mezzo di costruzioni puramente matematiche è possibile scoprire quei concetti che ci danno la chiave per comprendere i fenomeni naturali e i principi che li legano tra loro. I concetti matematici possono essere suggeriti dall'esperienza, ma mai dedotti da questa. L'esperienza resta, naturalmente, unico criterio per utilizzare una costruzione matematica per la fisica, ma è nella matematica che risiede il principio creatore. Io sono portato a credere nella capacità, in un certo senso, del pensiero puro a dominare la realtà, proprio come pensavano gli antichi**." :** attribuisce dunque alla matematica una creatività intrinseca che suggerisce come costruire le teorie fisiche <u>nel principio di causalità.</u>

In questo quadro di riferimento, si può osservare che Einstein pone estrema attenzione alla costruzione della definizione operativa del concetto di tempo e a tutti i passaggi necessari per dotare ogni osservatore di un reticolo di orologi sincronizzati, così come al procedimento di costruzione della definizione operativa della lunghezza
Tali passaggi prevedono le definizioni di "evento", di "tempo di un evento", di "simultaneità per eventi che avvengono in luoghi differenti" (ovvero di sincronizzazione di orologi) e la distinzione che occorre fare tra cosa significa definire (misurare) la lunghezza di un oggetto fermo oppure la lunghezza di un oggetto in movimento.
L'operazionismo, di Einstein (nel senso di "concetto fisico" come "gruppo di operazioni necessarie per misurarlo") sembra sia per lo più funzionale a definire con rigore alcuni passaggi nelle definizioni (indispensabili, non a caso molti di essi si ritrovano anche in Poincarè, le cui analisi spesso anticipano quelle di Einstein) ed ha rappresentato il punto di riferimento di quella tradizione didattica di cui un importante esponente è Resnick. Nell'ambito di questa tradizione, il linguaggio matematico preferito è quello algebrico e l'accento viene posto sugli effetti relativistici, interpretati come conseguenze delle diverse modalità di condurre misure di spazio e di tempo in sistemi di riferimento in moto relativo.

Sul fronte, invece, sostanzialista, anche se con una 'visione sostanzialista dello spaziotempo' si ritrova Minkowski , la cui scelta del linguaggio geometrico non aveva il solo scopo di proporre uno strumento potente per ritrovare quanto già espresso dalle trasformazioni di Lorentz: la geometria era infatti scelta come linguaggio particolarmente efficace per proporre una nuova interpretazione della teoria, in quanto lo spaziotempo deriva dal mondo dei fenomeni, è reale ed è indipendente dall'osservatore[26]
E' emblematico l'atteggiamento di Einstein : inizialmente ostile in quanto vedeva il riemergere in fisica di uno spazio tanto assoluto quanto lo era quello di Newton, contro il quale il si era scagliato e che pensava di avere una volta per tutte espulso dalla fisica attraverso l'idea di ricondurre il significato dei concetti alle loro definizioni operative. Nel lavorare, però,

alla scrittura della relatività generale, Einstein cominciò a rendersi conto dell'importanza di una visione quadridimensionale e di quanto l'approccio geometrico fosse di gran lunga preferibile all'originaria scrittura algebrica della relatività ristretta, arrivando ad una visione di tipo realista (anche se, come ho detto sopra, rimanendo sempre nell'ambito di una concezione relazionalista dello spazio-tempo)

In quest'ultimo contesto si inseriscono testi come il Taylor-Wheeler o la proposta di Fabri [9] e [10] che introducono fin da subito un linguaggio spazio-temporale, grazie al quale le proprietà di invarianza della teoria acquistano un ruolo predominante rispetto agli aspetti relativistici e l'apertura verso la relatività generale risulta decisamente agevolata, anche se, a mio parere, il Taylor-Wheeler non rinuncia ad esplicitare, ricavare e discutere i fenomeni anche dal punto di vista algebrico, al contrario di Fabri, dove le trasformazioni di Lorentz sono totalmente bandite e i problemi proposti vengono risolti sempre a partire dalla rappresentazione nello spazio-tempo.

Proposta didattica

Ritengo che le scelte didattiche debbano orientarsi verso percorsi che privilegino (almeno in una fase iniziale) una trattazione di tipo fenomenologico, evitando di introdurre formalismi astratti senza mostrarne la "spendibilità" e la capacità interpretativa. Da questo punto di vista ho trovati pregi e difetti ad entrambi i percorsi, rispetto ai quali ho operato le mie scelte, anche in considerazione della classe in cui potevo effettuare la sperimentazione

In particolare nell'approccio alla Einstein (Resnick) ho riscontrato le seguenti potenzialità :

- Possibilità di rivedere criticamente le definizioni di grandezze fisiche fondamentali e di alcuni concetti emblematici (come quello di simultaneità), in quanto vengono individuati problemi fondamentali da risolvere
- Riflessione sul processo di misura e sullo strumento di misura, misura che è più che mai posta al centro della costruzione del sapere fisico
- Perfezione logica, certezza dei principi fondamentali (di evidenza sperimentale), validità per tutti i fenomeni naturali
- La teoria appare molto fenomenologica (anche se molte volte si ricorre all'esperimento pensato, ideale e/o simulato)
- La teoria appare aderente alle sue stesse applicazioni
- E' possibile un'organizzazione problematica, utile nell'applicazione didattica
- I fenomeni sono spiegati tramite un formalismo matematico adatto.
- Il modello non è solo deduttivo degli sviluppi della teoria dai principi fondamentali, ma anche induttivo dai fenomeni alla teoria

E i seguenti limiti

- Difficoltà nell'introdurre alcuni formalismi (come le trasformazioni di Lorentz)
- Difficoltà nell'usare le equazioni in situazioni concrete
- Alcuni aspetti geometrici vengono posti in secondo piano, con l'effetto di generare un salto concettuale con la relatività generale

- Problemi aperti nella definizione di sistema inerziale

Potenzialità in un approccio alla Minkowski

- semplicità e immediatezza dell'approccio geometrico mediante rappresentazione grafica;
- possibilità di risoluzione di problemi classici di relatività in maniera semplice;
- possibilità di mettere in luce l'intima connessione che intercorre tra spazio e tempo in maniera grafica.

Limiti:

- difficoltà nell'introduzione dell'invariante relativistico da un punto di vista puramente geometrico;
- macchinosità di alcune costruzioni grafiche.

Alla luce di quanto detto sopra ho trovato interessante il percorso1 proposto in [1] che si sviluppa intorno al concetto di spazio visto come sistema di riferimento, proponendo un approccio di tipo fenomenologico alla conoscenza e come guida della logica interna del percorso. Infatti, a far nascere l'esigenza di definire un riferimento spaziale e un riferimento temporale è il problema della descrizione del moto. La scelta è stata, dunque, di introdurre la relatività agli inizi del triennio, quando si inizia a parlare di principio di relatività, perché è importante che i ragazzi abbiano chiaro da subito il significato di modello, i suoi limiti di validità , capiscano che la fisica, come qualsiasi altra disciplina o linea di pensiero, è in continuo divenire, e possano acquisire una visione dialettica e non statica del pensiero scientifico e dei suoi fecondi legami con il pensiero filosofico. Ovviamente l'introduzione della relatività in terza, comporta che non si possano sviluppare certi percorsi storici, in particolare i problemi aperti dall'elettromagnetismo, ed epistemologici (i ragazzi hanno iniziato solo quest'anno filosofia;alcune importanti figure del pensiero, come Galileo, Newton, Leibnitz, Cartesio, verranno trattate solo in quarta), per cui si è limitata la riflessione storica ed epistemologica al principio di relatività galileiano e ho scelto di introdurre, invece, la relatività ristretta da una prospettiva logica e sperimentale, limitandomi, in terza, alla trattazione della cinematica, per continuare , approfondendola, in quarta, accanto allo sviluppo della dinamica. Si considerano già effettuate alcune riflessioni sui concetti di spazio e tempo, in particolare su spazio e tempo intesi come oggetti fisici dotati di sostanzialità
(con brani scelti da Epicuro, Lucrezio, Newton) e spazio e tempo intesi come costruzione della mente umana per "capire" il mondo naturale (con brani scelti da Aristotele,
Cartesio, Leibniz); nella trattazione si sono ovviamente proposti esperimenti per la misura di queste grandezze
e sono stati proposti esempi (rif. Fabri) Il percorso è pensato anche successivo alla trattazione di cinematica e dinamica e, come risulterà chiaro, segue il criterio di partire dalla fenomenologia e dagli esperimenti, anche se poi la trattazione sarà essenzialmente geometrica. Si suddivide in tre parti,per esigenze di scansione temporale : cinematica relativistica, dinamica, relatività generale (quest'ultima rimandata alla fine dell'anno scolastico, per i motivi che dirò in seguito)
Ho tenuto anche un corso di relatività per studenti della scuola in cui insegno interessati all'argomento, all'interno del "progetto eccellenza", progetto che mira a supportare gli studenti più motivati e, in particolare, a seguirli nelle tesi di maturità. Il percorso proposto a questi studenti (4, di cui due presenti al WS3 di Udine) è stato analogo a quello riportato di seguito, anche se con approfondimenti matematici, di cui discuterò di volta in volta.

Percorso didattico : cinematica

- Si propone preliminarmente un questionario che evidenzi i loro concetti di spazio, tempo, sistema di riferimento e si danno loro da leggere brani da Bruno e Galileo, con relazione di un saggio breve . Si possono assegnare in proposito :
    1. Cap. ' Con Copernico e oltre' pag.23-27 da ' I grandi della scienza' : G.Bruno
    2. Cap. ' il grande libro' pag. 88-94 da ' I grandi della scienza' : Galileo

- Si discutono in classe i risultati del questionario e della lettura dei brani, focalizzando i punti centrali della discussione per introdurre i ragazzi al principio di relatività e alla sua formalizzazione (2 h) (cinematica1)
- Formalizzazione del principio di relatività; trasformazioni di Galileo; Introduzione dello spazio –tempo, con esempi di moti nello stesso (3 h) (cinematica2)
- Esperimenti su finitezza e invarianza della velocità della luce e su c come velocità limite; conseguenze su spazio- tempo (2h) (cinematica3)
- Test (1h)
- Orologio a luce e distanza spazio-temporale ; Iperbole di calibrazione; Esempi di simultaneità; dilatazione del tempo; contrazione delle lunghezze (2 h + 8 h di laboratorio) (cinematica 3)
- Esercizi guidati; esperimenti;discussione in classe (2 h) (cinematica 3)
- Verifica

Metodologia
- lezioni frontali
- discussioni guidate
- analisi di brani tratti da articoli originali,
- analisi di filmati,
- soluzione e discussione di esercizi e problemi
- test ed esercizi di scrittura di saggi brevi

Cinematica1 : Spazio -tempo

Le concezioni di spazio-tempo, *"che sono enti e / o idee centrali per il nostro essere nel mondo e per la nostra conoscenza di esso",* sono emblematiche del succedersi dei rapporti tra fisica e meta-fisica nel corso dello sviluppo storico.
Per questo mi è sembrato importante sapere preliminarmente quali idee hanno in proposito gli studenti

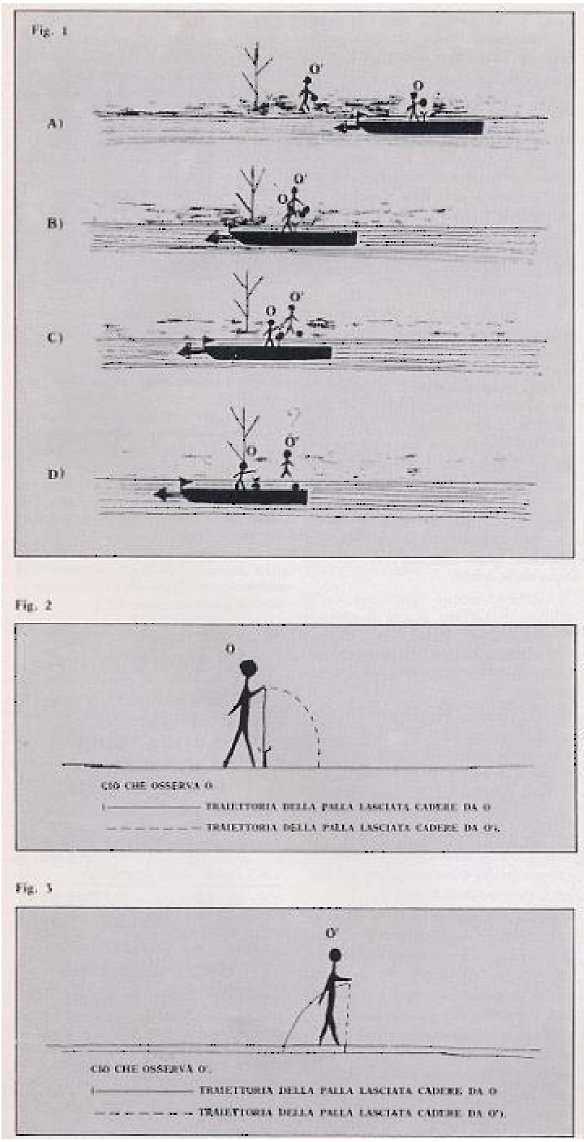
Viene assegnato un questionario iniziale (Vedi questionario) e si assegnano letture da Bruno e Galileo con la richiesta di produrre un saggio breve su dove e come dagli articoli si evinca una formulazione del principio di relatività Gli obiettivi specifici di questa fase sono di effettuare un'indagine preliminare su conoscenze e atteggiamento,in modo da
- indurli a riflettere sul significato di spazio e tempo, sugli strumenti di misura
- imparare ad osservare, porsi domande, problematizzare
- riflettere sulle procedure tipiche della disciplina
- imparare a reperire informazioni, astraendo i contenuti essenziali
- imparare a esprimersi con un linguaggio adeguato

Si discutono in classe i risultati del questionario e della lettura dei brani, focalizzando i punti centrali della discussione per introdurre i ragazzi al principio di relatività e alla sua formalizzazione

<u>Cinematica2 :</u> **Principio di relatività**

Gli obiettivi generali di questo modulo sono :
- far emergere i significati concettuali di un esperimento, anche ‘pensato’
- saper confrontare le proprie ipotesi interpretative con conseguenze verificabili che da esse derivano.
- saper descrivere una stessa situazione con più linguaggi (comune, algebrico, geometrico…)

<u>Gli obiettivi specifici sono :</u>
- far emergere il significato di sistema di riferimento e di sistema di coordinate
- capire il principio di relatività, nelle diverse formulazioni
- saperlo usare per descrivere situazioni già note e per affrontare la risoluzione di problemi
- capire il concetto di evento
- capire il concetto di invariante
- iniziare a introdurre lo spazio tempo ed usare una descrizione geometrica per la descrizione dei fenomeni



Si sintetizzano i risultati del test (vedi appendice1a) , le osservazioni degli studenti sugli articoli dati e sulle domande poste. In particolare, relativamente alle domande, ci si sofferma sui seguenti brani

Posto alcuno sopra l'arbore di una nave, che corra quanto si voglia veloce, non fallirà punto il suo tratto di sorte che per dritto dal punto E, che è nella cima dell'arbore, al punto D, che è nella radice dell'arbore, o altra parte del ventre e corpo di detta nave, la pietra o altra cosa grave gittata non venga. Così se dal punto D al punto E alcuno che è dentro la nave, gitta per dritto una pietra, quella per la medesima linea ritornerà a basso, muovasi quanto si voglia la nave, pur che non faccia degl'inchini». (Da La cena delle ceneri G. Bruno).

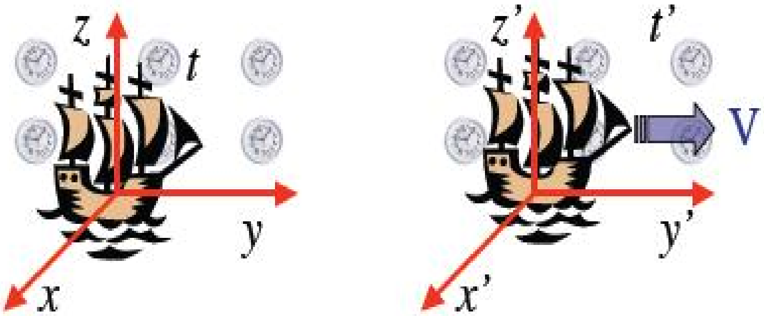
*Riserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; .....; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; … le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto ;…Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, ….., **fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma**: …(G.Galilei)*

Dalla discussione successiva si cerca di far emergere le due visioni di spazio, che poi ritroveremo negli sviluppi successivi e si inizierà a porre domande su cui riflettere relativamente al principio di relatività; in particolare :
- possiamo pensare a qualche esperimento che permetta di distinguere se siamo fermi o se ci muoviamo di moto uniforme?

- Come descriveremmo il moto di una pallina che trasla su un piano se siamo fermi rispetto ad essa o se ci muoviamo alla stessa velocità ?

Si fa quindi emergere la necessità di definire un riferimento, rispetto al quale abbia senso parlare di quiete o moto rettilineo uniforme

Simulazione
http://www.ba.infn.it/~fisi2005/animazioni/simulazione037.html



In questa fase è importante sottolineare come i riferimenti siano ambienti reali, in cui si possono fare delle misure (laboratorio, aula, treno, satellite…)alcuni comodi (qui ho accennato il problema della gravità e dei SR accelerati, ma abbiamo considerato solo la definizione usuale di riferimento inerziale), altri meno (distinguendoli dai sistemi di coordinate) e che la loro esistenza pone il problema di come si trasforma la descrizione di uno stesso moto da diversi sistemi di riferimento moto . Allo stesso modo occorre far presente, in modo che non si generino confusioni tra soggettivo e oggettivo, che le misure sono dovute a strumenti e che, quando negli esempi si parla di osservatore, è solo per esemplificare, con immagini, determinate situazioni che loro stessi possono aver vissuto

Dalla discussione guidata si arrivano a sottolineare i seguenti punti :
- Due situazioni apparentemente diverse-la quiete e il moto rettilineo uniforme- sono, dal punto di vista fisico, indistinguibili e perciò equivalenti
- Non è possibile sapere, in assoluto, quale sia la velocità di un sistema di riferimento, ha senso parlare solo di moto o quiete relativa
- Nel descrivere un moto relativo tra due sistemi di riferimento S e S' è possibile ipotizzare S fermo e S' in moto e viceversa
- Dire che non è possibile privilegiare un sistema rispetto ad un altro corrisponde ad affermare che le descrizioni di uno stesso fenomeno fisico fornite dai diversi sistemi di riferimento devono essere equivalenti

Si sottolinea agli studenti che quest'ultimo punto, in particolare, sarà oggetto del nostro approfondimento.

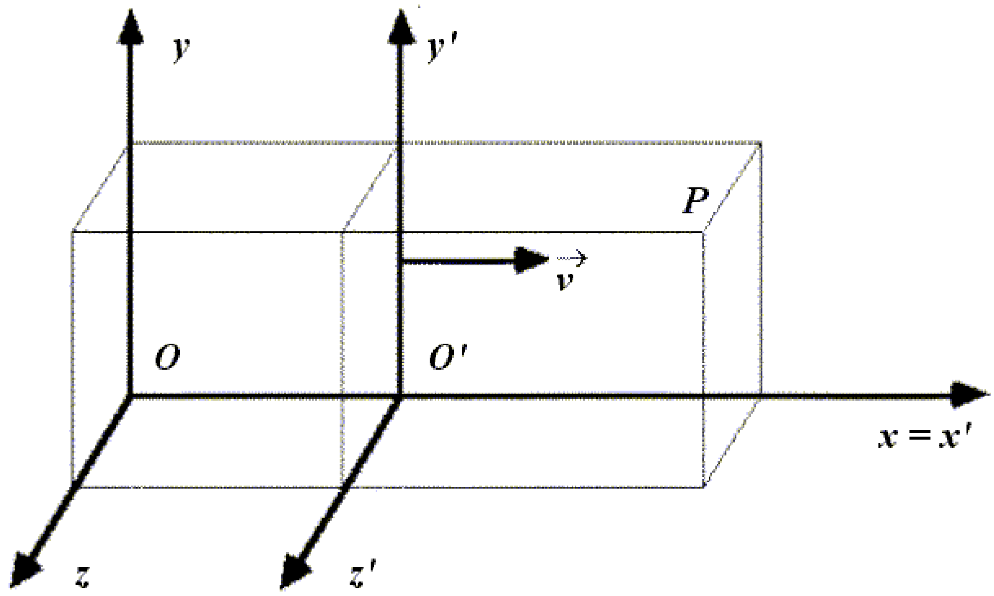
Si ricavano poi le trasformazioni di Galileo a partire da esempi concreti, ad es. l'analisi di moti vari o oggetti in rispetto ad un sistema S' (che può essere un treno in moto) e rispetto ad un altro sistema S(banchina). In particolare abbiamo analizzato la situazione di due persone su un autobus, una alle fermata e una in bicicletta nella stessa direzione dell'autobus, nonché osservato filmati (esperimenti con attrezzatura Pasco)
http://www.schulphysik.de/java/physlet/applets/fall1.html

http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/index.php?topic=140FirefoxHTML\Shell\Open\Command

Si tratta ora di ricavare le formule che legano le coordinate spazio temporali di uno stesso evento visto da due diversi riferimenti e di provare che le leggi della fisica sono invarianti, nella forma, al passaggio da un riferimento all'altro; si tratta cioè di tradurre in formule il contenuto di questo principio. Consideriamo allo scopo due riferimenti (cioè due sistemi di assi cartesiani ortogonali):

S (***x***, ***y***, ***z***, ***t***) e S' (***x***', ***y***', ***z***', ***t***')

riferiti rispettivamente alle origini **O** ed **O'**, di cui **O'** mobile rispetto ad **O** di moto rettilineo uniforme con velocità v_0. Si supponga che gli osservatori solidali ad **O** ed **O'** siano dotati di due orologi per la misura dei tempi sincronizzati tra loro in modo che, per esempio, quando **O** coincide con **O'** entrambi gli orologi segnino zero. Non è restrittivo supporre che gli assi ***x*** e ***x'*** siano sovrapposti e scivolino l'uno sull'altro, in modo che ***v*** sia parallela ad essi, mentre gli altri (***y*** e ***y'***, ***z*** e ***z'***) restano paralleli fra di loro. Si consideri un certo evento fisico che avviene in un punto ***P*** con coordinate **(** ***x, y, z*** **)** e **(** ***x', y', z'*** **)** rispetto a **O** ed **O'** rispettivamente, e negli istanti ***t*** e ***t'*** misurati dai due osservatori.



Tenendo conto che **OO'** = $v_0 t$ e che sembra ovvio supporre $t' = t$, dalla figura sopra segue subito che valgono le cosiddette **trasformazioni galileiane**:

$$\begin{cases} x=x'+OO'= x' + v_0t' \\ y=y' \\ z=z' \\ t=t' \end{cases}$$

Bisogna chiarire fin d'ora che questi sistemi di riferimento sono **SISTEMI A QUATTRO COORDINATE**: ogni punto di essi è definito da tre coordinate nello spazio e da una nel tempo, misurate le prime tre rispetto a un'origine spaziale, la quarta rispetto a un istante iniziale $t = 0$.

Adesso passiamo alle velocità. Se un corpo si muove con velocità costante v rispetto a S, quale velocità v' avrà rispetto a S', sapendo che il sistema **O'** si muove rispetto ad **O** con velocità v_0? Lo ricaviamo immediatamente dividendo membro a membro la prima e la quarta delle trasformazioni di Galileo, e tenendo conto che:

$$x/t = v \quad \text{(in S)}$$

$$x'/t' = v' \quad \text{(in S')}$$

si ha allora:

$$\begin{cases} v_x = v_{x'} + v_0 \\ v_y = v_{y'} \\ v_z = v_{z'} \end{cases}$$

$\mathbf{V} = \mathbf{V'} + \mathbf{V_0}$

Dividendo ora le equazioni ottenute per Δt, si ottengono le espressioni per l' accelerazione del punto in S e S'

$$\begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases}$$

Dato che v_0 è per ipotesi costante, si ottiene $\mathbf{a} = \mathbf{a'}$ L'accelerazione è la stessa nei due sistemi di riferimento

Se teniamo conto del fatto che la massa dei corpi è un invariante, utilizzando l'Equazione fondamentale della Dinamica, concluderemo che **la forma delle equazioni non dipende dal riferimento**

: il principio di relatività consiste proprio nell'affermazione che le descrizioni di uno stesso fenomeno fisico fornite dai diversi sistemi di riferimento devono essere equivalenti, ovvero che le leggi della Fisica sono invarianti

Si propone un esercizio per far capire meglio il concetto di invariante.

•Bruno, Galileo, Alberto sono alla stazione

Al tempo t =0 Bruno è fermo ad un estremo della banchina lunga L = 50 m (riferimento S); Galileo corre lungo la banchina alla velocità del treno ; Alberto si trova sul treno che si muove a v = 5 m/s (riferimento S')

Dopo 10 s in S Galileo ha percorso 50 m (lunghezza della banchina), in S' Galileo è fermo (spostamento nullo). Ma allora in S' la lunghezza della banchina è nulla?

Utilizzando le relazioni ricavate, si ha che

$\Delta x' = x'(t_2) - x'(t_1) = \Delta x - v\,(t_2 - t_1)$

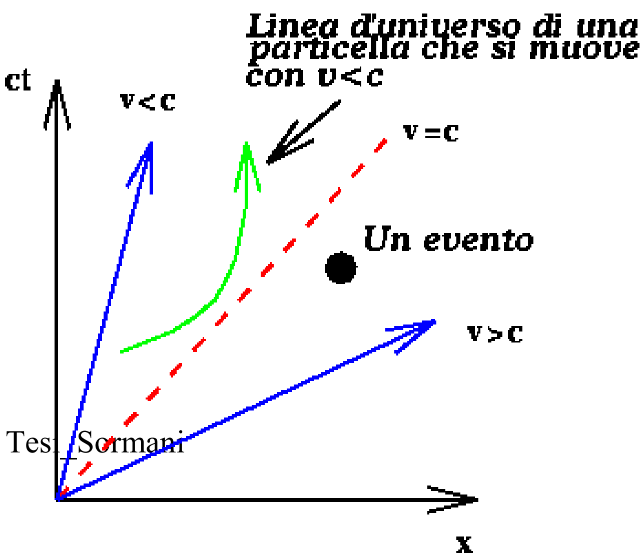
da cui segue che gli spostamenti non sono invarianti

Una lunghezza è una distanza tra due punti A e B pari alla differenza tra le coordinate di B e quelle di A misurate nello stesso istante di tempo Quindi

$L = x_B(t) - x_A(t)$

$L' = x'_B(t) - x'_A(t) = (x_B(t) - vt) - (x_A(t) - vt) = x_B(t) - x_A(t) = L$

Le lunghezze sono invarianti



Siamo poi passati a rappresentare le trasformazioni nello spaziotempo classico

Per **spaziotempo** (indicato anche come **spazio-tempo** o **cronotopo**) si intende uno spazio quadridimensionale, composto dall'usuale spazio a 3 dimensioni con il tempo come coordinata aggiuntiva.

I punti dello spaziotempo sono detti **eventi** e ciascuno di essi corrisponde ad un fenomeno

che si verifica in una certa posizione spaziale e in un certo istante. Ogni evento è perciò individuato da quattro coordinate.
. Una particella o un osservatore che si muove nello spazio tempo descrive una traiettoria chiamata **linea d'universo**

Siamo poi passati a rappresentare le trasformazione nello spaziotempo classico, ossia in un piano x^1x^0 (dicendo semplicemente che è consuetudine relativistica mettere in ascissa lo spazio e non il tempo! E moltiplicare t per c per cui x^0=ct--. Vedi Approfondimento1)

Si fanno i calcoli con l'esempio proposto

Si discutono le simulazioni in

http://www.phy.syr.edu/courses/modules/LIGHTCONE/events.html

In particolare si arriva alla struttura dello spazio-tempo classico

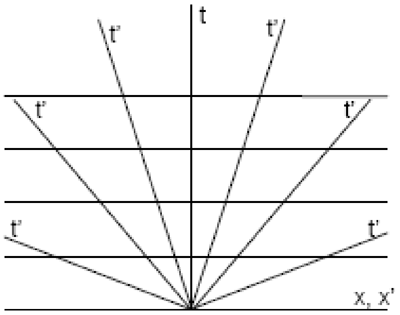


Fig. 7 – Lo spaziotempo classico

Si fa osservare che se l'asse temporale è la linea universo di un oggetto preso a riferimento, allora in questo spazio tempo la simultaneità assoluta implica che le velocità possono assumere valori qualsiasi e non si hanno vincoli per la direzione di t'. (Non esiste una velocità limite!)

In particolare **l**a natura assoluta del tempo fa sì che nella Fisica Classica lo spazio ed il tempo siano due entità totalmente separate: mentre le tre coordinate spaziali dipendono dallo stato di moto dell'osservatore, la coordinata temporale invece non ne è influenzata e risulta identica per tutti gli osservatori, indipendentemente dal loro stato di moto. (vedi approfondimento 1)

In uno spaziotempo a due dimensioni (x, t) la relazione di simultaneità fra più eventi viene ad essere rappresentata geometricamente dal fatto che tali eventi giacciono su rette di equazione $t = t_0$, che sono ovviamente perpendicolari all'asse t (e quindi parallele all'asse x). Inoltre queste rette sono invarianti rispetto alle GT: infatti anche in un differente sistema di riferimento SR' l'equazione della retta rimane sempre $t' = t_0$.

La retta $t = t_0$ divide lo spaziotempo classico in tre regioni:

- gli eventi giacenti sotto di essa ($t < t_0$) appartengono al *passato* (nel senso che sono già avvenuti) di un qualsiasi evento giacente su di essa;
- gli eventi giacenti su di essa ($t = t_0$) appartengono al *presente* (nel senso che avvengono contemporaneamente) di un qualsiasi evento giacente su di essa;
- gli eventi giacenti sopra di essa ($t > t_0$) appartengono al *futuro* (nel senso che devono ancora avvenire) di un qualsiasi evento giacente su di essa.

Per quanto infine attiene le relazioni di causalità, notiamo che l'assenza di una velocità limite fa sì che un evento nel presente può essere stato influenzato da un qualsiasi evento nel passato e può a sua volta influenzare un qualsiasi evento nel futuro, prescindendo totalmente dalle coordinate spaziali di tali eventi.

In questa fase non sono stati trattati i sistemi in volo libero nè i sistemi in moto accelerato e la problematica delle forze apparenti, ma ho pensato che per la linearità del discorso, per il fatto che non è stata ancora trattata la forza di gravità nella terza e che il percorso di relatività è visto come strutturale all'insegnamento della fisica, fosse meglio rimandare questa discussione successivamente, in concomitanza all'insegnamento della gravitazione. In questa fase verranno anche trattati i sistemi non inerziali e le considerazioni sulle forze apparenti.

Cinematica3 : finitezza e invarianza di c; c come velocità limite

Gli obiettivi generali di questo modulo sono :
- far emergere i significati concettuali di un esperimento
- far emergere i punti di 'crisi' interpretativa di una teoria

Gli obiettivi specifici sono :
- far emergere il significato di velocità limite e velocità costante
- far emergere le conseguenze dell'esperimento proposto sulle leggi appena trattate
- individuare quali sono gli elementi di crisi all'interno della teoria

Si espongono brevemente e secondo una linea storica gli esperimenti sulla misura di c (che è dunque finita)
Si considera il fatto che c sia una velocità limite, proponendo l'esperimento di Bertozzi (filmato PSSC) : non era proponibile in questo caso l'esperimento di Michelson-Morly e anche alti esperimenti presi in considerazione mi sembravano complessi, mentre questo mi è sembrato molto significativo (dà la possibilità di creare tabelle, grafici ed interpretarli), tanto da pensare di introdurlo in una classe terza, anche se questo richiede di spiegare la energia cinetica acquistata agli elettroni semplicemente tramite lavoro (si cercherà di far capire che l'acceleratore 'serve' proprio ad imprimere una forza …)

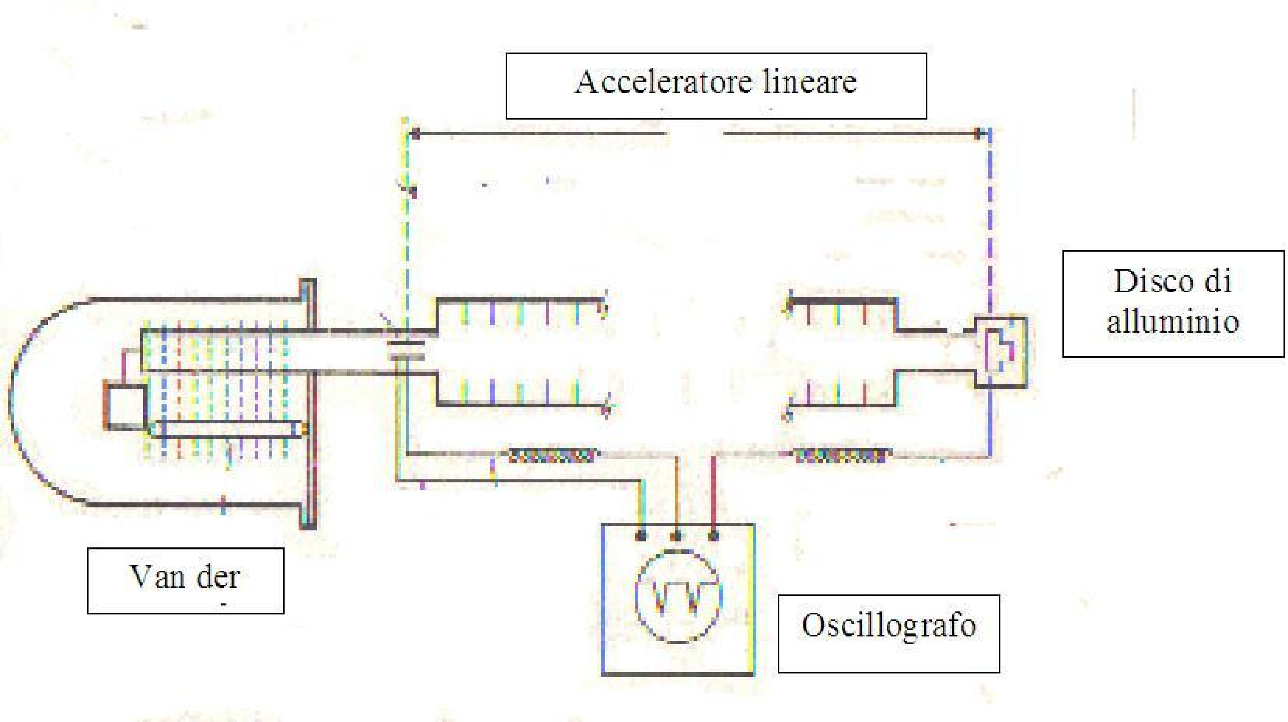
www.fisica.unimo.it/uni_fisica/**di**dattica/FIS_LTmeccanica_relativita10.pdf
Nel 1963 lo scienziato William Bertozzi effettuò un esperimento in proposito, con l'intento di dimostrare l'esistenza della velocità limite. Facendo uso dell'apparato sperimentale schematizzato nel seguito, venivano creati degli elettroni liberi che poi erano accelerati mediante opportune differenze di potenziale
In relazione ad ogni "spinta" data agli elettroni, cioè ad ogni energia trasferita ad essi, Bertozzi misurò la velocità acquisita dalle particelle cariche

L'apparato sperimentale

- **generatore elettrostatico di Van de Graaff**: una macchina per produrre cariche elettriche e fornire loro un'energia cinetica fino a 1,5 MeV tramite lavoro elettrostatico

- **LINAC (acceleratore lineare)**: un tubo metallico al cui interno, nella prima parte dell'esperimento, non vi sono campi elettrici, a differenza della seconda parte, durante la quale contribuisce ad accelerare gli elettroni

- **disco di alluminio:** su cui urtano gli elettroni al loro arrivo e abbastanza spesso da impedire che essi lo attraversino.
- **oscillografo**: uno strumento connesso alle posizioni di partenza e arrivo degli elettroni tramite due cavi identici che introducono lo stesso ritardo.



Bertozzi procedette alla misurazione della velocità degli elettroni al variare della loro energia cinetica

Energia cinetica	**Valori sperimentali**	**Valori previsti dalle leggi della meccanica classica**
K(MeV)	**$(v_{sper})^2$ $(m/sec)^2$**	**$(v_{class.})^2$ $(m/sec.)^2$**
0.5	**$6.8*10^{16}$**	**$17.6*10^{16}$**
1.0	**$7.7*10^{16}$**	**$35.3*10^{16}$**
1.5	**$8.3*10^{16}$**	**$53*10^{16}$**
4.5	**$8.8*10^{16}$**	**$160*10^{16}$**
15.0	**$9.0*10^{16}$**	**$530*10^{16}$**

valori di v^2 previsti dalle leggi della meccanica classica ($v^2 = 2K/m$) erano nettamente superiori a quelli ottenuti sperimentalmente.

La linea tratteggiata rappresenta le previsioni della meccanica classica

La curva continua rappresenta i valori ottenuti sperimentalmente, che non concordano con le previsioni della meccanica classica. (In quarta abbiamo poi verificato la concordanza con le previsioni della relatività ristretta).
Il principio di relatività porta a concludere che, riscontrata l'esistenza di una velocità limite con valore c in un sistema di riferimento inerziale, il limite deve sussistere, con lo stesso valore, in ogni altro sistema (se si postula l'esistenza di una velocità limite con valore c, si attribuisce ad essa lo status di legge che, per il principio di relatività, dovrà essere la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali).

Discussione su velocità limite e invarianza : se c non fosse invariante avremmo modo di distinguere tra due sistemi in moto rettilineo uniforme tra loro (cosa che violerebbe il PR) ?

Si propone, quindi, come prova diretta del secondo postulato di Einstein l' osservazioni di stelle doppie
Consideriamo un sistema stellare binario (cfr. fig. 3.1); quando la stella S' si muove verso la Terra con velocità scalare v, la luce dovrebbe impiegare un tempo $\tau = l/(c+v)$ per raggiungere la Terra, mentre quando S' si muove in direzione opposta con velocità scalare v la luce dovrebbe impiegare un tempo $\tau' = l/(c-v) > \tau$.
Tutto ciò si tradurrebbe nell'osservazione di una rotazione apparente irregolare di S' attorno ad S: più veloce nel primo caso e più lenta nel secondo; l'astronomo De Sitter ha smentito con l'osservazione diretta questa ipotesi.
Ciò prova che, rispetto ad un riferimento inerziale, la velocità di un segnale luminoso è indipendente da quella della sorgente (costanza della velocità della luce).
Altra possibile spiegazione è quella data da Fabri per i GPS. (svolta come esercitazione in classe, con osservazione della propria posizione per qualche ora- **Vedi Esercitazione1 GPS**)

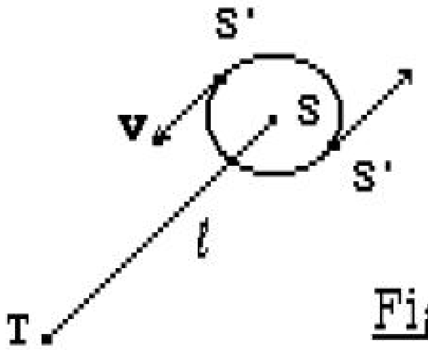


Fig. 3.1

Si fa presente che Einstein pone questo come secondo postulato della relatività e si cerca di far dire loro cosa implica questo postulato
Formulazione del secondo postulato
Questo modulo è stato svolto pressoché interamente in laboratorio, mentre in classe è stato riproposto il test iniziale, i cui risultati sono riportati in appendice (Test iniziale)

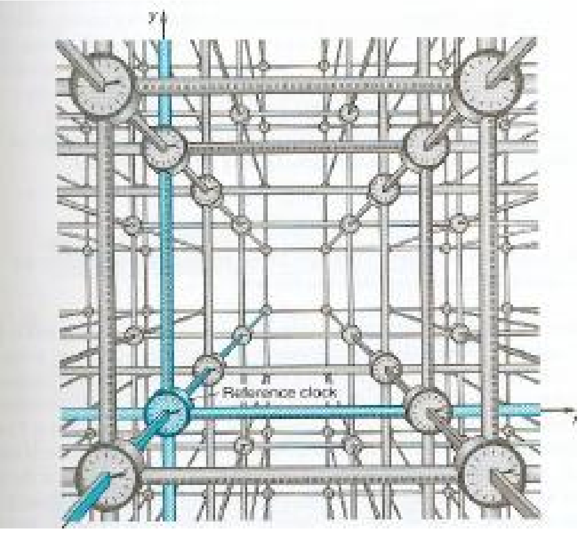
Cinematica3: relativita' ristretta

Gli obiettivi generali di questo modulo sono gli stessi del precedente e
- Capire le conseguenze del secondo postulato sui concetti di spazio tempo

Gli obiettivi specifici sono :
- saper utilizzare il concetto di evento
- capire il concetto di invariante, di quadrintervallo, di tempo e lunghezza propri

- capire i diagrammi spazio-tempo in RR
- iniziare a usare una descrizione geometrica per la descrizione dei fenomeni

La sostituzione del concetto di un tempo assoluto con quello di una velocità assoluta impone una revisione dei concetti di spazio e di tempo dato che se una particolare velocità deve essere invariante rispetto allo stato di moto di un osservatore, allora lo spazio ed il tempo devono entrambi dipendere dallo stato di moto dell'osservatore.
Si riprende il concetto di evento
La finitezza di c impone, inoltre, di 'sincronizzare gli orologi'
Ogni sistema di riferimento inerziale può essere immaginato come un reticolo cubico tridimensionale fatto di barre identiche e con un orologio ad ogni intersezione

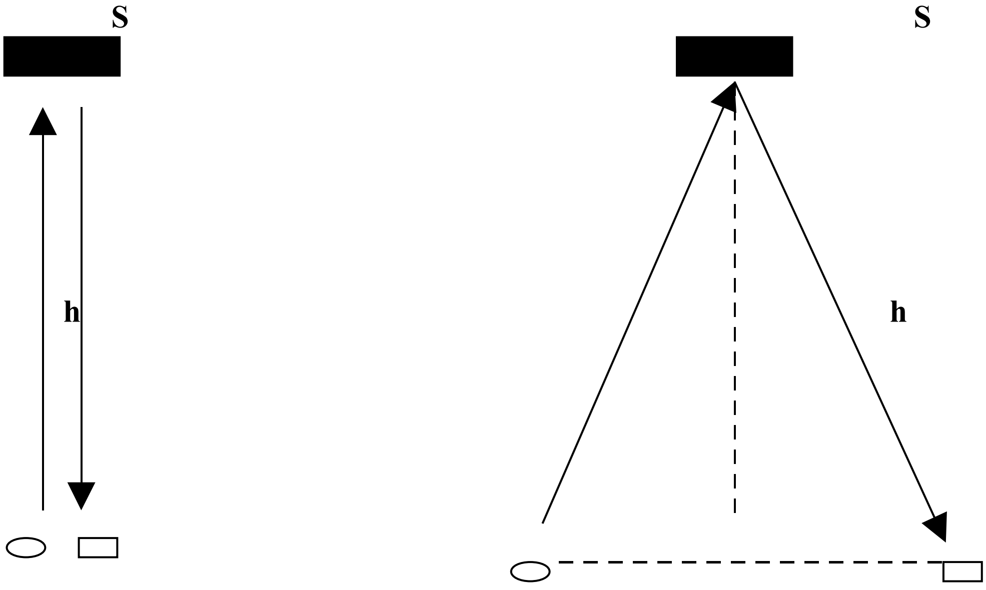


Gli orologi debbono essere "sincronizzati". Si sceglie un orologio di riferimento e si aggiustano gli altri in modo che quando un segnale arriva dal punto in cui e 'l'orologio di riferimento, il tempo segnato da ogni altro orologio e' esattamente la distanza dall'orologio di riferimento diviso c.

Si propone l'esperimento mentale dell'orologio a luce

http://www.new-dimension-software.com/scienza/relativita-del-tempo.php
http://www.df.unibo.it/ddf/perc/STR/Animazioni_STR/Dilatazione_Tempi.htm
http://www.walter-fendt.de/ph11e/timedilation.htm

e si osserva che, a seconda del moto relativo con l'orologio a luce, nei diversi sistemi di riferimento gli eventi emissione e ricezione avranno una diversa distanza temporale tra di loro e una diversa distanza spaziale.



L R L Δx R

FIG. A FIG. B

Questo orologio consiste di una sorgente L (fig.A) che manda un segnale luminoso verso l'alto, dove a distanza h c'è uno specchio S, che riflette la luce verso il basso. Proprio accanto a L c'è un rivelatore R che vede il segnale riflesso, lo conta, e trasmette a L il comando di emettere istantaneamente un nuovo segnale (per il nostro scopo non ha importanza se un tale orologio sia più o meno realizzabile nella pratica.).

Naturalmente l'intervallo di tempo tra due segnali successivi sarà il tempo impiegato dalla luce ad andare e tornare, cioè 2h/c: questo tempo lo chiamiamo $\Delta\tau$. La più importante proprietà di un tale orologio è che il suo periodo dipende esclusivamente dalla distanza fra sorgente-rivelatore e specchio.

Supponiamo ora che l'orologio a luce sia in moto rispetto al nostro laboratorio, e vediamo come appariranno le cose nel riferimento del laboratorio (fig. B). Mentre la luce sale, lo specchio si sposta verso destra, e lo stesso fa anche il rivelatore: perciò la luce che arriverà a R viaggia obliquamente.

Chiamiamo Δx lo spostamento dell'orologio nel tempo di andata e ritorno, e indichiamo con h, come prima, la distanza verticale tra la sorgente e lo specchio. Vogliamo calcolare il tempo Δt che la luce ha impiegato a fare il percorso LSR. Lo spazio percorso è (teorema di Pitagora)

$$c\Delta t=2(h^2+(\Delta x/2)^2)^{1/2}$$

da cui essendo $c\Delta\tau=h$ e quadrando si ha $(c\Delta t)^2=c^2\Delta\tau^2+\Delta x^2$ e isolando rispetto a $\Delta\tau$:

$$c^2\Delta\tau^2= c^2\Delta t^2-\Delta x^2$$

da cui

$$\Delta\tau = \sqrt{\Delta t^2 - \frac{\Delta x^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\Delta t$$

ponendo

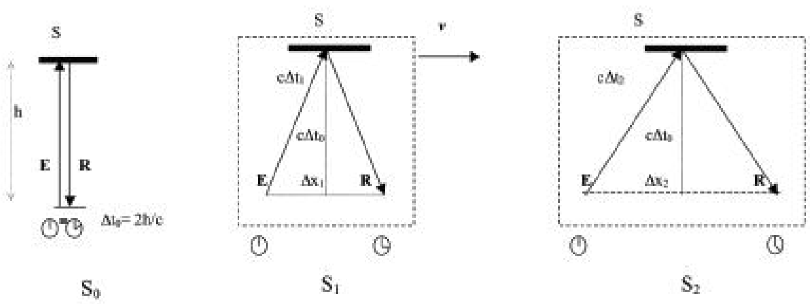
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ coefficiente di dilatazione

possiamo scrivere la relazione precedente come

$$\Delta t =\gamma\Delta\tau$$

gli orologi in moto ritardano! $\Delta\tau$ viene chiamato tempo proprio e rappresenta l'intervallo tra due eventi che accadono nello stesso luogo. L'intervallo di tempo misurato da qualsiasi altro osservatore è sempre maggiore del tempo proprio.

Si osserva che, a seconda del moto relativo con l'orologio a luce,nei diversi sistemi di riferimento gli eventi emissione e ricezione avranno una diversa distanza temporale tra di loro e una diversa distanza spaziale.



Tuttavia si osserva che esiste una "particolare combinazione" di tali misure che è invariante:

Infatti $c^2\Delta\tau^2 = c^2\Delta t_1^2 - \Delta x_1^2 = c^2\Delta t_2^2 - \Delta x_2^2$

Se ne deduce l'invarianza dell'intervallo

$\Delta s^2 = c^2\Delta t_2^2 - \Delta x_2^2$ detto intervallo spazio-tempo

Se utilizzo la stessa unità di misura per tempo e spazio è c=1 e posso anche scrivere

$\Delta\tau^2 = \Delta t_1^2 - \Delta x_1^2 = \Delta t_2^2 - \Delta x_2^2$

[In generale **se v=hc (0<h<1) allora $\Delta x/h$ è lo spazio percorso da un oggetto che viaggia alla velocità della luce nel tempo Δt e, analogamente, h Δt è il tempo impiegato da un oggetto che viaggia alla velocità della luce per percorrere uno spazio Δx.**
Questo semplice ragionamento permette di definire un'unica unità di misura per il tempo e lo spazio.
Dal momento che $\Delta x = c\,\Delta t$ (e c è la stessa in tutti i sistemi di riferimento) è possibile esprimere lo spazio con l'unità di misura dei tempi ($\Delta t = \Delta x/c$) o viceversa ($\Delta x = c\,\Delta t$)].
Vediamo il significato di tale intervallo con alcuni problemi

Problemi

1) Far scintille su un razzo

Un razzo molto veloce,entra dal portone principale, percorrendo il lungo corridoio e esce dalla porta posteriore. Ad ogni ticchettio dell'orologio del razzo questo emette una scintilla. La prima di esse scocca nello spazio di un millimetro tra l'antenna del razzo in movimento e la penna che si trova nel taschino di Giovanni, l'osservatore nel laboratorio. La seconda scintilla scocca quando l'antenna del razzo è in prossimità di una maniglia metallica posta 4,00000000 metri oltre nel corridoio secondo la misura dell'osservatore del laboratorio, che registra tra queste due scintille un intervallo temporale di 16,6782048 nanosecondi.

a. Qual è il tempo tra le scintille misurato in metri da Giovanni, l'osservatore nel laboratorio?
b. Qual è il valore dell'invariante spazio-temporale tra i due eventi, calcolato a partire dalle misure di Giovanni nel laboratorio?
c. Prevedete: qual è il valore dell'invariante calcolato mediante misure nel sistema del razzo?
d. Qual è la distanza tra le scintille misurata nel sistema del razzo?
e. Qual è il tempo (in metri) tra le scintille misurato nel sistema del razzo? Confrontatelo con il tempo tra le stesse scintille misurato da Giovanni nel sistema di riferimento del laboratorio.
f. Qual è la velocità di questo razzo misurata da Giovanni nel laboratorio?

SOLUZIONE:

Dati:

evento A= scocca la prima scintilla
evento B= scocca la seconda scintilla
dt= intervallo temporale misurato da Gianni tra i due eventi= 16,6782048 ns (1 ns=10^{-9}s)
dx=intervallo spaziale misurato da Gianni tra i due eventi= 4m

a. Nel tempo dt la luce percorre uno spazio pari a cdt=(0,299792458m/ns)(16,6782048ns)=5m

b. $dt^2 - dx^2 = (5m)^2 - (4m)^2 = 9m^2$
c. Il valore dell'invariante non cambia al variare del sistema di riferimento, pertanto anche calcolato nel sistema del razzo resta $9m^2$.

d. Nel sistema del razzo le scintille avvengono sempre nello stesso punto, quindi dx=0
e. Siccome nel sistema del razzo i due eventi A e B hanno dx =0, in questo sistema di riferimento la distanza temporale che si misura tra i due eventi è il **tempo proprio dτ** e, essendo $d\tau^2=dt^2-dx^2$ **,** avendo già calcolato l'invariante al punto b, possiamo concludere dτ=3metri.
Da questo dobbiamo dedurre che **il tempo intercorso tra le due scintille misurato da Giovanni è più lungo di quello misurato sul razzo**!
f. Secondo le misure del laboratorio il razzo si sposta di 4 metri in un tempo pari a 5 metri-luce. Perciò la sua velocità nel sistema del laboratorio è pari a 4/5 di c.
Infatti la velocità del razzo è data da $v= \Delta x/ \Delta t$, dove Δt=5 metri-luce=5m/c . Pertanto v=(4/5)c.

2) Protone, meteorite e nave spaziale

a) Un protone che si muove (rispetto al laboratorio) con una velocità pari a 3/4 di quella della luce attraversa due rivelatori che distano tra loro 2 metri. Gli eventi 1 e 2 sono costituiti dai passaggi attraverso i rivelatori. Quali sono le distanze spaziale e temporale tra i due eventi nel laboratorio, espresse in metri? Quali sono le stesse distanze nel sistema del protone?

b) Un meteorite molto veloce proveniente dallo spazio interagisce con gli strati esterni dell'atmosfera terrestre, creando una breve scia luminosa (evento 1) e poi continua la sua corsa fino a disintegrarsi nel Sole (evento 2) 10 minuti dopo (rispetto al sistema di riferimento della Terra). Assumete che il Sole disti 1 ,4960 x 10^{11} metri dalla Terra. Nel sistema di riferimento terrestre, quali sono le distanze spaziale e temporale, in minuti, tra l'evento 1 e l'evento 2? Quali sono le stesse distanze nel sistema del meteorite?

c) Nel ventitreesimo secolo una nave spaziale lascia la Terra (evento 1) e viaggia al 95 percento della velocità della luce fino ad arrivare a Proxima Centauri (evento 2), che dista 4,3 anni-luce dalla Terra. Nel sistema di riferimento terrestre, quali sono le distanze spaziale e temporale, in anni, tra l'evento 1 e l'evento 2? Quali sono le stesse distanze nel sistema della nave spaziale?

a) Dati:

Evento1: passaggio del protone attraverso il primo rivelatore
Evento 2: passaggio del protone attraverso il secondo rivelatore
dx = distanza tra i due rivelatori misurata nel laboratorio = 2 metri
v = velocità del protone misurata nel laboratorio = ¾ di c

La distanza spaziale tra i due eventi nel laboratorio è dx=2m

Indico con dt la distanza temporale tra i due eventi nel laboratorio:

$$dt=dx/v=dx/(3c/4)=(8/3)\text{metri-luce}=2{,}66667\text{metri-luce}$$

Nel sistema del protone la distanza spaziale tra i due eventi è nulla, perché avvengono entrambi laddove si trova il protone (che in questo sistema è fermo).
Pertanto l'intervallo di tempo tra 1 e 2 in questo sistema di riferimento è un intervallo di tempo proprio dτ che posso calcolare a partire dagli intervalli dt e dx tra i due eventi misurati nel laboratorio :

$$d\tau^2=dt^2-dx^2 = (2{,}66667\text{metri-luce})^2-(2\text{ metri})^2=3{,}1111\text{ m}^2$$

pertanto dτ = 1,764 metri –luce **che è un tempo inferiore a quello osservato nel laboratorio**.
b. Dati:

Evento1= scia luminosa
Evento2= disintegrazione
dt = distanza temporale tra i due eventi misurata sulla Terra=10 minuti
dx= distanza Terra-Sole misurata dalla Terra=1,4960 *10^{11} metri

Per rispondere alla prima domanda (posto che dt è già espresso in minuti) dobbiamo esprimere la distanza Terra-Sole in minuti-luce, ovvero dobbiamo calcolare il tempo (in minuti) impiegato dalla luce a percorrere il tragitto Terra- Sole; osserviamo che ci serve esprimere c in metri al minuto. Per farlo basta osservare che la luce percorre in un minuto uno spazio 60 volte superiore a quello che percorrerebbe in un secondo, pertanto c=2,99792458*10^8 m/s = 2,99792458*10^8 *60 m/min = 1,798754748*10^{10} m/min. Così la distanza tra la Terra e il Sole è:

$$dx/c= (1{,}4960 \cdot 10^{11}\text{ metri})/(1{,}798754748\cdot 10^{10}\text{ m/min}) = 8{,}3169\text{ minuti-luce}$$

Nel sistema che si muove col meteorite i due eventi avvengono nello stesso luogo; in questo sistema dunque l'intervallo temporale che intercorre tra i due eventi è un intervallo di tempo proprio $d\tau$, che si può calcolare grazie all'invariante spaziotemporale ricavabile dalle misure di dt e dx nel sistema Terra:
$d\tau^2=dt^2-dx^2 = (10\ \text{min})^2-(8{,}3169\text{min})^2 = 30{,}8292\ (\text{min})^2$
da cui si ricava $d\tau=5{,}5524$ min

Anche in questo caso osserviamo che il tempo intercorso tra i due eventi è più lungo se osservato dalla Terra, ovvero che **nel sistema solidale col meteorite il viaggio Terra-Sole è stato più breve**.

c. Dati:

Evento1= la nave spaziale lascia la Terra
Evento 2= la nave raggiunge Proxima Centauri
dx = distanza Terra-P.C. misurata sulla Terra = 4,3 anni-luce
v = velocità della nave spaziale = 95/100 di c

La distanza spaziale misurata sulla Terra tra i due eventi è dx = 4,3 anna-luce.
La velocità della nave spaziale può essere espressa come v = 0,95 anni-luce/anno
La distanza temporale (sempre misurata sulla Terra) è:

$$dt = dx/v = (4{,}3\ \text{anni-luce})/(0{,}95\ \text{anni-luce/anno})=4{,}53\ \text{anni}$$

Sulla navicella l'intervallo spaziale tra i due eventi è 0, quindi l'intervallo temporale che intercorre tra 1 e 2 è un intervallo di tempo proprio $d\tau$ che calcoliamo ancora attraverso l'invariante:

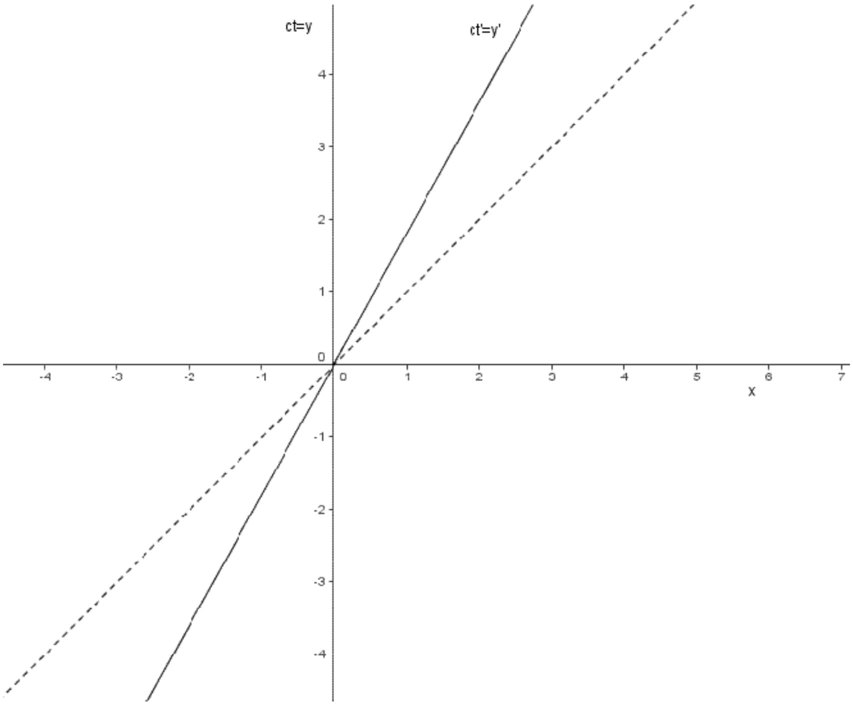
$$d\tau^2=dt^2-dx^2 = (4{,}53\ \text{anni})^2-(4{,}3\ \text{anni})^2 = 2{,}03\ (\text{anni})^2$$

Quindi $d\tau$ = 1,42 anni.

Confrontando questo risultato con il tempo intercorso tra i due eventi sulla Terra si trova una differenza di più di due anni!!

Si analizza ulteriormente il significato di tale intervallo proponendo in laboratorio un lavoro con geogebra su un viaggio spaziale (Esercitazione2 : diagrammi spazio-tempo).

Rappresentiamo ora quanto visto nello spaziotempo. Detta O' l'origine di S', essa risulterà banalmente in quiete rispetto ad S' (cioè: (x'O') = 0) ed in moto rispetto ad S descrivendo la linea-universo rappresentata sotto, essendo la sua equazione del moto in S data da: (xO') = vt. D'altra parte nello spaziotempo il luogo dei punti in cui l'origine di un sistema di riferimento è in quiete rappresenta l'asse dei tempi di questo sistema, per cui la retta di equazione x = vt rappresenta in S l'asse dei tempi di S'.

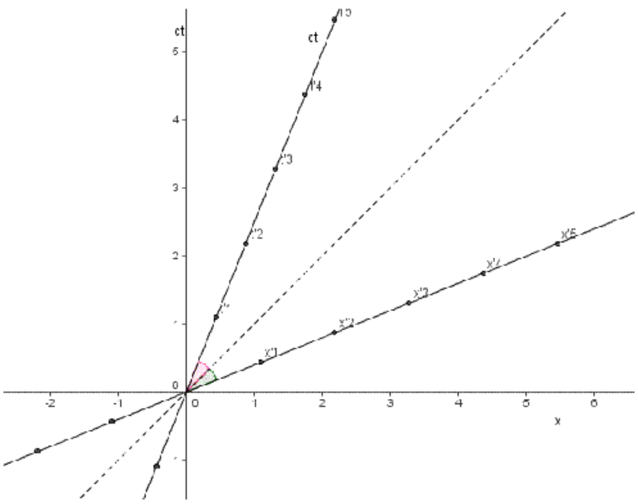


Osserviamo ora che il secondo postulato impone anche il cambiamento della direzione dell'asse x' Infatti l'asse temporale può essere interpretato fisicamente come la linea d'universo di un oggetto fermo preso a riferimento e l'asse spaziale come l'insieme di tutti gli eventi possibili simultanei ad un evento considerato convenzionalmente come l'evento di riferimento.
L'invarianza di c si traduce nella condizione che anche in S' l'equazione del moto debba essere del tipo: x' = ct' quindi anche in S' si dovrà avere α'0 = α'1 , ovvero – in termini delle inclinazioni degli assi di S' rispetto a quelli di S – si dovrà avere angoli uguali.

É evidente la <u>completa simmetria</u> che viene ora ad esistere <u>fra spazio e tempo</u>: in entrambi i sistemi di riferimento l'asse spaziale e quello temporale sono simmetrici rispetto alla retta che esprime l'equazione del moto della luce (la bisettrice), e l'invarianza della bisettrice assicura l'invarianza di c.

In italiano è entrato in uso chiamare "linea d'universo" la rappresentazione spaziotemporale del moto di un oggetto con "retta luce" la particolare linea d'universo di un raggio di luce.

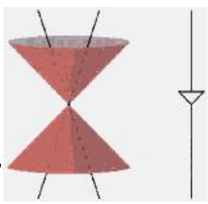
e



se poi aggiungiamo anche le altre due coordinate spaziali x^2 e x^3, abbiamo che:

$\Delta\tau^2 = \Delta x_0{}^2 - \Delta x_1{}^2 - \Delta x_2{}^2 - \Delta x_3{}^2$

- l'equazione di un fronte d'onda luminoso è del tipo $ds^2 = 0$, la quale – nello spaziotempo – rappresenta un ipercono (detto **<u>cono di luce</u>**); l'<u>invarianza dell'intervallo</u> garantisce non solo che questa superficie venga ad essere rappresentata da un'equazione analoga ($ds'^2 = 0$) in un qualsiasi altro sistema di



riferimento, ma anche che gli eventi all'interno del cono di luce (caratterizzati dalla condizione $ds^2 > 0$) continuino a rimanere al suo l'interno, e analogamente per gli eventi al suo esterno (per i quali $ds^2 < 0$)

Il cono di luce divide lo spaziotempo in tre regioni [29]:

- Gli eventi situati all'interno del cono di luce (ovvero $\Delta s^2 > 0$) sono fisicamente raggiungibili viaggiando ad una velocità $u = \beta c < c$ possono quindi essere messi in relazione causale con l'evento E_O (l'origine del cono); in particolare E_O può essere stato influenzato da un qualsiasi evento situato all'interno del semicono inferiore, e può a sua volta influenzare un qualsiasi evento situato all'interno del semicono superiore. Queste regioni dello spaziotempo rappresentano pertanto rispettivamente il *passato assoluto* ed il *futuro assoluto* dell'evento E_O.

  Gli intervalli di questo tipo sono detti di tipo tempo in quanto tutti gli osservatori concorderanno cioè sul fatto che un qualsiasi evento è avvenuto prima o dopo rispetto all'evento E_0; in particolare esiste sempre un sistema di riferimento inerziale S' dove i due eventi si verificano nello stesso posto.

- Gli eventi situati all'esterno del cono di luce ($\Delta s^2 < 0$) non sono fisicamente raggiungibili da un raggio di luce e pertanto non possono essere messi in relazione causale con l'evento E_O . Questa regione dello spaziotempo viene detta l'*altrove assoluto* dell'evento E_O.

  Gli intervalli di questo tipo sono detti di tipo spazio; in particolare esiste sempre un sistema di riferimento inerziale S' dove i due eventi si verificano simultaneamente

La velocità della luce pone un limite alla causalità:un Evento non può causarne un altro quando la loro distanza spaziale è maggiore della distanza che può essere percorsa dalla luce nell'intervallo di tempo fra questi eventi.

Calibrazione degli assi

Data l'invarianza di $s^2 = c^2t^2 - \Delta x^2$ si osserva che è l'equazione di un'iperbole equilatera (iperbole invariante) che ha la proprietà di avere come asintoti le bisettrici dei quadranti individuati dagli assi x e ct (linee di universo del segnale luminoso) Le iperboli sono due (corrispondenti ai casi $s^2 > 0$ e $s^2 < 0$) caratterizzate dalle equazioni riportate in figura. In particolare in S il punto Q_1(x=1, ct =0) disterà dall'origine $s = \sqrt{x^2 - c^2t^2} = \sqrt{x^2} = 1$; il punto P_1 (x,ct≠0) disterà $s = \sqrt{x^2 - c^2t^2} = 1$

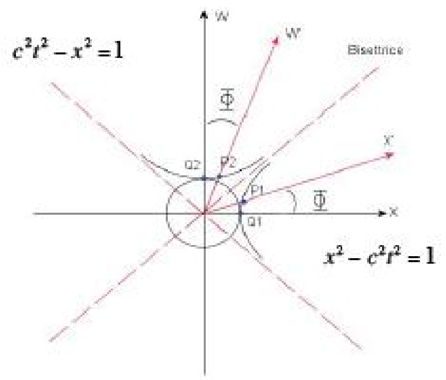


Fig. 9 – L'iperbole di calibrazione

In S' P_1 (x'=1, ct' =0) disterà dall'origine $s' = \sqrt{x'^2 - c^2t'^2} = \sqrt{x'^2} = 1$

Mentre il punto Q_1(x',ct'≠0) disterà

$s' = \sqrt{x'^2 - c^2t'^2} = 1$

Se Q_1 è per S l'evento simultaneo a t = 0, per S' l'evento simultaneo a t'=0 è P_1

In modo analogo si può procedere per i punti P_2 e Q_2 : Q_2 è per S nello stesso luogo dell'origine ma avviene dopo, mentre per S' è P_2 ad essere nello stesso luogo dell'origine

Stabilito questo è semplice verificare la relatività delle lunghezze e dei tempi

Anche in questo caso abbiamo condotto in laboratorio un lavoro con geogebra, considerando due eventi variabili e analizzando vari problemi con l'ausilio dei diagrammi (Esercitazione2 : diagrammi spazio-tempo)..

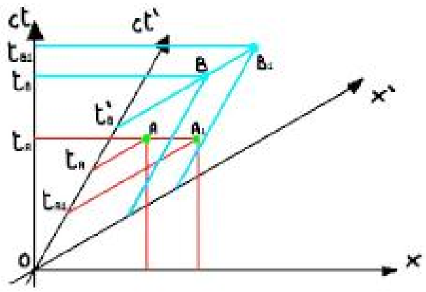
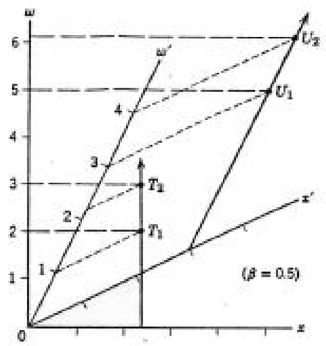


Fig. 9 – La relatività della simultaneità

http://www.df.unibo.it/ddf/perc/STR/Animazioni_STR/Rel_SIM-1_03.htm

http://www.df.unibo.it/ddf/perc/STR/Animazioni_STR/Rel_SIM-2_06.htm

http://www.mogi-vice.com/Pagine/Scaricamento.html

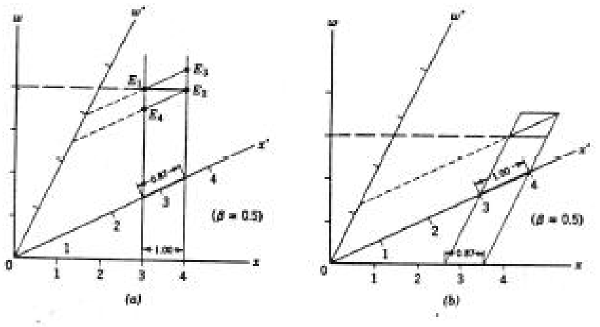


Simulazioni

Fig. 10 – La dilatazione del tempo

http://www.df.unibo.it/ddf/perc/STR/Animazioni_STR/Dilatazione_Tempi.htm

http://www.walter-fendt.de/ph11e/timedilation.htm



Simulazioni

Fig. 11 – La contrazione della lunghezza

http://www.df.unibo.it/ddf/perc/STR/Animazioni_STR/Definizione_Lunghezza_02.htm

Si propongono quindi , oltre ad esempi ed esercizi,

- Esperimento con muoni, proposto in modo semplificato agli studenti di terza, più approfondito con quelli di quinta, nel senso che è stato proposto a partire dalla legge del decadimento.

Supponiamo di avere un fascio parallelo di particelle instabili di una data specie e di una data energia.
Per effetto del decadimento l'intensità del fascio andrà attenuandosi come ci allontaniamo dalla sorgente. Se N(x) è il numero di particelle per cm^2 e per secondo ad una distanza x dalla sorgente e τ è la vita media delle medesime alla velocità v, il numero di decadimenti che si verificano in un segmento di fascio compreso tra x ed x+dx è dato da

[2.3] $$dN = -N(x)\frac{dt}{\tau} = -N(x)\frac{dx}{L}$$

dove

[2.4] $$L = v\tau$$

rappresenta il percorso medio delle particelle prima del decadimento. Integrando la [2.3] si ha:

[2.5] $$N(x) = N_0 \exp\left(-\frac{x}{L}\right)$$

che esprime la legge d'attenuazione del fascio e permette la determinazione di L.
Secondo la equazione sulla dilatazione dei tempi il legame tra la velocità media a riposo $\tau_{(0)}$ e la vita media alla velocità v è dato da:

[2.6] $$\tau = \frac{\tau_{(0)}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

Sostituendo quest'ultima nella [6.4] si ottiene

[2.7] $$L = \frac{\tau_{(0)}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

La verifica della [2.6]è perciò ricondotta a quella della dipendenza di L da v ed è stata eseguita dapprima sui muoni presenti nella radiazione cosmica secondaria e, successivamente, sui mesoni π carichi e su altre particelle prodotte in laboratorio,
Per i muoni una media di tutti i tipi di misura fornisce oggi il valore $\tau_{(0)} = 2,197 \cdot 10^{-6}$ sec.
In assenza di una dilatazione relativistica dei tempi questo valore corrisponderebbe, per una particella che viaggiasse alla velocità della luce, ad un percorso medio di circa 660 m. Ora i muoni presenti nella radiazione cosmica provengono da decadimento di mesoni π a loro volta prodotti per effetto delle collisioni dei protoni della radiazione primaria negli strati alti della atmosfera a qualche decina di kilometri dal suolo. Il fatto che al livello del mare e fino a qualche migliaio di metri di altitudine la radiazione la radiazione cosmica sia quasi esclusivamente formata da elettroni, da γ e da muoni dimostra già di per sé che almeno qualitativamente la dilatazione dei tempi esiste.
I mesoni $\pi^{\pm}$ hanno invece una vita media di $\tau_{(0)} = 2,60 \cdot 10^{-8}$ sec che in assenza di dilatazione dei tempi corrisponderebbe ad un percorso di 7,8 m. In questo caso la verifica può essere fatta agevolmente in laboratorio su fasci di π prodotti mediante macchine acceleratici.

- Paradosso dei gemelli (Esperimento di Hafele e Keating)

Vengono proposte(in terza) e dedotte(agli studenti di quinta) le trasformazioni di Lorentz [31] e quelle per le velocità.

Verifica finale (in laboratorio, utilizzando diagrammi)

Percorso didattico : dinamica

- Definizione relativistica di energia e quantità di moto (4 h) (dinamica1)
- Applicazioni negli urti (2h) (dinamica2)
- Effetto Doppler (2h)
- Verifica

Metodologia
- lezioni frontali
- discussioni guidate
- analisi di filmati,
- soluzione e discussione di esercizi e problemi

Dinamica 1 : enermoto

Gli obiettivi generali di questo modulo sono :
- far emergere i significati concettuali di un esperimento, anche 'pensato'

- saper confrontare le proprie ipotesi interpretative con conseguenze verificabili che da esse derivano.
- capire l'ambito di validità di un legge fisica

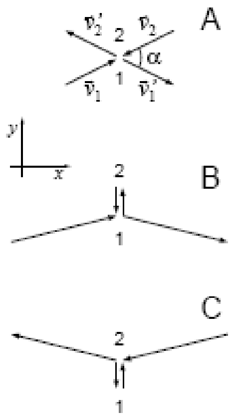
Gli obiettivi specifici sono :

- far emergere la necessità di nuove definizioni per energia e impulso (e che si debbano ridurre alle classiche a basse velocità)
- capire tali definizioni
- saperle usare per descrivere situazioni già note e per affrontare la risoluzione di problemi
- capire il concetto di quadrivettore
- capire il concetto di invariante energia-momento

Tenendo presenti le considerazioni presenti in approfondimento3, si riprende l'esperimento di Bertozzi per mostrare come non sia possibile mantenere la definizione newtoniana p = mv. Infatti se consideriamo un elettrone soggetto ad una forza costante da p = mv e F =dp/dt segue F = ma con a costante : basterebbe allora un lavoro di 250 keV perché l'elettrone raggiunga la velocità della luce, il che è in contraddizione con l'esperimento. Per arrivare alla relazione relativistica tra impulso e velocità, si sono adottati i criteri [10] :

- deve trattarsi di una grandezza che si conserva negli urti in qualsiasi RI
- per basse velocità deve ridursi alla forma newtoniana

Viene dedotta la relazione (solo agli studenti di 5) [33]



Prenderemo in esame un urto elastico tra due particelle di uguale massa, 1 e 2, e lo studieremo da tre rif. (Vedi figura). Il primo, A, è quello del centro di massa, dove l'impulso totale è nullo, per cui le due particelle hanno velocità e impulsi opposti, sia prima sia dopo l'urto. Il carattere elastico dell'urto ci assicura inoltre che le velocità (e perciò gli impulsi) non cambiano modulo nell'urto, ma soltanto direzione. Supporremo inoltre che l'urto sia radente, cioè che anche il cambiamento di direzione (l'angolo α in figura) sia
molto piccolo. Scelti gli assi cartesiani come in figura, le componenti x delle velocità non cambiano nell'urto, mentre quelle y s'invertono.
Il rif. B è quello in cui la particella 2 ha nulla la componente x della velocità; in altre parole B accompagna la particella 2 secondo l'asse x.
Invece C è il rif. in cui si annulla la componente x della velocità di 1: è chiaro che B e C sono in situazione simmetrica rispetto alle due particelle, e questa simmetria sarà usata in modo essenziale nel seguito. L'ipotesi di urto radente comporta che nel rif. B
la velocità di 2 sia molto piccola: la supporremo non relativistica, in modo da poter usare l'espressione newtoniana dell'impulso.
gli indici $_1$ e $_2$ in basso rappresentano le due particelle; le grandezze dopo l'urto saranno designate da apici, quelle prima dell'urto senza apice. Abbiamo dunque nel riferimento B:

$p_{2y} = - mv_2$, $p'_{2y} = mv_2$
$p'_{2y} - p_{2y} = 2\ mv_2$
$p'_{2x} = p_{2x} = 0$

La conservazione dell'impulso impone, perciò,

$p'_{1y} - p_{1y} = -2\ mv_2$
$p'_{1x} = p_{1x}$

Ne segue
$p_{1y} = mv_2$; $p'_{1y} = -m\ v_2$

Se Δs_1 è lo spostamento della particella 1 in un intervallo di tempo Δt_1, si avrà :

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta s_1} = \frac{p_{1y}}{p_1} = \frac{mv_2}{p_1}$$

da cui

$$p_1 = mv_2 \frac{\Delta s_1}{\Delta y_1} = m\frac{\Delta y_2}{\Delta t_2}\frac{\Delta s_1}{\Delta y_1} \quad (1)$$

dove Δy_2 è lo spostamento lungo y di 2 in un qualsiasi intervallo Δt_2 .
Scegliamo Δt_2 in modo che sia $\Delta y_2 = \Delta y_1$, per cui la (1) si semplifica in

$$p_1 = m\frac{\Delta s_1}{\Delta t_2} = mv_1 \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \qquad (2)$$

Ai due tempi Δt_1 e Δt_2 corrisponderanno per le due particelle i tempi propri dati da :

$$\Delta \tau_1 = \Delta t_1^{\mathbf{B}} \sqrt{1 - \left(v_1^B\right)^2 / c^2} \quad (3)$$

$$\Delta \tau_2 = \Delta t_2^{\mathbf{B}} \sqrt{1 - \left(v_2^B\right)^2 / c^2} \cong \Delta t_2^{\mathbf{B}} \quad (4)$$

Nel riferimento C i ruoli di 1 e 2 si scambiano; per cui si ha $\Delta t_1^C = \Delta t_2^B$, mentre per la simmetria delle (4) $\Delta\tau_1 = \Delta t_1^C$ e quindi è anche $\Delta\tau_1 = \Delta\tau_2$

Da cui si ottiene

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2 / c^2}} = \gamma$$

che, sostituita nella (2) porta a

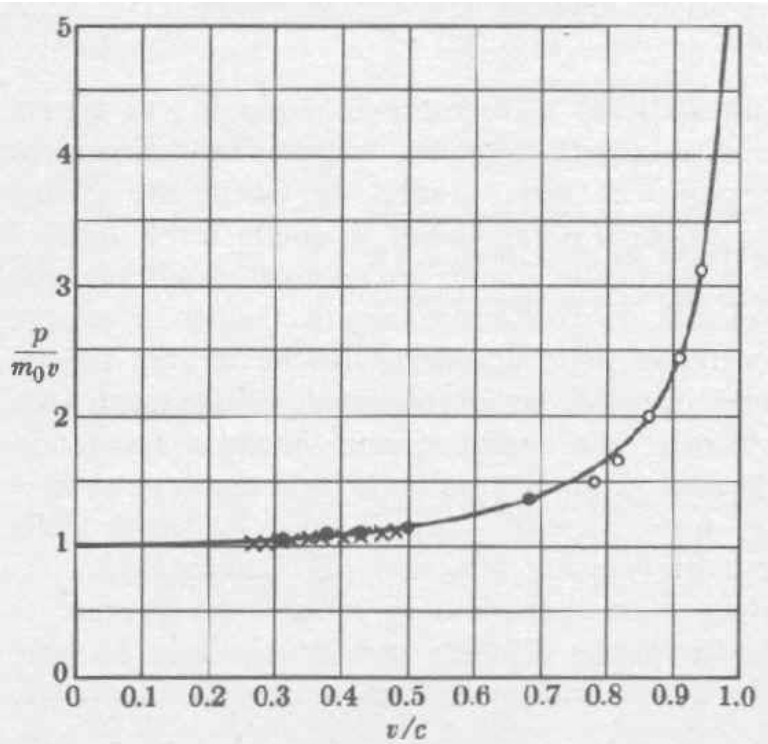
$$p_1 = \frac{mv_1}{\sqrt{1 - v_1^2 / c^2}}$$

Si può quindi concludere che la corretta definizione di impulso è

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mv\gamma = m\frac{ds}{d\tau}$$

o, in termini vettoriali,

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m\vec{v}\gamma = m\frac{d\vec{s}}{d\tau} \quad \textbf{(5)}$$



Si presentano esperimenti che confermano tale relazione

In figura sono riportati i risultati sperimentali ottenuti da W.Kauffman nel 1901 (cerchietti bianchi), da A.Bucherer nel 1909 (cerchietti neri) e da C.Guye e C.Lavanchy nel 1915 (le crocette)

Si discute della validità del secondo principio nella forma **F**= d**p**/dt

Si ricava l'espressione dell'invariante energia-impulso, a partire dall'intervallo spazio-temporale

Infatti dalla relazione :

$c^2\Delta\tau^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$

dividendo per $\Delta\tau^2$ si ottiene :

$c^2 = c^2\,\gamma^2 - \Delta x^2 / \Delta\tau^2 = c^2\,\gamma^2 - p^2/m^2$

da cui, moltiplicando per c^2

$m^2c^4 = m^2c^4\,\gamma^2 - p^2\,c^2$ (6)

Definendo l'energia totale

$E = mc^2\gamma$ (7)

La (6) diventa

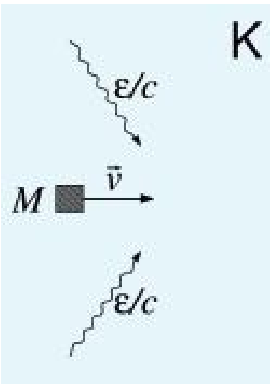
$m^2c^4 = E^2 - p^2 c^2$ (8)

Si discute a fondo la relazione, introducendo il concetto di quadrivettore e la sua rappresentazione geometrica, in analogia con quanto fatto in cinematica, e,in particolare della quantità di moto come parte spaziale del quadrivettore, e dell'energia come parte temporale, sottolineando il fatto che anche in questo caso, come in cinematica, non ha senso parlare di energia e quantità di moto, indipendentemente. Infatti i valori delle componenti variano se vengono misurati in sistemi inerziali in moto relativo, ma il quadrivettore rimane uguale indipendentemente dal SR .
Si deduce dalla relazione (8) l'espressione corrispondente per particelle prive di massa, evidenziano la relazione tra energia e impulso (Si evidenziano le conseguenze di tali relazioni , ad es. sul fatto che la radiazione esercita una pressione; si mostra l'effetto con un radiometro; successivamente vengono proposti diversi esercizi, come da allegato sui problemi di dinamica)
Si dà la definizione di energia cinetica K, ricordando anche in questo caso che K dovrà soddisfare il teorema delle forze vive e ridursi al caso classico a basse velocità, per cui

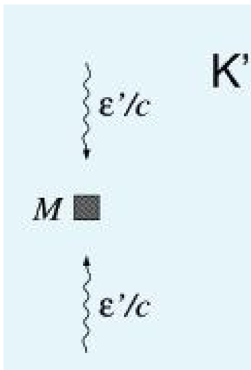
$K = E - mc^2 = (\gamma - 1)\, mc^2$ (9)

(Verificata sempre con l'esperimento di Bertozzi)

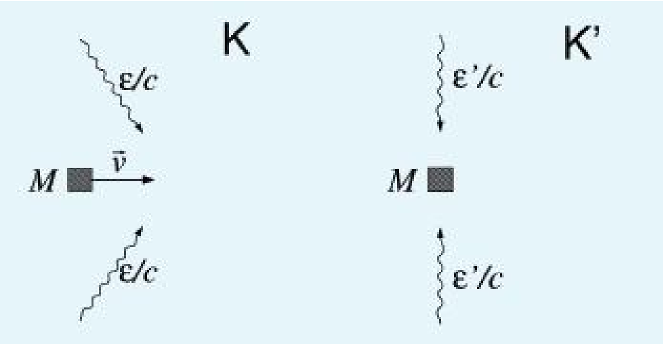
Si propone un esperimento ideale (Da Fabri- Scuola estiva ad Idro)
Abbiamo un corpo di massa M, nero (assorbitore ideale). Su di esso mandiamo due pacchetti di radiazione (es. impulsi laser) uguali, che provengono da direzioni opposte nel rif. K' in cui M è fermo. Sia ε' l'energia di ciascun pacchetto.
Nel rif. K (laboratorio) M si muove verso destra, con velocità v. I pacchetti di radiazione si muovono obliquamente (e hanno energia ε diversa da ε', che non occorre conoscere).



La radiazione viene assorbita da *M*. Vogliamo studiare il fenomeno da entrambi i riferimenti.



Iniziamo dal rif. K'.
Qui *M* è inizialmente fermo; la q. di moto si conserva, quindi *M rimane fermo* anche dopo aver assorbito la radiazione.
Ne segue che anche in K la sua velocità, che era inizialmente *v*, dovrà restare i*nvariata*.

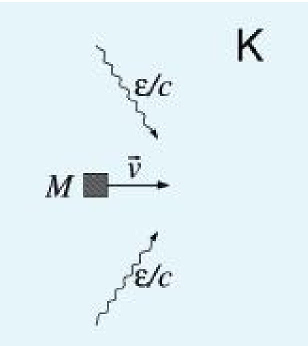


Ragioniamo invece applicando la conservazione della q. di moto in K. Sia α l'angolo che la direzione della radiazione forma con la verticale; sappiamo che un pacchetto di energia ε ha q. di moto (modulo) ε / c.

Dunque se v_f è la velocità finale di M, avremo:

$$M \gamma_f v_f = M\gamma v + 2 (\varepsilon/c) \sin \alpha$$

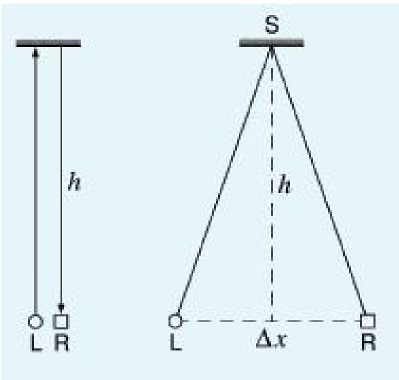
che è in contraddizione con $v_f = v$!



L'idea di Einstein è che l'errore stia nell'aver dato per scontato che la massa resti invariata. Proviamo infatti a supporre che la massa finale M_f sia diversa da M; allora potremo salvare $v_f = v$. Scriviamo

$$M_f \gamma \; v = M\gamma v + 2 (\varepsilon/c) \sin \alpha$$

Per arrivare al risultato finale abbiamo ancora bisogno di determinare α, ma per questo basta ripensare all'orologio a luce: si vede che $\sin \alpha = v / c$. Allora



$$M_f = M + 2 \varepsilon / (\gamma c^2).$$

Ma il corpo M ha giusto assorbito l'energia 2ε, che possiamo quindi sostituire con ΔE:

$$\Delta M = \Delta E / (\gamma c^2).$$

Siamo arrivati a

$$\Delta M = \Delta E / (\gamma c^2) \; (*)$$

che in parole si esprime così:
Quando un corpo che si muove con velocità v assorbe un'energia ΔE *senza cambiare velocità, la sua massa aumenta come indicato dalla* (*).
In particolare, dato che per un corpo fermo $\gamma = 1$:
Quando un corpo fermo assorbe un'energia ΔE *restando fermo, la sua massa aumenta di* $\Delta M = \Delta E / c^2$.
Nelle parole di Einstein: *L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di energia*.
L'inerzia dell'energia *non ha niente a che fare* con la "massa relativistica" (vedi appendice3).
Questa viene introdotta per salvare la relazione $p = mv$, che nella dinamica relativistica non vale se m è la *massa invariante*: quella che figura in
$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4$.
In realtà la massa relativistica *non è che l'energia* di un corpo in moto, divisa per c^2.
Apparentemente sembra giustificare la "famosa relazione" $E = mc^2$, ma la relazione valida in generale è $E = m\gamma c^2$ dove si legge che *ci sono due modi distinti* per cambiare l'energia di un corpo:
a) cambiarne la velocità, col che cambia γ
b) cedergli energia senza cambiare la velocità (es. dell'esperimento ideale), col che cambia *m.*
Per chiarire questi concetti si chiede che succede quando si scalda un corpo, per es. un pezzo di ferro...
Succede che la sua massa *aumenta* (di pochissimo: nessuna bilancia potrebbe rivelarlo).
Ma a livello microscopico? Gli atomi del ferro sono sempre in movimento: oscillano attorno alle loro posizioni di equilibrio. Se si aumenta la temperatura, l'ampiezza media delle oscillazioni cresce: crescono quindi tanto l'energia cinetica come quella potenziale.
E le masse?*Le masse* (invarianti) degli atomi *non cambiano*; eppure la massa del pezzo di ferro aumenta... Dobbiamo quindi concludere che la massa *non è additiva*:
in generale la massa di un sistema non è uguale alla somma delle masse delle parti componenti.
Nel caso del pezzo di ferro, o anche di un gas, la massa del sistema è *maggiore* della somma di quelle dei componenti. Ma può anche essere *minore*: è quello che accade
– in una *molecola* rispetto agli *atomi* che la formano
– in un *atomo* rispetto a *nucleo ed elettroni*
– in un *nucleo* rispetto ai *protoni e neutroni*.
In tutti questi casi si parla di *difetto di massa*.
Per atomi e molecole il difetto di massa è piccolissimo e non misurabile:10^{-9} o 10^{-10} della massa.
Per i nuclei invece è dell'ordine di 10^{-3} e può essere misurato con grande precisione.
Ma in linea di principio *non c'è nessuna differenza*.
Si propongono diversi esercizi sull'argomento (alcuni, significativi, riportati in appendice problemi di dinamica)

Dinamica 2 : urti

Gli obiettivi generali di questo modulo sono :
- capire l'ambito di validità di un legge fisica
- capire la differenza tra invarianza, conservazione, costanza

Gli obiettivi specifici sono :
- capire la conservazione dell'enermoto
- saperla usare per descrivere situazioni già note e per affrontare la risoluzione di problemi
- saper usare le equazioni più appropriate nella risoluzione dei problemi
- dare esempi di applicazione nella fisica delle particelle

Si discute la conservazione dell'enermoto e le sue conseguenze, sottolineando la differenza del concetto di invarianza
Si propongono tre semplici esperimenti [9] : urto elastico, anelastico, pesare il calore

Si fanno esempi di urti in una e due dimensioni, considerando situazioni importanti, come scattering elastico, annichilazione di particelle, creazione delle stesse….

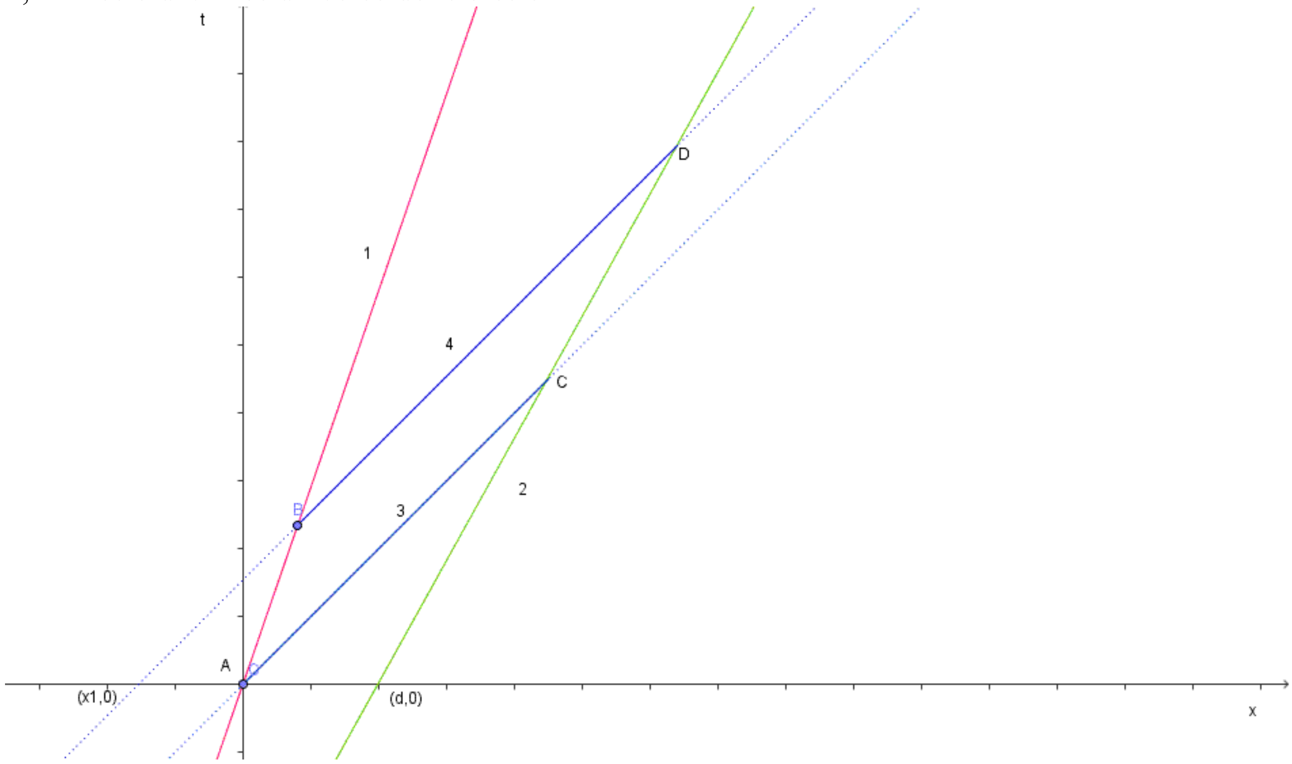
Verifica finale di dinamica (vedi in problemi di dinamica)

Effetto Doppler

Tale argomento è stato affrontato successivamente, in concomitanza con l'effetto Doppler classico, utilizzando i diagrammi (da Fabri, Coluccini- Scuola Estiva di Idro)
Riporto la derivazione
Una sorgente emette un segnale di frequenza f_e che si propaga in un mezzo con velocità c.
Un rivelatore riceve il segnale . La sorgente, il segnale e il rivelatore si muovono di moto rettilineo uniforme sulla stessa retta. Determinare la relazione che lega la frequenza f_r del segnale misurata dal rilevatore con f_e .

Eventi : A,B,C,D
A : parte la prima cresta
B : parte la seconda cresta
C : la prima cresta arriva al rivelatore
D : arriva la seconda cresta

1 Linea rossa : linea universo dell'emettitore di segnali
2 Linea verde : linea universo dell'emettitore
3,4 Linee blu : linee universo delle creste



Le leggi orarie sono
$x = v_e t$ $\quad$ v_e = velocità dell'emettitore
$x = v_r t + d$ $\quad$ v_r = velocità del ricevitore
$x = ct$ $\quad$ prima cresta
$x = ct + x_1$ $\quad$ seconda cresta

A(0,0) Determiniamo le coordinate degli eventi B, C, D

Evento B

$$\begin{cases} x = v_e t \\ x = ct + x_1 \end{cases} \rightarrow ct + x_1 = v_e t \rightarrow \quad t(c-v_e) = -x_1$$

$$B\left(\frac{-v_e x_1}{c-v_e};\frac{-x_1}{c-v_e}\right)$$

Evento C

$$\begin{cases} x = v_r t + d \\ x = ct \end{cases} \rightarrow ct = v_r t + d \rightarrow t(c-v_r) = d$$

$$C\left(\frac{cd}{c-v_r};\frac{d}{c-v_r}\right)$$

Evento D

$$\begin{cases} x = v_r t + d \\ x = ct + x_1 \end{cases} \rightarrow ct + x_1 = v_r t + d \rightarrow t(c-v_r) = d-x_1$$

$$D\left(\frac{cd - v_r x_1}{c-v_r};\frac{d-x_1}{c-v_r}\right)$$

Caso classico

La frequenza f_e del segnale lanciato dall'emettitore è

$$f_e = \frac{1}{t_B - t_A} = \frac{c - v_e}{-x_1}$$

quella del segnale misurato dal ricevitore è

$$f_r = \frac{1}{t_D - t_C} = \frac{c - v_r}{-x_1}$$

$$\frac{f_r}{f_e} = \frac{c - v_r}{c - v_e}$$

se $v_e=0$ $\quad \frac{f_r}{f_e} = \frac{c - v_r}{c}$ formula dell'effetto Doppler, caso sorgente ferma

se $v_r=0$ $\quad \frac{f_r}{f_e} = \frac{c}{c - v_e}$ formula dell'effetto Doppler, caso ricevitore fermo

Caso relativistico

In questo caso la frequenza del segnale lanciato dall'emettitore è :

$f_e = 1 / \Delta\tau_{AB}$

quella misurata dal ricevitore è

$f_r = 1 / \Delta\tau_{CD}$

$$\Delta\tau_{AB} = \sqrt{\Delta t_{AB}^2 - \frac{\Delta x_{AB}^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{x_1^2}{(c-v_e)^2} - \frac{v_e^2 x_1^2}{c^2(c-v_e)^2}} = \sqrt{\frac{c^2x_1^2 - v_e^2x_1^2}{c^2(c-v_e)^2}} = \left|\frac{x_1}{c}\right|\sqrt{\frac{c+v_e}{c-v_e}}$$

$$\Delta\tau_{CD} = \left|\frac{x_1}{c}\right|\sqrt{\frac{c+v_r}{c-v_r}}$$

$$\frac{f_r}{f_e} = \sqrt{\frac{(c-v_r)(c+v_e)}{(c+v_r)(c-v_e)}}$$ formula dell'effetto Doppler relativistico

$$\frac{f_r}{f_e} = \sqrt{\frac{(c-v_r)}{(c+v_r)}}$$ caso sorgente ferma

$$\frac{f_r}{f_e} = \sqrt{\frac{(c+v_e)}{(c-v_e)}}$$ caso ricevitore fermo

Se il segnale è luce è più conveniente scegliere come riferimento quello in cui l'emettitore è fermo, basta porre nella formula ottenuta $v_e = 0$ e $v_r = v_{rel}$ dove v_{rel} è la velocità del ricevitore nel nuovo riferimento

Si ottiene

$$\frac{f_r}{f_e} = \sqrt{\frac{(c-v_{rel})}{(c+v_{rel})}}$$

Si propongono esempi ed esercizi sia per il caso classico che per quello relativistico.

<u>Esperimento di Michelson e Morley (2h)</u>

Questa lezione è stata tenuta nella mia classe quarta, al termine dello svolgimento del programma di ottica, per cui gli studenti potevano capire l'apparato, da Luca Somaschini, studente che nel progetto eccellenza aveva approfondito l'esperimento, svolto in classe con l'interferometro per microonde della Pasco.

Riporto la sua lezione

Luca ha spiegato loro che un'analisi quantitativa delle onde ci mostra che la velocità di propagazione di queste è:

$c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$, ovvero c dipende da costanti in funzione del mezzo di propagazione. Ciò vuol dire che la velocità delle onde elettromagnetiche è la medesima in tutti i sistemi di riferimento. Si fa presente che questa è la radice storica del motivo per cui i principi di relatività classica e galileiana iniziarono a vacillare. Si introduce il problema dell'etere

Per poter comprendere a pieno come funzioni l'interferometro di Michelson e Morley Luca ha ripreso alcune idee fondamentali sulle onde e sulle interferenze.

Prima di tutto è fondamentale capire perché si sia ricorsi ad un interferometro. Sebbene già Galileo sapesse che la luce non ha velocità infinita, molti lo hanno pensato per secoli. Anche ai giorni d'oggi, sino a che non ci si avvicina alla scuola e alle materie scientifiche, si è portati a pensare ciò: un bambino di certo non penserà che la luce, che vede giungere dal Sole, ha viaggiato per otto minuti, allo stesso modo ritiene istantanea la propagazione di impulsi elettromagnetici quando accende una lampadina. Tuttavia, noi sappiamo che non è così e, inoltre, sappiamo anche che la velocità della luce è molto elevata.

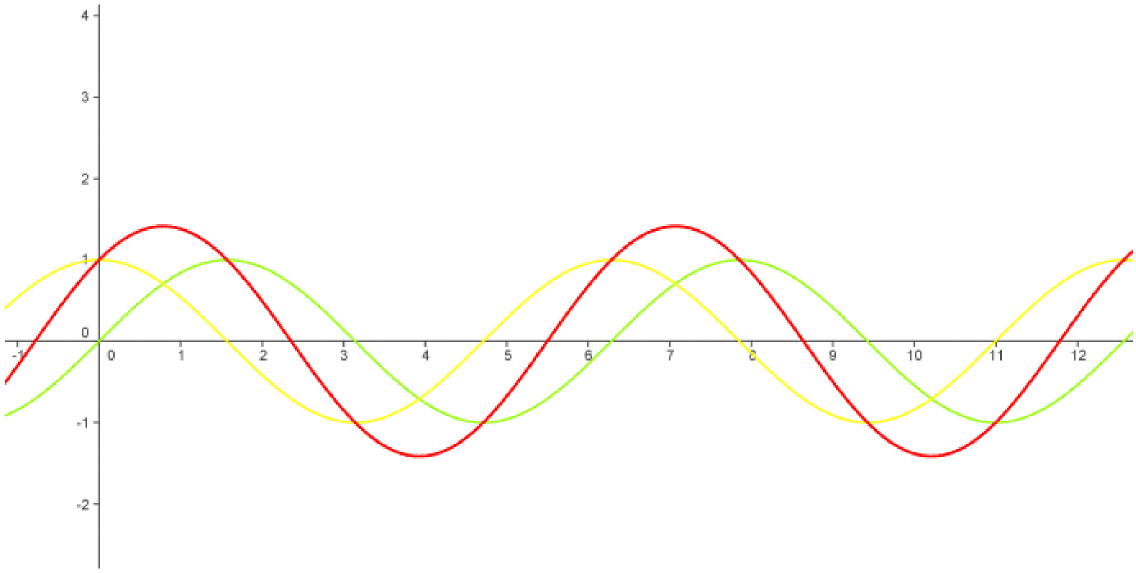
Per misurare un tempo possiamo impiegare una via diretta, ossia utilizzare un cronometro, oppure misurare lo spazio percorso ad una tale velocità, dal quale poi ricavare il valore del tempo. Tuttavia, se lo scopo del nostro esperimento è misurare la velocità della luce, siamo costretti ad abbandonare la seconda strada.

Non ci resta quindi che fornirci di un cronometro. Essendo la velocità della luce elevata, il nostro cronometro dovrà essere precisissimo, oppure dovranno essere grandissime le distanze. Non volendo addentrarci in distanze astronomiche, non resta che cercare un orologio: purtroppo non esistono orologi meccanici tanto precisi. Che fare? Misurare la luce con la luce. Noi dobbiamo ottenere un'amplificazione degli effetti che sono legati al fatto che la velocità della luce sia finita. Un metodo di amplificazione che non moltiplica, però, gli errori è quello di confrontare due fasci di luce inviati contemporaneamente che in un tempo t facciano cose diverse, ossia compiano percorsi diversi oppure passino per materiali diversi. Non resta che sovrapporre i due impulsi per vederne le conseguenze. In base alla figura di interferenza ottenuta, potremo risalire a ciò che è avvenuto.

Ecco ciò che accade:

pensiamo a due onde di forma sinusoidale: la loro ampiezza varia nel tempo. Consideriamo ora due onde: come ben sappiamo la composizione di due onde è data dalla somma delle ampiezze istantanee di ciascun'onda in ciascun punto, quindi localmente.

Se pensiamo alle due onde come ad una rappresentazione sul piano cartesiano, l'onda risultante dalla somma delle due onde avrà per ogni x un'ordinata di valore pari alla somma delle ordinate in quel punto delle due onde originarie. Ecco un esempio.

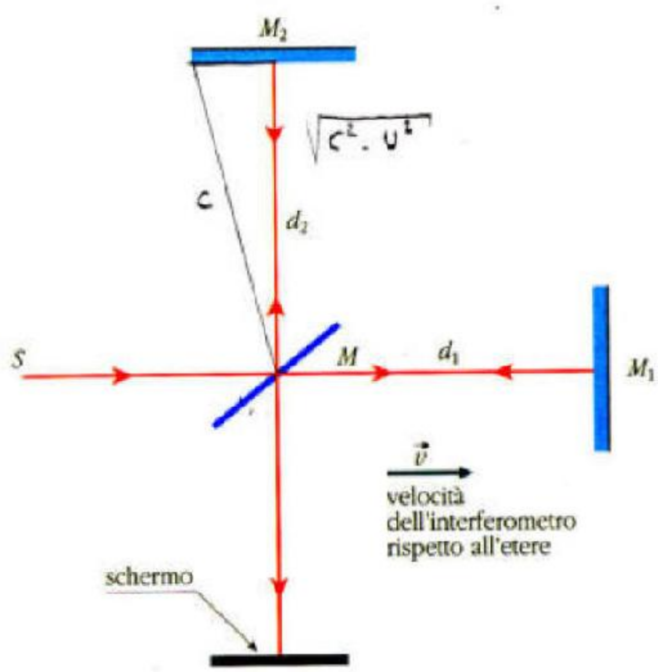


Ecco che l'onda in rosso rappresenta la somma delle due onde verdi e gialle.

La massima ampiezza si ottiene quando le onde sono in concordanza di fase, la minore quando sono in opposizione. Ecco cosa avviene con l'interferometro di Michelson e Morley:

I due scienziati si posero l'obbiettivo di misurare la velocità della Terra rispetto all'etere che doveva risultare fisso nell'Universo. Per fare ciò, considerarono che la luce fosse soggetta alle composizioni galileiane e che quindi risentisse del moto rispetto all'etere. Ecco allora come progettarono l'esperimento:

Tutto l'esperimento era basato su di un interferometro. Come abbiamo visto, secondo le leggi di composizione galileiana, la velocità di un corpo che si muove nello spazio vedrà la sua velocità in un sistema di riferimento K' in moto rispetto ad un sistema K come composizione della velocità del corpo nel sistema K' sommata alla velocità di quest'ultimo rispetto a K.



Se l'etere è in moto rispetto alla Terra e la luce è in moto nell'etere, la velocità di questa rispetto alla Terrà sarà la composizione di due velocità. Cambiando la velocità rispetto all'etere allora cambierà anche quella rispetto alla Terra.

Ecco come si costituisce l'esperimento:

- L'interferometro è posto su di una piattaforma in marmo in galleggiamento nel mercurio di modo che, durante l'esperimento, l'apparato rimanga parallelo a se stesso, ossia non vari la propria orientazione.

Sulla piattaforma è posizionata una sorgente luminosa S;

Troviamo poi uno specchio semi argentato M che rifletta la luce qualora questa lo colpisca su una faccia mentre, se lo colpito su quella opposta, ne permetta il totale passaggio.

Troviamo poi altri due specchi totalmente argentati: M' ed M";

In fine abbiamo uno schermo su cui vedremo proiettato il nostro risultato.

Ecco allora come si svolge l'esperimento:

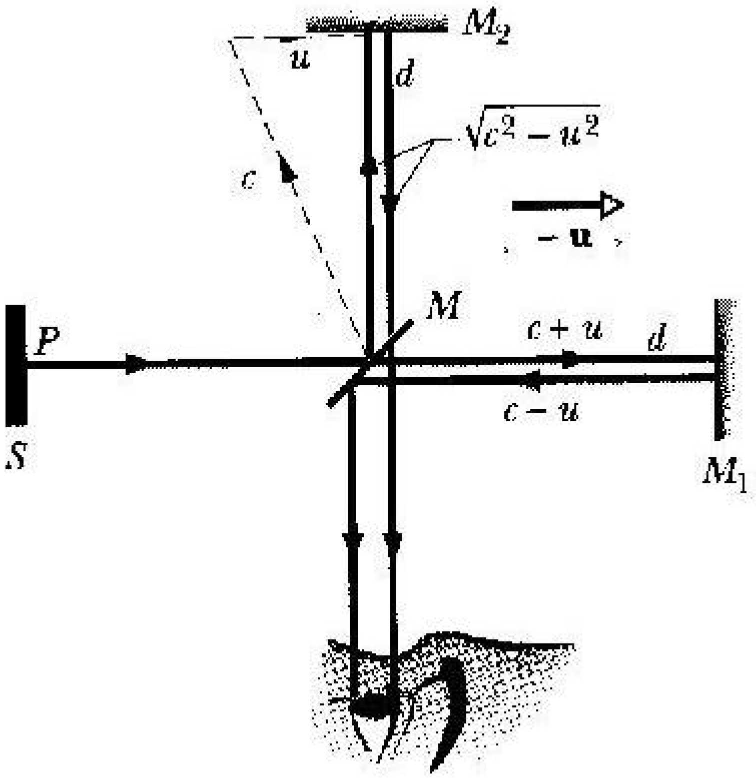
Consideriamo un fascio luminoso che sia emesso in P dalla sorgente S;

Questo colpirà lo specchio M dove viene diviso in due fasci separati: uno proseguirà in modo rettilineo sino a M', l'altro sarà deflesso di 90° sino a M"

I raggi saranno poi riflessi rispettivamente da M' ed M" per poi ritornare sino ad M

Qui il raggio proveniente da M' subirà una riflessione di 90° mentre M" proseguirà in modo rettilineo.

Così facendo i raggi colpiranno lo schermo, ossia l'interferometro, componendosi secondo le note leggi di composizione delle onde.



Non resta che eseguire alcuni calcoli per verificare cosa succede:

- Immaginiamo che il vettore rappresentante la velocità dell'etere sia diretto da S a M' allora:
- La velocità del raggio luminoso nel tratto MM' sarà:

$$v_{MM'} = c + u$$

- Mentre la velocità della luce nel tratto di ritorno sarà:

$$v_{M'M} = c - u$$

Il tempo t' necessario per compiere i due percorsi sarà:

$$t_1 = \frac{d}{c+u} + \frac{d}{c-u} = d\frac{2c}{c^2 - u^2} = \frac{2d}{c}\frac{1}{1-\left(u/c\right)^2}$$

Consideriamo ora i tratti MM" e M"M: in essi la velocità sarà composizione vettoriale della velocità u con quella c della luce. In modulo

$$v_{MM''} = v_{M''M} = \sqrt{c^2 - u^2}$$

Il tempo t" impiegato per compiere il cammino è:

$$t_2 = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{2d}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\left(u/c\right)^2}}$$

La differenza di tempo impiegato a compiere i due cammini è:

$$\Delta t = t' - t'' = \frac{2d}{c}\left\{\left[1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right]^{-1} - \left[1-\left(\frac{u}{c}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

Sappiamo però che u/c << 1 allora è possibile sviluppare in serie binomiale le quantità all'interno delle parentesi quadre, arrestandoci ai primi due termini.

$$\Delta t = \frac{2d}{c}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2\right\} = \frac{du^2}{c^3}$$

Ruotiamo ora l'intero apparato di un angolo di 90°. Questa operazione scambia le condizioni sotto cui si percorrono i cammini: MM'M diventa perpendicolare ad u, mentre MM"M diventa parallelo. Anche il ritardo tra le due onde è invertito. Ciò provoca uno sfasamento tra le onde che si combinano e sposta le posizioni dei massimi di interferenza. Lo scopo dell'esperimento è proprio, ricordiamo, quello di ricercare questo spostamento.

Ecco allora cosa succede:

La variazione totale nella differenza di tempo sarà:

$$2\Delta t$$

La differenza di fase dovuta alla differenza di tempo è espressa dalla relazione:

$$\Delta\phi = \omega(2\Delta t)$$

Ricordiamo però che:

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

$$\Delta\phi = \frac{4\pi c \Delta t}{\lambda}$$

Con una differenza di fase , essendo w la pulsazione dell'onda luminosa, il massimo numero di frange di spostamento, ossia la variazione osservabile del fenomeno dell'interferenza, è: (ossia il rapporto tra t e il periodo)

$$\Delta N = \frac{\Delta\Phi}{2\pi} = \frac{\omega(2\Delta t)}{2\pi} = \frac{4\pi c \Delta t}{2\pi\lambda} = \frac{2d}{\lambda}\left(\frac{u}{c}\right)^2$$

Michelson e Morley utilizzarono un interferometro con tali caratteristiche:

$$d = 11m$$

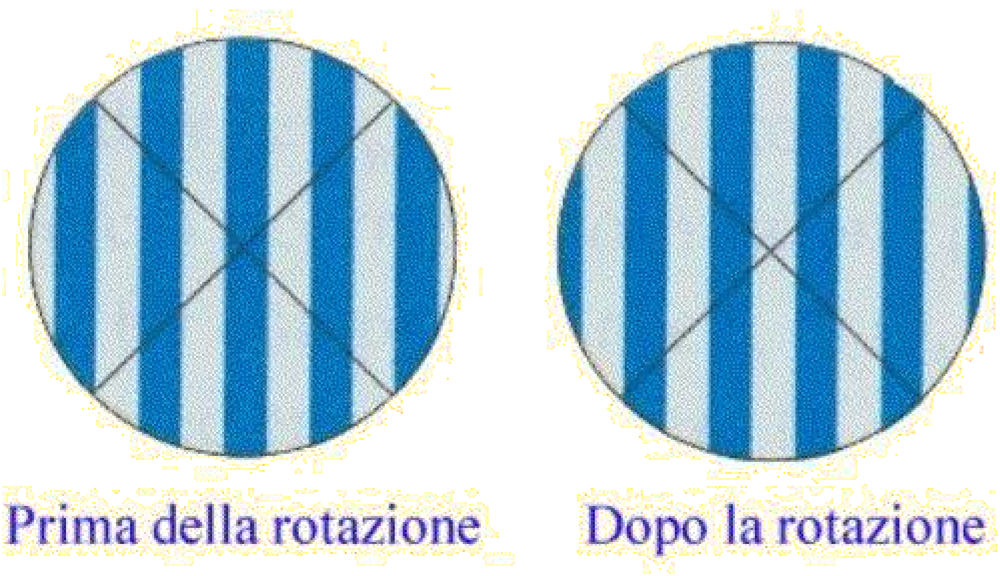
$$\lambda = 5{,}9 \ \cdot 10^{-7}m$$

Poiché la velocità dell'etere può essere, in modulo, considerata prossima a quella di rivoluzione della Terra (30km/s)

$$\frac{u}{c} \approx 10^4$$

Sostituendo nella precedente, allora:

$$\Delta N = 0.4$$



Il numero di frange che si prevede debbano spostarsi è 0,4, tuttavia l'esperimento è progettato in modo da poter rilevare spostamenti anche di 0,01 frange.

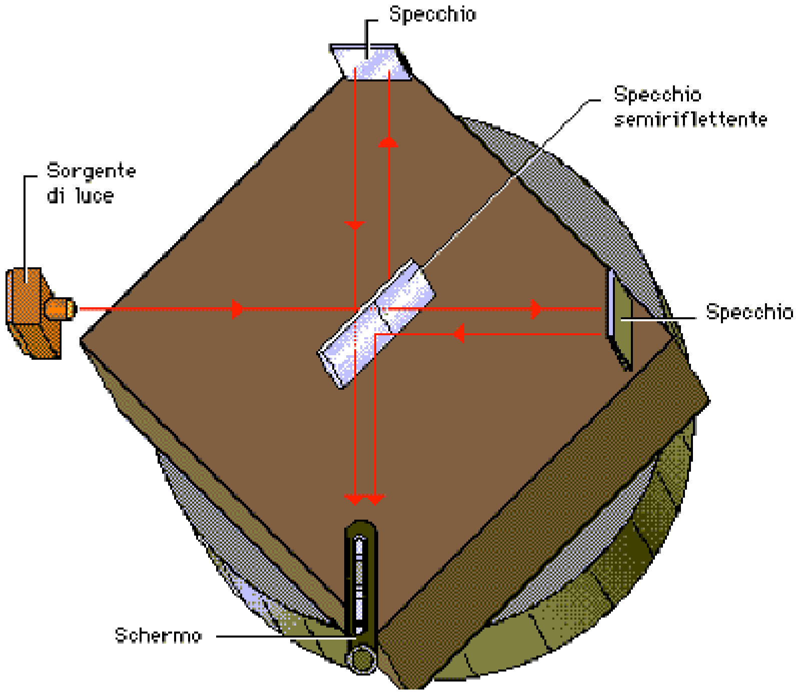
Ma l'esperimento non fu in grado di rivelare alcuno spostamento di frange.

Lo spostamento delle frange di interferenza che si sarebbe dovuto osservare era una conseguenza dell'aver ritenuto valide le equazioni di Maxwell e le trasformazioni galileiane e dell'aver ammesso l'esistenza di un sistema di riferimento privilegiato, collegato con l'etere in cui la luce avrebbe dovuto propagarsi con velocità c. Il risultato ottenuto portava quindi a due ipotesi entrambe ritenute irrealistiche. La prima era quella di pensare che l'etere non fosse a riposo rispetto al Sole e alle altre stelle fisse, mentre fosse perfettamente immobile rispetto alla Terra; questo però portava a considerare la Terra un sistema di riferimento privilegiato (rispetto al quale la velocità della luce poteva assumere il valore c previsto dalle equazioni di Maxwell) e quindi immaginarla al centro dell'Universo, ipotesi questa abbandonata già da alcuni secoli. L'altra ipotesi era quella di pensare che il principio di relatività meccanica fosse valido anche per le equazioni dell'elettromagnetismo e che queste fossero errate nella formulazione data da Maxwell, ma tutti gli esperimenti eseguiti confermavano in pieno la validità di tali equazioni.
La situazione era straordinariamente confusa ed evidenziava in pieno la crisi in cui si dibatteva la fisica classica, prima delle straordinarie idee di Einstein.

Bisognava dunque comprendere per quale ragione le frange non venissero rilevate. La prima interpretazione all'esperimento fu fornita da Lorentz che doveva al medesimo tempo salvare il concetto di etere, salvare la meccanica classica e salvare le equazioni di Maxwell. Egli sviluppò, allora, le tanto note trasformazioni, supponendo che i bracci dell'interferometro, a seconda della loro orientazione rispetto al vento d'etere, si contraessero oppure si allungassero. Questa teoria, che inizialmente godette di grande credito, perse gradualmente valore, per crollare definitivamente con la dottrina di Einstein. Tuttavia le trasformazioni rimasero valide, ma cambiarono il loro significato: la luce divenne un invariante, per cui ciò che variava era il tempo e lo spazio, non in relazione all'etere ma in relazione alla velocità di un corpo rispetto a quella della luce.

Ciò ci porta a capire come il fallimento dell'esperimento non fu una prova certa ed inequivocabile dell'inesistenza dell'etere. Possiamo tuttavia ritenere che l'etere non esiste se consideriamo il fallimento degli esperimenti di Michelson e Morley, la complessità intrinseca all'etere stesso e ovviamente le leggi relativistiche di Einstein.

Possiamo dunque dire che oggi, a distanza di più di cento anni, l'esperimento di Michelson e Morley abbia dimostrato l'inesistenza dell'etere, anche se ciò, al mondo di inizio '900, poteva risultare inverosimile. L'esperimento fallì nel suo intento iniziale,ma gettò le basi per la nascita della relatività, anche se Einstein ha sempre sostenuto di esserne venuto a conoscenza dopo la sua formulazione

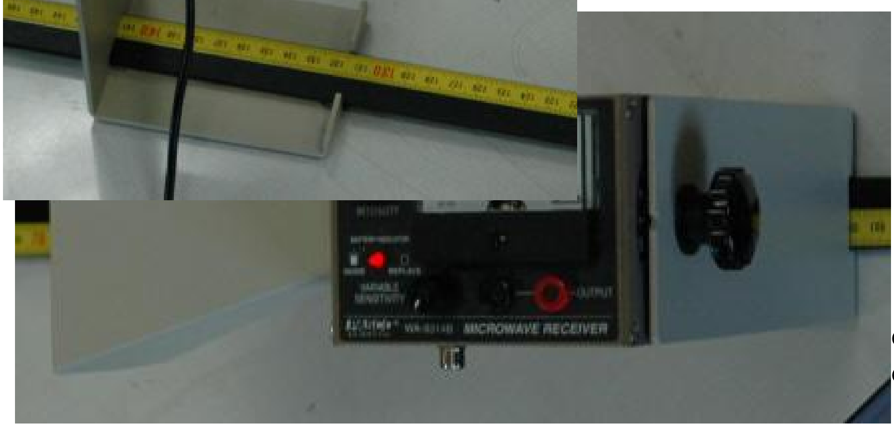


Ecco di seguito riportato come si è proceduto per ricostruire un esperimento il più possibile vicino a quello realizzato da Michelson e Morley.

Apparecchiature

L'apparecchiatura utilizzata è stata progettata e realizzata dalla ditta PASCO. Il sistema non è basato su onde luminose, come nel caso adottato da Michelson e Morley, ma sulle microonde. Ciò permette, in virtù della maggiore lunghezza d'onda, di ridurre drasticamente le dimensioni dell'esperimento, consentendo di realizzarlo in qualsiasi laboratorio scolastico di fisica.

Nel trasmettitore viene impiegato un particolare circuito a semiconduttori (diodo Gunn), il quale lavora alla frequenza di 10,7 GHz ed ha una potenza di 2 mW; il segnale a microonde è polarizzato linearmente con la direzione della componente elettrica del campo coincidente con la direzione del diodo. Il supporto del trasmettitore, essendo rotante, permette di variare in modo continuo l’angolo di polarizzazione del fascio emesso. Il trasmettitore è dotato di un'apposita tromba in funzione di antenna.



Nel ricevitore viene utilizzato, quale dipolo lineare rilevatore, un diodo Schottky collegato ad un amplificatore e ad un microamperometro. Anche il supporto del ricevitore è ruotabile: un disco goniometrico permette la misura dell'angolo di rotazione. Il trasmettitore e il ricevitore possono scorrere su aste metriche collegate al centro da una piattaforma ruotabile dove è possibile collocare su un supporto magnetico,dotato di antenna a tromba, diversi accessori. Il microamperometro analogico può essere regolato con diversi fondoscala. E' possibile, inoltre, tramite un apposito potenziometro, regolare ulteriormente l'amplificazione, in modo da collocare il massimo ricevuto in un particolare punto della scala.

Gli specchi sono dei pannelli riflettenti in metallo, mentre lo specchio semiriflettente è costituito da un pannello in formica.

Il funzionamento dell'interferometro a microonde è analogo a quello a luce utilizzato da Michelson e Morley e decritto in precedenza. Tuttavia i dati tecnici di esercizio variano: ecco come.

	Microonde	***Luce***
Lunghezza d'onda	*$2{,}8 \cdot 10^{-2}$ m*	*$5{,}9 \cdot 10^{-7}$ m*
Mezza lunghezza d'onda	*$1{,}4 \cdot 10^{-2}$ m*	*$2{,}95 \cdot 10^{-7}$ m*
Frequenza	*$10{,}7 \cdot 10^{9}$ Hz*	*$5 \cdot 10^{14}$ Hz*
Distanza d	*33 cm*	*11 m*
N	*10^{-7}*	*10^{-2}*

Frequenza

La frequenza dichiarata è stata verificata eseguendo la misura di 13 minimi consecutivi. I minimi sono stati ricercati spostando lo specchio M'. Poiché le onde percorrono due volte il tratto d, allora la distanza tra i due minimi sarà:

$$\Delta x = \frac{1}{2}\lambda$$

La misure sono state realizzate ponendo specchi, ricevitore e trasmettitore in posizione equidistante dal centro, ossia ad una distanza di: 33 cm

Ecco le posizioni dello specchio misurate in corrispondenza dei minimi. Le distanze sono espresse in funzione di un punto 0 sulla scala graduata dell'apparecchiatura. Ciò che ci interessa in questo momento è un delta, una differenza, non una posizione assoluta.

Minimi (cm)	***Mezza lunghezza d'onda***
30,1	
28,8	1,3
27,4	1,4
26	1,4
24,5	1,5

23,1	1,4
21,7	1,4
20,1	1,6
18,7	1,4
17,3	1,4
15,9	1,4
14,5	1,4
13,1	1,4

Ecco una breve analisi statistica:

Media: 1,41 cm

Deviazione standard: 0,071 cm

$$\sigma = \frac{\sqrt{\sum(x_i - M)^2}}{n-1}$$

Misurazioni

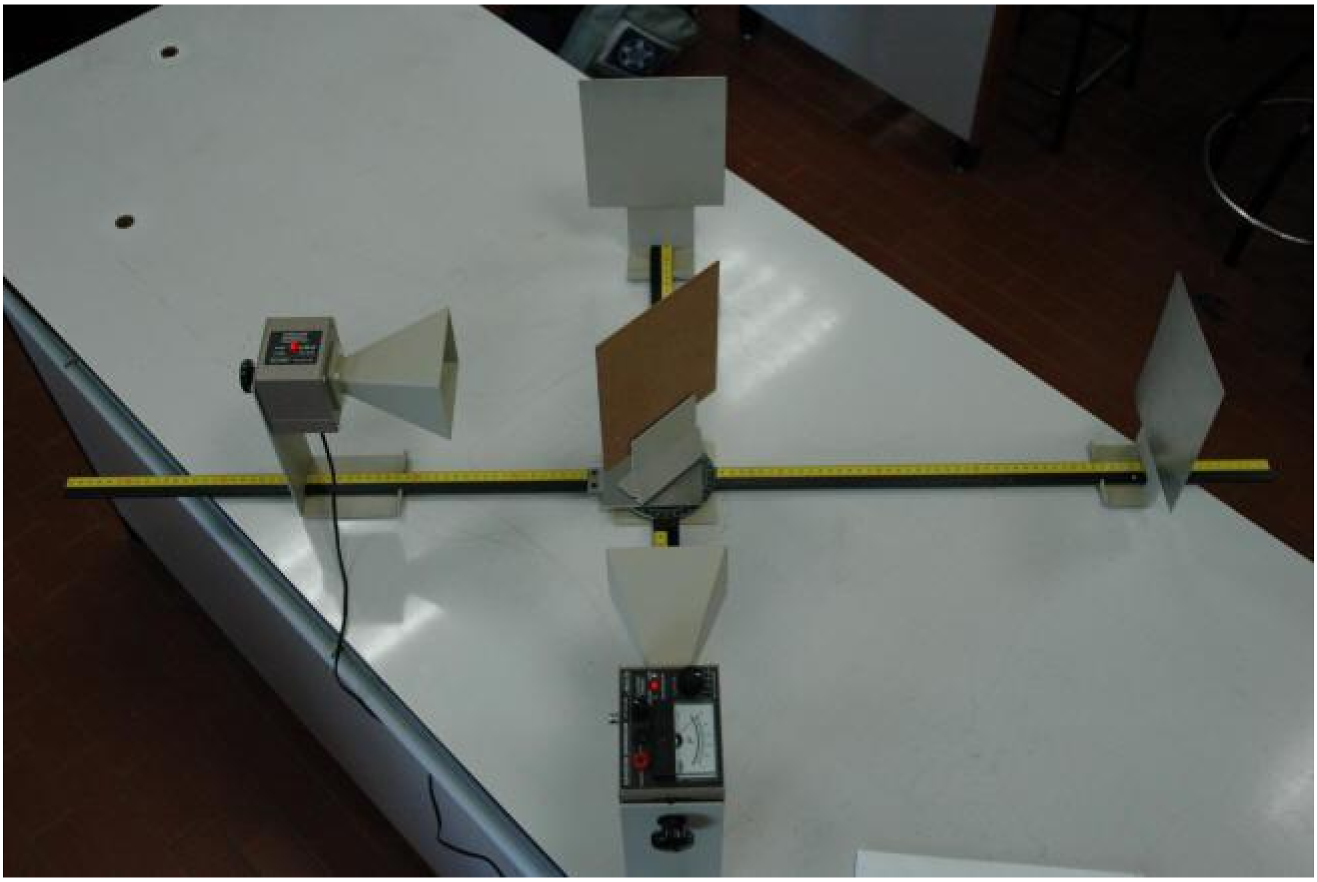
Dopo aver rilevato la frequenza in questa posizione, l'intero interferometro è stato ruotato di 360° a passi di 90° per rilevare eventuali spostamenti di fase, proprio come effettuato da Michelson e Morley. Ottenendo dei valori di lunghezza d'onda che, considerando il margine di errore, si possono ritenere uguali a quelli delle posizioni precedenti.

Limiti

L'esperimento di Michelson e Morley è molto particolare: concettualmente è estremamente semplice e lineare, tuttavia la sua realizzazione è ben più difficile. Se realizzato con la luce è necessario impiegare dimensioni molto grandi, nell'ordine delle decine di metri per ogni braccio e, chiaramente, ruotare in modo solidale un apparecchio di tali dimensioni è tutt'altro che semplice.
Per ridurre le dimensioni ,i due fisici pensarono di realizzare un sistema di specchi che facesse compiere alle onde luminose più volte il medesimo percorso d, in modo da accrescere l'influenza dell'etere sulle misure.
Decidendo di adottare un sistema basato sulle microonde, si risolve il problema delle dimensioni, infatti si adottano onde con lunghezza maggiore. Tuttavia, ciò apre un ulteriore problema: all'aumentare della lunghezza d'onda deve aumentare in modo notevole la risoluzione dell'apparecchio di rilevazione, per poter cogliere le frange di interferenza.
Nel caso di un sistema a microonde:

$$\Delta N = \frac{2d}{\lambda}\left(\frac{u}{c}\right)^2 = \frac{2 \cdot 33}{2{,}8} \cdot \frac{3 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} \approx 2{,}3 \cdot 10^{-8}$$

Ecco allora che noi non possiamo avere alcuna pretesa di poter realmente provare l'inesistenza dell'etere, tuttavia possiamo ricostruire ciò che i due fisici hanno compiuto, individuando i punti chiave di un esperimento che ha cambiato il ruolo della fisica.



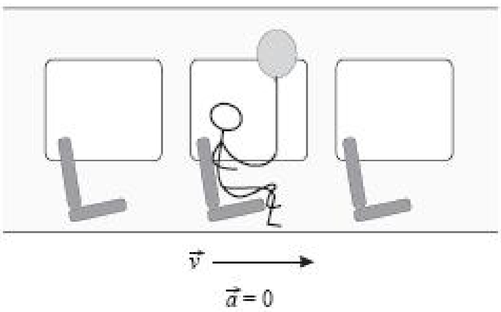
Introduzione alla relatività generale
Gli obiettivi generali di questo modulo sono :
- far emergere i significati concettuali di un esperimento
- saper confrontare le proprie ipotesi interpretative con conseguenze verificabili che da esse derivano.

Gli obiettivi specifici sono :
- far emergere il significato di sistema di riferimento inerziale e localmente inerziale
- capire il principio di equivalenza
- iniziare a concepire la curvatura dello spazio tempo e la gravità come espressione di tale curvatura

A causa di una serie di perdita di ore di lezione, legate ad un orario infelice, concentrato tra il venerdì e il sabato, sono appena riuscita ad introdurre l'argomento in quarta. Riporto pertanto il percorso iniziale e come intendo proseguire. Ovviamente non ho riscontri su questa parte, mentre per due studenti del corso eccellenza è stata trattata più accuratamente, in quanto erano interessati alle onde gravitazionali. Il percorso deriva essenzialmente dagli spunti di Fabri [10],[33]

Si prendono in considerazione alcune situazioni in sistemi 'non inerziali' (autobus che frena, treno che accelera, attrazioni di Mirabilandia, dove gli studenti erano stati), introducendo il problema delle forze apparenti. In particolare ci si sofferma sul problema del palloncino

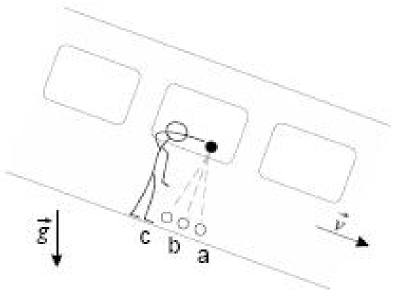
Un bambino sta seduto in un treno e tiene il filo di un palloncino.



Il treno frena: da che parte si sposta il palloncino?

Quindi si pone il pone il seguente problema [10]

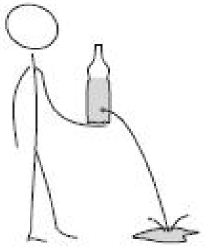
Una vettura ferroviaria percorre una discesa, senza attrito, quindi accelerando.
Quali esperimenti (all'interno della vettura) potrebbero mostrare che non si tratta di un RI?
Quello che vi chiedo è : proponete qualche esperimento da cui ci si può accorgere che la vettura non è un RI. Se si può: lascio anche aperta la possibilità che la risposta sia negativa.



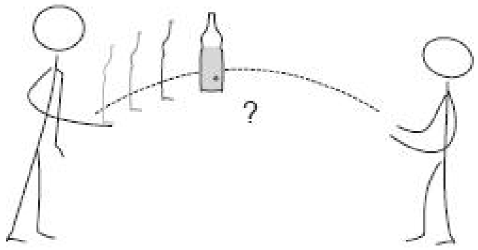
Segue una discussione che ci porta a sperimentare determinate situazioni. In particolare :

1. la bottiglia bucata
2. i magneti infilati in un supporto (bastoncino o ferro da maglia)

1. Si prende una bottiglia di plastica (da acqua minerale); si riempie d'acqua e si fanno dei forellini sulla parete, vicino al fondo. Se la bottiglia è stappata, l'acqua zampilla dai forellini



La pressione dell'acqua sovrastante, dovuta alla gravità, spinge l'acqua fuori. Inoltre la legge di Torricelli dice come la velocità del getto dipende da g e da h (altezza del liquido): $v = \sqrt{2gh}$.
Ora si lascia cadere la bottiglia, o la si lancia a un compagno (senza farla ruotare): si constata che durante il volo l'acqua non esce



Dunque quando la bottiglia è in volo (caduta libera) nel suo rif. la gravità non c'è più.

2) Si infilano due magneti su un supporto e si osserva che i due magneti sono in equilibrio. Se si lascia cadere il supporto o lo si lancia verso l'alto, invece, il magnete superiore schizza verso l'alto : non agendo più la gravità la repulsione tra magneti fa sì che questi siano liberi di respingersi.

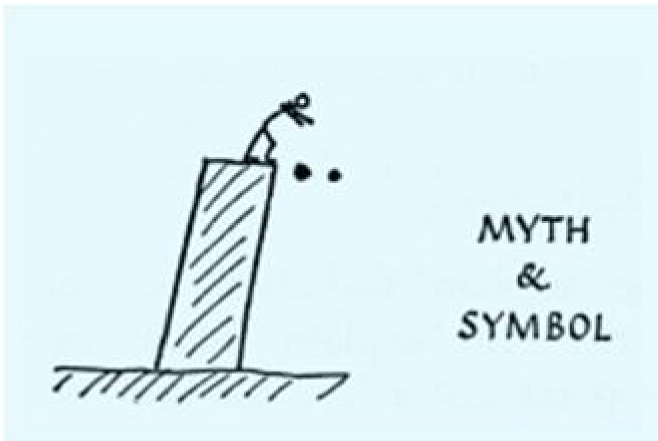
Si propone un filmato di esperimenti in cui si osserva l'analogia di situazioni tra lancio di una pallina su una rotaia con un carrello che si muove di moto RU e la stessa situazione su un carrello in caduta libera.

A questo punto si introduce il principio di equivalenza (questo è stato sviluppato solo per ora solo con gli studenti di quinta)

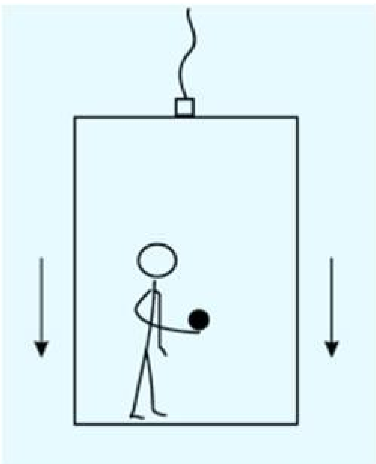
Einstein aveva ben presente la stretta relazione che intercorre tra gravità ed inerzia.

Pensiamo a quanto si narra abbia fatto Galileo:

Si racconta che Galileo abbia dato una dimostrazione pubblica lasciando cadere un oggetto leggero e uno pesante dalla cima della Torre Pendente di Pisa. (C'è chi dice che fece cadere una palla di ferro e una di legno; altri dicono invece che fossero due palle di ferro, la prima di una libbra e l'altra di cento libbre.)



Chiaramente i due oggetti arrivano a terra quasi nello stesso istante, a meno di alcune piccole differenze dovute all'attrito con l'aria. Tuttavia la teoria ed alcuni esperimenti, come il tubo di Newton, ci dicono chiaramente che due oggetti lasciati cadere sotto la semplice azione della forza gravitazionale cadono con la stessa velocità. In altre parole, l'accelerazione che agisce su questi corpi è sempre la medesima, tuttavia noi sappiamo che, secondo la legge di Newton, la forza di gravità, localmente, dipende dalla massa. Se un grave è più pesante perché non cade più velocemente? Perché sussiste uno stretto legame tra la massa e l'inerzia. Maggiore è la massa di un corpo tanto maggiore sarà la sua inerzia.
Essendo l'accelerazione gravitazionale localmente sempre uguale per ogni grave, ha allora senso parlare di campo gravitazionale e non più di forza, in analogia a quanto si fa nel caso di un campo elettrico.
Secondo Einstein, questo stretto legame tra inerzia e gravità non può essere casuale, non può essere frutto di coincidenze ma deve derivare da ragioni semplici e precise: egli suppone dunque che la gravità non sia una proprietà dei corpi, ma bensì che questa sia una caratteristica dello spazio-tempo: la *geometrizzazione* della gravità**.** Egli ritiene inoltre che debba esserci un *principio di equivalenza universale,* ossia che, per esempio, un sistema in caduta libera equivalga a tutti gli effetti a un sistema in assenza di gravità, così pure come una navicella in moto nello spazio profondo con accelerazione g equivalga in tutto e per tutto alla stessa navicella ferma sulla rampa di lancio.
Ad es. un ascensore in caduta libera è un sistema inerziale:
l'ascensore è in caduta e subisce una forza pari a mg che provoca una forza apparente di -mg sulla pallina che equilibra perfettamente la sua forza peso. Dunque un osservatore all'interno di un ascensore in caduta libera potrà a tutti gli effetti sostenere di essere in assenza di gravità.



La teoria della relatività ristretta rende conto del perché tutti i sistemi inerziali sono equivalenti. Ne consegue, tra l'altro, che non v'è modo di verificare, per mezzo di esperimenti eseguiti dentro un laboratorio K, se il laboratorio stia fermo o si muova di moto rettilineo uniforme. Il concetto di fermo appare quindi privo di significato fisico.
Ma che dire dei sistemi non inerziali? Abbiamo appena visto che la loro accelerazione è rivelata dalle forze apparenti, ma viene naturale chiederci: se il laboratorio K è accelerato, rispetto a che cosa è accelerato? Se ruota, rispetto a che cosa ruota? Newton pensava che questa cosa fosse lo spazio assoluto. Secondo tale concezione, esiste uno spazio immoto, indipendente dall'osservatore, rispetto al quale i corpi si muovono o stanno fermi.

Si propone l'argomentazione di Newton, in favore dello spazio assoluto, che partiva dall'esperienza fatta con un secchio pieno d'acqua, ruotante attorno a un asse verticale. La superficie dell'acqua si incurva quando l'acqua ruota in «assoluto», e non quando ruota soltanto rispetto al suo contenitore (cioè quando, negli istanti iniziali, il secchio ruota e l'acqua sta ancora ferma). In sostanza, il manifestarsi delle forze apparenti indica secondo Newton un'accelerazione rispetto allo spazio assoluto.
Questa concezione fu sottoposta a una seria critica da parte del fisico e filosofo tedesco Ernst Mach che rifiutò l'idea dello spazio assoluto come metafisica ed enunciò una suggestiva ipotesi secondo cui qualunque effetto - anche le forze apparenti - è sempre dovuto all'influenza reciproca di corpi materiali. In particolare, poiché siamo circondati da ogni lato da una quantità infinita di materia stellare (il cielo delle stelle fisse), suppose che le forze apparenti fossero l'effetto dell'accelerazione relativa al cielo delle stelle fisse, ovvero, in altre parole. che la massa di un corpo fosse dovuta alla interazione con tutto il resto della materia dell'universo (principio di Mach).
Einstein fu profondamente influenzato dalle idee di Mach. In particolare, secondo Einstein, se le

forze apparenti sono il risultato di un' interazione, come tutti gli altri tipi di forze, non vi è più ragione di distinguere tra sistemi inerziali e sistemi non inerziali; si deve cioè supporre che tutti i sistemi di riferimento siano equivalenti per la descrizione dei fenomeni naturali. Quest'asserzione costituisce il principio di relatività generale, così detto perché rappresenta la generalizzazione del principio di relatività a tutti i sistemi di riferimento. Sulla base di esso Einstein si accinse a impostare la sua teoria della relatività generale ma seguì una via diversa da quella indicata da Mach.

Supponiamo di essere all'interno di una nave spaziale abbandonata nello spazio interstellare. Per l'assenza di campi gravitazionali, se la nave è ferma, oppure si muove di moto rettilineo uniforme rispetto al cielo delle stelle fisse, i passeggeri e gli oggetti fluttueranno liberamente nel suo interno. La situazione sarà del tutto diversa se la nave viene accelerata dai razzi di coda: i passeggeri e gli oggetti non vincolati verranno spinti verso la parete opposta al verso dell'accelerazione. Questa parete sarà quindi il «pavimento», mentre quella opposta sarà il soffitto, e i passeggeri potranno stare in piedi e muoversi nello stesso modo che sulla Terra. Addirittura, se l'accelerazione della nave spaziale è pari a 9,8 m/s-, i passeggeri potrebbero benissimo pensare che la nave spaziale si trovi ancora in quiete sulla rampa di lancio. Se, ad esempio, si lasciano andare due sfere, una di legno e una di ferro, dalla stessa distanza dal pavimento, si vedrà che esse cadono con la stessa accelerazione e toccano il pavimento contemporaneamente, proprio come farebbero sulla Terra. Pertanto, saremo indotti a ritenere che nella cabina spaziale esista un campo gravitazionale.

Supponiamo ora che la nave spaziale venga decelerata dai razzi di testa. Tutti i passeggeri e i corpi all'interno della cabina verranno allora proiettati in avanti, proprio come se davanti alla nave si fosse posto improvvisamente un pianeta che attrae tutti gli oggetti entro la cabina con la sua forza gravitazionale. Infatti, tale forza, come quelle apparenti, è proporzionale alla massa dei corpi, per cui, in ogni caso, questi, indipendentemente dalla loro massa, si muovono allo stesso modo.

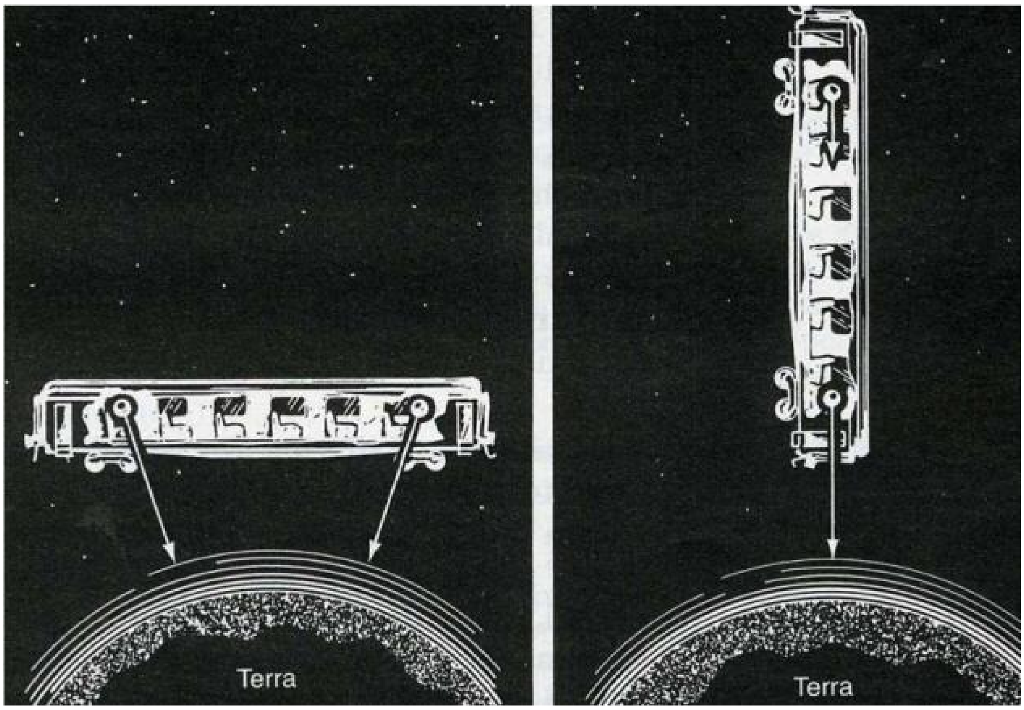
Tutto questo è assurdo si dirà; sappiamo bene che nessun pianeta può sorgere improvvisamente dinnanzi all'astronave. Certo, è assurdo. Ma lo è solo in quanto abbiamo degli elementi desunti esternamente a K e che ci avvertono che certe conclusioni sono impossibili. Sta il fatto che, con esperienze fatte al di dentro di K, non potremmo distinguere un'accelerazione da un effetto gravitazionale. Non per niente l'accelerazione delle astronavi si misura proprio in g, come è noto a tutti.
Siamo così portati ad accettare il principio di equivalenza, per cui la presenza di un campo gravitazionale è equivalente in tutto e per tutto a un'accelerazione del sistema di riferimento.

Un sistema in caduta libera, come per esempio un ascensore, è lo strumento che ci permette di liberarci dei problemi legati alla gravità. Tuttavia,dobbiamo ricordare che tutto ciò ha un carattere **puramente locale**.

Pensiamo ad un vagone ferroviario dalle dimensioni enormi, che cade dalla Luna verso la Terra. Newton ci ricorda che l'attrazione gravitazionale è diretta verso il centro della Terra e varia secondo l'inverso del quadrato della distanza. Tuttavia, il nostro vagone è molto grande, per cui, se cade orizzontalmente, la forza di gravità, agente nei due estremi del vagone, punterà verso il centro della Terra e per ciò, sebbene con modulo uguale, avrà una direzione differente.

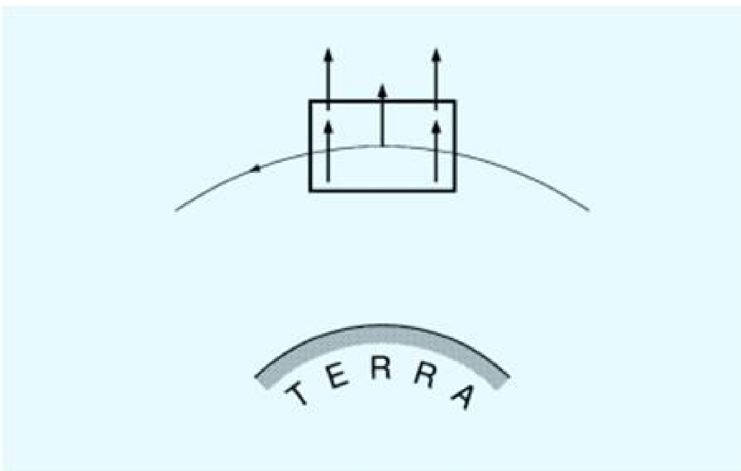
Se invece il vagone cadesse verticalmente, la distanza tra la Terra e il punto inferiore del vagone sarebbe molto minore di quella tra la Terra e la parte superiore del vagone: ecco allora che la forza di gravità avrebbe valori molto diversi.

Tutto ciò deve ricordarci che i sistemi in volo libero sono inerziali, ma solo **localmente**.

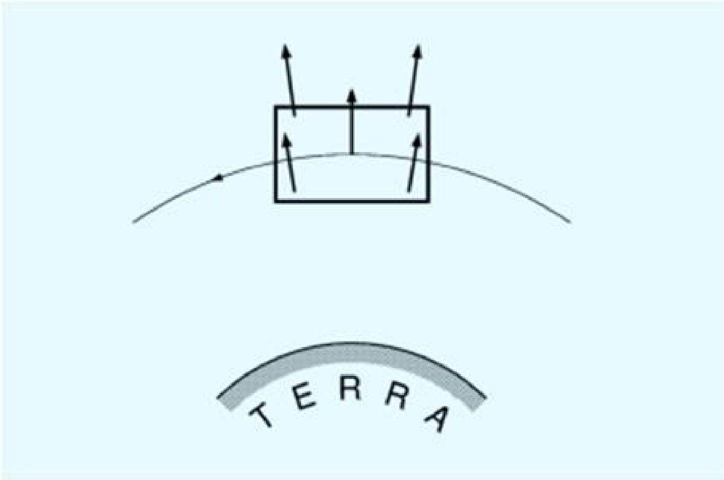


Ho riportato, per completezza, alcuni esempi che ci permettono di capire quando abbiamo a che fare con sistemi inerziali oppure no. Pensiamo ad una ruota panoramica: i sedili sono liberi di ruotare attorno al proprio asse e perciò i piedi dei turisti guarderanno sempre verso terra: questo è un esempio di moto traslatorio in un sistema inerziale. La stessa cosa non vale per una giostra, dove un passeggero in moto circolare, non ruoterà sul proprio asse ma rimarrà fermo rispetto alla giostra: in questo caso il sistema non sarà inerziale. Questo è ciò che accade anche con i satelliti:

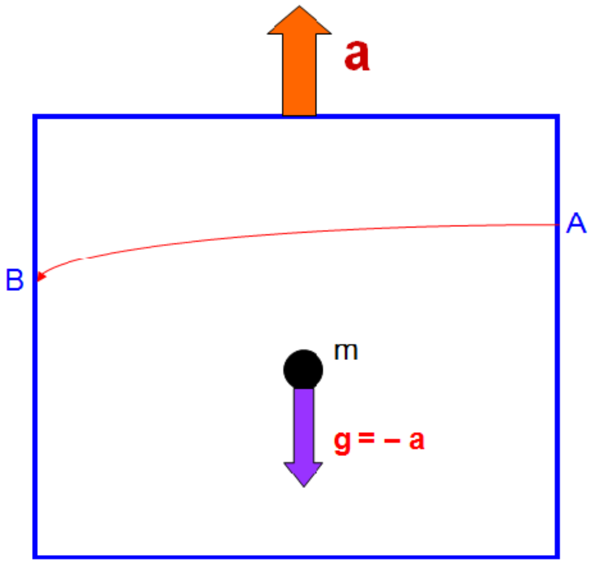
Nel primo caso il sistema è inerziale: il satellite avrà sempre la medesima orientazione rispetto ad un sistema di stelle fisse.



In questo secondo esempio, invece, il satellite si muove mantenendo un allineamento radiale con la Terra: questo è il caso di un sistema di riferimento non inerziale.



Immaginiamo ora di avere un ascensore in caduta libera.



- In questo ascensore montiamo un proiettore che invia continuamente impulsi luminosi.
- A fianco del proiettore montiamo anche una mitragliatrice.
- Nel riferimento K' in moto con l'ascensore osserveremo una traiettoria del proiettile rettilinea.
- Nel sistema K solidale alla Terra osserveremo una traiettoria deflessa, più precisamente una traiettoria parabolica.
- La medesima situazione si ottiene inviando un impulsi di luce per mezzo del proiettore.
- Ecco le equazioni del moto:

$$K' \begin{cases} x' = ct \\ y' = 0 \end{cases}$$

$$K \begin{cases} x = ct \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

- Ipotizziamo un valore di x e calcoliamo y e la deflessione angolare:

$$y = 5 \cdot 10^{-5} m$$

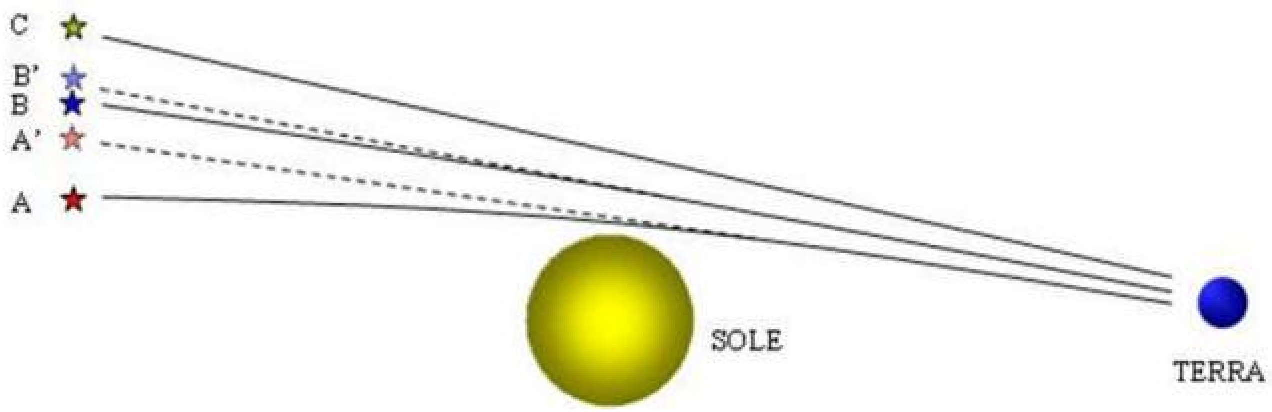
$$\frac{dy}{dx} = 10^{-14} rad$$

- Ovviamente, visti i risultati, è impossibile verificare sperimentalmente una deflessione così minima che, tuttavia, esiste ed è verificata teoricamente.

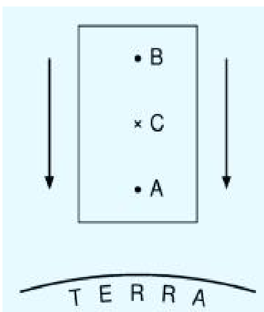
Ricordando però che nessun osservatore può distinguere tra un sistema accelerato ed un sistema sottoposto ad un' attrazione gravitazionale non si può che giungere a concludere che la luce deve essere *deflessa dalla gravità***.**

Per esempio...

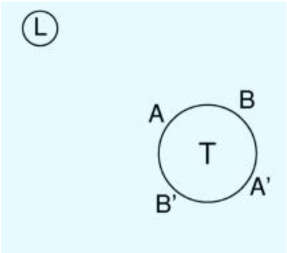
Un classico e semplice esempio della relatività generale deriva dall'osservazione delle stelle. La posizione di alcune stelle sembra variare quando queste sono in congiunzione o meno con il Sole. Se osserviamo per esempio la stella A quando i suoi raggi passano vicino al Sole la vedremo in una posizione differente da un'osservazione compiuta in un momento in cui il Sole si trova più distante dai raggi della stella.

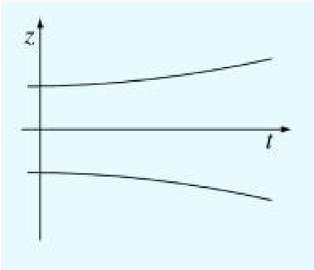


Ma tutto ciò che legame ha con la relatività? Ha un legame molto stretto, preciso. Lo spazio relativistico si curva continuamente. Si riprende il discorso sui sistemi localmente inerziali
Ad es. la Terra è in caduta libera nel campo gravitazionale del Sole, e per questo motivo la Terra può essere trattata come RI.
In termini newtoniani si direbbe: la Terra è un rif. accelerato:$a = 6\times10^{-3}$ m/s^2.
La forza apparente dovuta a questa accelerazione è compensata dalla forza di gravità del Sole, e sulla Terra la forza di gravità del Sole "non si sente" (approssimativamente, se si trascurano gli effetti di marea).
L'equivalenza tra l'ascensore in caduta libera e un riferimento inerziale *non è esatta*.
Il campo gravitazionale in A è più intenso che in C, mentre in B è meno intenso; quindi la pallina A cade con accelerazione maggiore dell'ascensore, quella in C con accelerazione minore.
Nel riferimento dell'ascensore la pallina A è accelerata *verso il basso*, B *verso l'alto*.



Perciò la gravità non si cancella esattamente, e il rif. dell'ascensore non equivale a un rif. inerziale in assenza di gravità.
O meglio, l'equivalenza è *approssimata*: con approssimazione tanto migliore quanto più le dimensioni della cabina sono piccole.
Per questo motivo si parla di equivalenza *locale*.



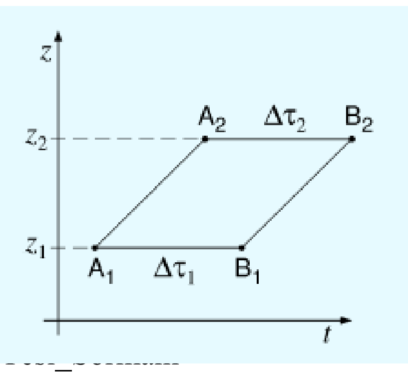


Il residuo di forza di gravità si chiama *forza di marea*, perché fornisce la spiegazione delle maree.
La Terra "cade" verso la Luna, e il campo gravitazionale della Luna in A è più intenso che al centro della Terra, mentre in A' è più debole: come nell'ascensore.
Se non ci fosse il campo della Terra, una pallina in A si muoverebbe verso la Luna, e una in A' si allontanerebbe in verso opposto.
Invece succede solo che le due palline *pesano meno* che se la Luna non ci fosse.
Per questa ragione l'acqua in A e in A' si solleva(alta marea)
La forza di marea permette di arrivare in modo elementare alla curvatura dello spaziotempo.
Il grafico a destra mostra i diagrammi orari delle due palline A e B: una accelera verso l'alto, l'altra verso il basso.
I due diagrammi *si allontanano*.
Basta interpretare questo fatto come una *deviazione di due geodetiche* nello spaziotempo, ed abbiamo compreso l'idea di fondo

L ' esperimento di Briatore e Leschiutta

Questo esperimento risale al 1975.
Ci sono due orologi atomici, uno a Torino (1) e l'altro sul Plateau Rosà(M. Cervino)(2).

L'orologio 1 invia un segnale a 2, e cominciano a contare il tempo.
Dopo circa due mesi, 1 invia un nuovo segnale, e si ferma il conteggio.
Risultato: 2 è *avanti* rispetto a 1 di circa 2.4 µs.
Come si deve interpretare questo risultato?
L'orologio 1 sta fermo alla quota z_1; l'orologio 2 sta fermo alla quota z_2: le loro linee orarie sono rette orizzontali.
Inizia l'esperimento.
L'orologio 1 emette il segnale di partenza (eventoA_1) che viaggia alla velocità della luce, e quando giunge in z2 fa partire l'orologio 2 (evento A_2).
Dopo un certo tempo, l'orologio 1 manda il segnale di fine esperimento (evento B_1); questo giunge all'altro orologio (evento B_2) e pone termine alla misura



La figura A1A2B2B1 è un *parallelogramma*, in quanto ha i lati opposti paralleli;e noi sappiamo che i lati opposti di un parallelogramma *sono uguali.*
Quindi *anche i tempi* misurati dai due orologi, che sono le lunghezze $\Delta\tau_1$e $\Delta\tau_2$ risp. di A1B1 e di A2B2 *debbono essere uguali*.
Ma l'esperimento ci dice $\Delta\tau_1 << \Delta\tau_2$!

Un diagramma spaziotempo *non è* lo spaziotempo:è una sua rappresentazione, una *mappa*, una "carta geografica" degli eventi nello spaziotempo.
Ci si deve quindi chiedere: questa mappa è *fedele*?

Una mappa è fedele se il rapporto fra una distanza misurata sulla carta e una misurata nella realtà è *costante* (la *scala* della carta). Una mappa della superficie terrestre *non è mai fedele*, perché la Terra è(circa) sferica e non c'è modo di rappresentare fedelmente una *superficie sferica* (in generale, una superficie *curva*) su un *piano*.
Si può *approssimare*, tanto meglio quanto più ci si limita a una porzione *piccola*, ma non si otterrà mai una mappa fedele.
Ciò che caratterizza una superficie curva è che per essa *non è possibile* una mappa fedele su un piano.
Allo stesso modo, solo l'esperimento può decidere se la carta sia fedele o no.
L'esperimento di B–L ci dice che non lo è. Conclusione: *lo spaziotempo è curvo*.

Analisi dei risultati

La classe, terza Liceo Scientifico, era costituita da 25 studenti, in generale caratterizzati da un atteggiamento attento ma poco propositivo, per cui ho dovuto privilegiare le lezioni frontali e i lavori in laboratorio, in quanto le discussioni guidate si sono rivelate improponibili. Devo esprimere, infatti, una valutazione negativa sulla prima parte del percorso, in quanto prevedeva da parte mia una lettura di brani scelti da Epicuro, Lucrezio, Aristotele…per arrivare a introdurre il dibattito tra sostanzialismo e relazioniamo, ma tali interventi richiedevano una partecipazione attiva, che non è nella natura della classe. (Ho infatti rinunciato a proseguire questo discorso anche in quarta). Anche nelle relazioni richieste sulle letture dei brani di Bruno e Galileo si sono evidenziate diverse difficoltà da parte degli studenti a cogliere gli aspetti sostanziali delle varie formulazioni del principio di relatività, ma questo è probabilmente legato al fatto che tali autori non erano stati ancora affrontati in filosofia e italiano (Infatti un'analoga richiesta nella classe II Liceo Classico ha dato risultati decisamente migliori)
Positivo, invece, il giudizio sul miglioramento del loro livello di conoscenza e comprensione deducibile dai risultati del test proposto e soddisfacente la partecipazione (a gruppi) ai lavori proposti in laboratorio e alla risoluzione di problemi assegnati in classe e a casa.
Le stesse considerazioni possono essere estese anche per i lavori proposti in quarta. Negli allegati con esercitazioni e verifiche sono riportati i risultati. Devo sottolineare che il problema maggiore è stata la mancanza di un libro di testo adeguato, per cui ho dovuto preparare per loro delle dispense e trattare esercizi a parte (soprattutto per dinamica)
Avevo programmato di proseguire il discorso con i sistemi in volo libero e accelerati, introducendo concetti di relatività generale, ma ho colto una certa stanchezza da parte degli studenti (dopo tutto tra l'anno precedente e il nuovo anno scolastico si era rimasti su questi argomenti per due mesi), per cui ho scelto di passare oltre, rimandando quest'ultima parte alla fine dell'anno, ma come ho detto, il tempo non è stato sufficiente. Ho infatti pensato di trattare la gravitazione introducendo anche il concetto di campo, cosa che permetterebbe di sviluppare certi concetti su volo libero e sistemi accelerati in modo più approfondito, avendo a quel punto già affrontato anche i fenomeni ondulatori
In questo modo ho notato che è possibile anche trattare certi argomenti (come l'effetto Doppler relativistico) in altri momenti o introdurre negli esercizi di termodinamica riflessioni legate a concetti di relatività già consolidati. Tutto ciò permette di mostrare agli studenti come la relatività non sia un argomento a sé stante, avulso dal resto della fisica e applicabile solo in situazioni limite,

ma sia una teoria quadro, che vincola la forma in cui devono essere espresse teorie specifiche, ed è in questa ottica che sto cercando di presentare i vari argomenti di fisica.
Ho anche intenzione di riprendere alcuni considerazioni fondamentali sui concetti di spazio.tempo che avevo 'congelato' dato che gli studenti non mi sembravano ancora pronti a recepirle , ma che sicuramente quest'anno dovrebbero riuscire ad affrontare, considerato che arriveranno fino a Kant in filosofia.
Questo perché, come dicevo nella premessa, "il problema dell'apprendimento deve essere aggredito da una prospettiva culturale più ampia che tenga conto anche di tutti quegli aspetti (metafisici, religiosi,estetici, emotivi, pragmatici e sociali) che concorrono alla formazione di quella "mappa o costellazione di credenze [spesso] implicite, generalmente piuttosto solide, che ogni individuo si è creato su come funziona il mondo*"*

APPENDICE1
Test iniziale

Quesiti su moti relativi

Quesito 1)

Siete in una carrozza senza finestrini di un treno straordinariamente silenzioso, confortevole e privo di scossoni. Esiste qualche esperimento di Fisica col quale stabilire se vi trovate in moto o meno?

Argomentare la risposta ____

____

____

____

Quesito 2)

Vi sarà forse capitato di essere fermi a un semaforo rosso, di percepire con la coda dell'occhio che l'auto di fianco avanza lentamente rispetto a voi e di premere istintivamente il pedale del freno., credendo di essere voi a indietreggiare. Cosa insegna un tale episodio sui moti relativi e assoluti?

Argomentare la risposta ____

____

____

____

Quesito 3)

Un ferroviere sta in piedi sul tetto di un vagone in moto; lancia verticalmente verso l'alto (dal suo punto di vista) una pesante pallina. Se non ci fosse l'aria che oppone resistenza al moto della pallina, questa riatterrerebbe sul vagone o più indietro?

Argomentare la risposta ____

____

____

____

Quesito 4)

Un treno percorre un tratto rettilineo, partendo da fermo, e raggiunge, in 15 minuti, la velocità di 120 km/h. Supponi il moto uniformemente accelerato; e, supponendo di essere un osservatore solidale con le rotaie ricava:

a) il valore dell'accelerazione
b) il grafico s/t
c) il grafico v/t

Supponi ora di essere su di un'auto che viaggia con una velocità costante di 50 km/h parallelamente ai binari; riferendoti ad un sistema di riferimento solidale con l'auto ricava nuovamente:
d) il valore dell'accelerazione
e) il grafico s/t
f) il grafico v/t

Discuti i risultati ottenuti:

Quesito 5)

Considera il grafico seguente (Fig. 1):

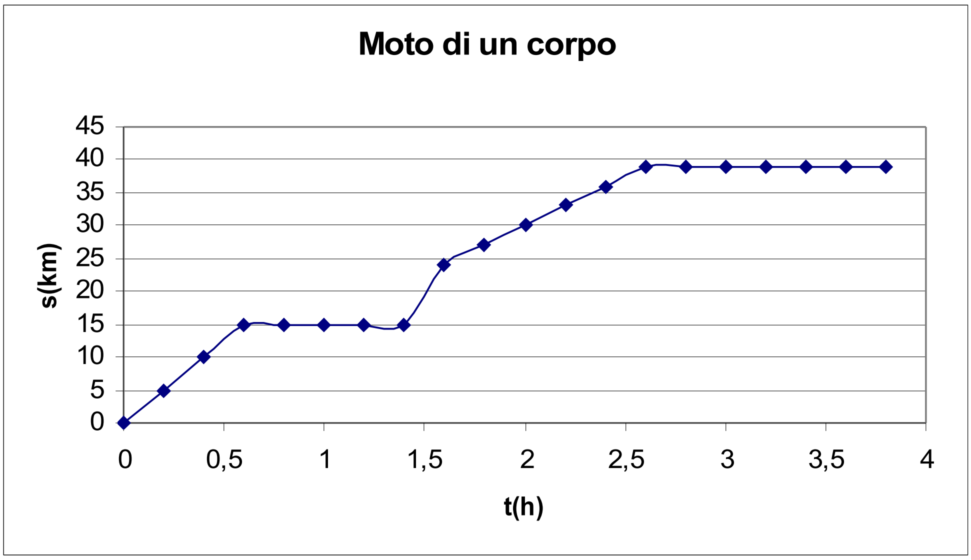


Fig. 1

e ricava tutte le informazioni utili alla descrizione del movimento.

Confronta, ora il grafico di Fig. 1 con quello di Fig. 2 (nel quale sono stati invertiti gli assi): esprimi come procedi per dedurre, in questa diversa situazione, tutte le informazioni relative alla descrizione del moto, sottolineando analogie e differenze con la situazione precedente

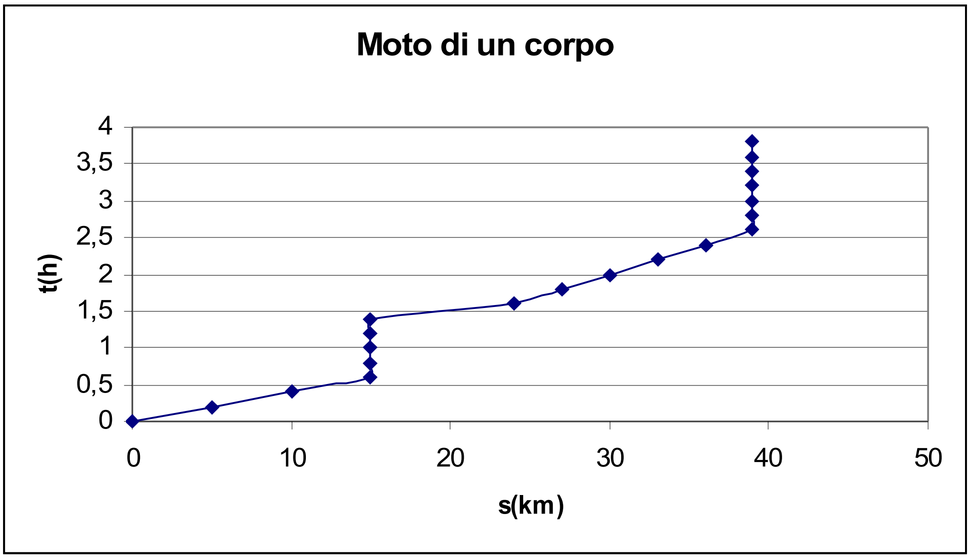
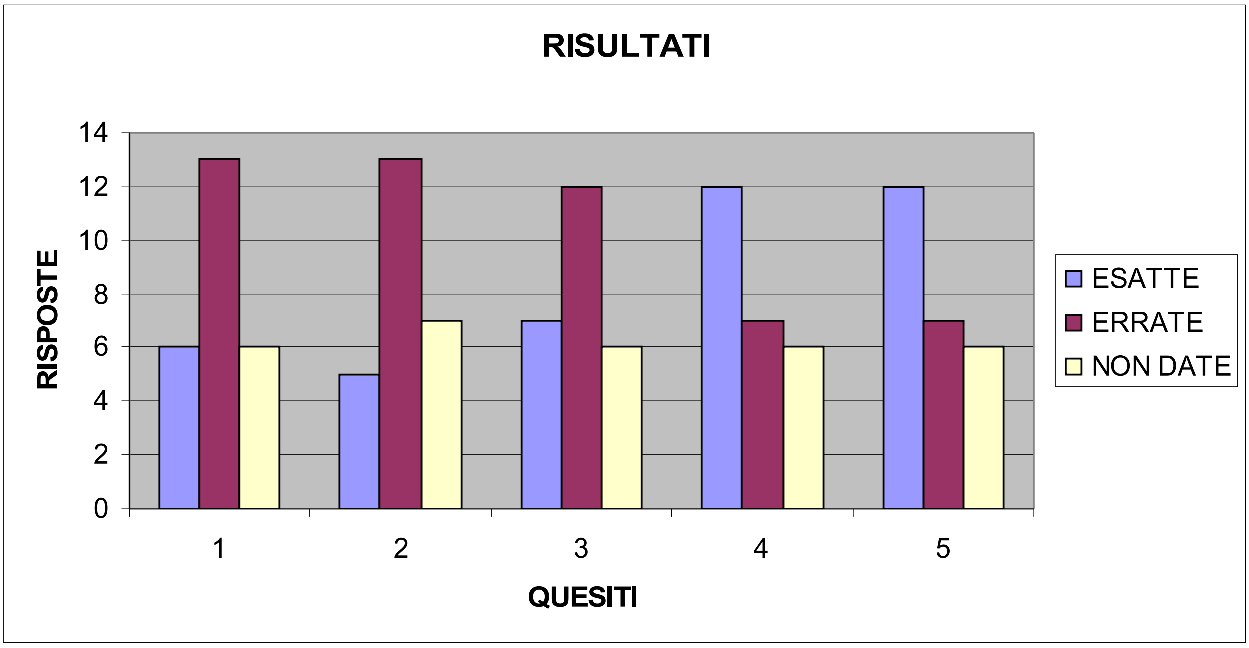
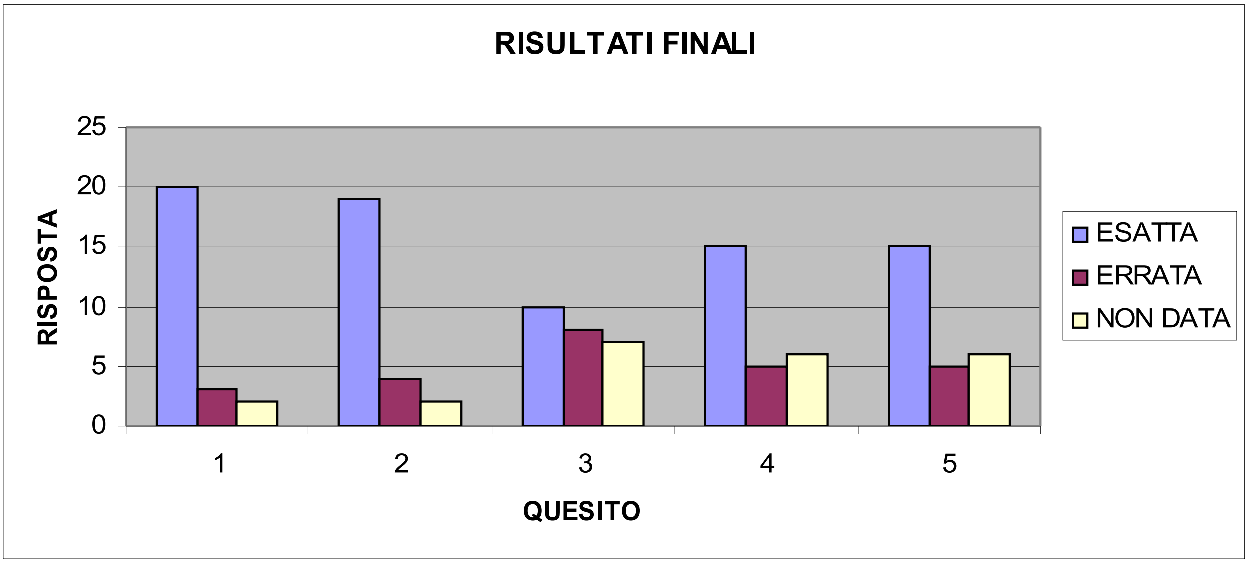
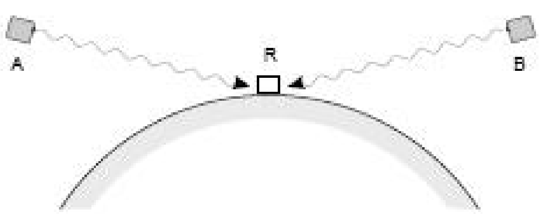


Fig. 2

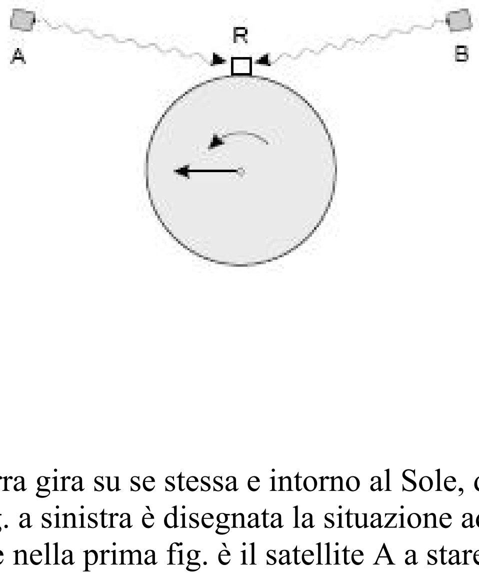

RISULTATI
14
12
10
8
6
4
2
0
RISPOSTE
1
2
3
4
5
QUESITI
ESATTE
ERRATE
NON DATE

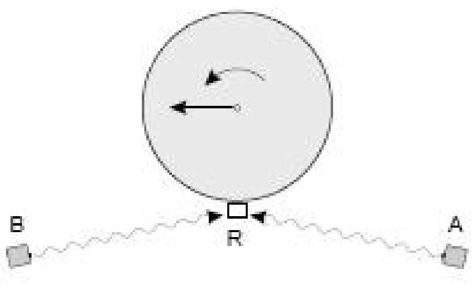

RISULTATI FINALI
25
20
15
10
5
0
RISPOSTA
1
2
3
4
5
QUESITO
ESATTA
ERRATA
NON DATA

APPENDICE2
Esercitazione1 GPS (da Fabri)



Viene spiegato il sistema GPS, ma poi si semplifica riferendosi a due soli satelliti geostazionari. Il ricevitore R riceve il segnale dal satellite A ad un certo tempo e sa che tempo è stato emesso perché, perché nel segnale è contenuta quest'informazione, per cui ricava il tempo trascorso nel passaggio del segnale da A a R e la distanza AR. Può anche calcolare la posizione di A al tempo di emissione. Lo stesso per B. Ragionando nel piano si vede che con le posizioni dei due satelliti e le due distanze AR e BR si trova la posizione di R (Nel caso reale due satelliti non bastano, perché siamo nello spazio e anche R deve avere un orologio di qualità adeguata per cui i satelliti sono almeno 4, ma di norma sono 24!)



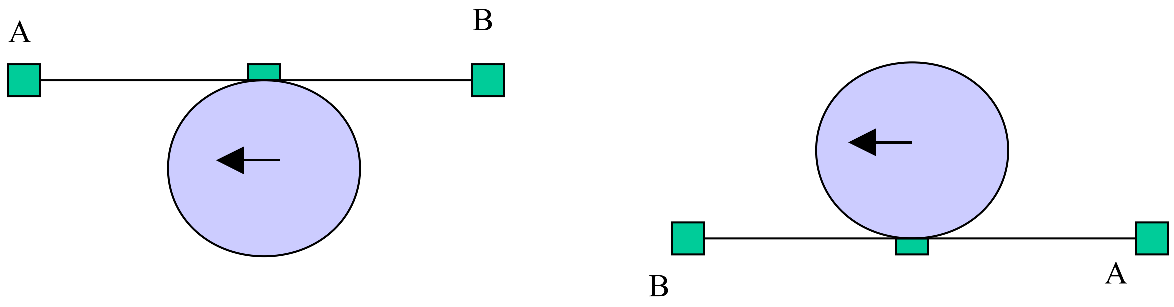


La Terra gira su se stessa e intorno al Sole, dunque un riferimento solidale alla Terra non è inerziale . In fig. a sinistra è disegnata la situazione ad un certo istante, a destra quella 12 ore più tardi: mentre nella prima fig. è il satellite A a stare avanti a B nel senso del moto orbitale della Terra, 12 ore dopo la situazione e scambiata: A sta indietro. Ricordate che la velocità orbitale della Terra e circa 30km/s: 1/10000 di c.

Supponiamo ora che la velocità delle onde e.m. in un rif. solidale alla Terra dipenda dal fatto che la Terra si muove: allora l'onda che va da A a R non avrà la stessa velocità di quella che va da B a R.

Potremmo pensare che nella situazione di sinistra la prima sia maggiore della seconda, e viceversa nella situazione di destra. Se il software che elabora i dati GPS non ne tiene conto, sbaglia il calcolo della posizione di R: attribuisce alla distanza AR un valore minore del vero, e invece un valore maggiore a BR. Di conseguenza, la posizione calcolata di R risulta spostata verso A rispetto a quella reale. Dodici ore dopo, il ruolo dei due satelliti si è scambiato, e il calcolo della posizione del ricevitore me lo darà spostato verso B.
Se il ricevitore sta in una postazione fissa, io mi accorgerò del problema perché mi sembrerà che R si stia spostando alternativamente avanti e indietro,col periodo di 24 ore. Si potrebbe però ritenere che l'effetto sia comunque piccolo: proviamo a stimarlo.

Riprendiamo la fig. supponendo A, B e R allineati. Sia D = AR = BR



Ipotizziamo che nella situazione di sinistra la velocità dell'onda che va da A a R sia maggiore di quella che va da B a R, e viceversa nella situazione di destra. Allora il tempo impiegato a percorrere il tratto AR è

$$t_{AR} = \frac{D}{c + v}$$

Mentre per il tratto BR è

$$t_{BR} = \frac{D}{c - v}$$

Se il software del GPS assume che la velocità sia sempre c, stima la distanza AR al valore D'=cD/(c+v) e la distanza BR al valore D''=cD/(c-v);
entrambi i risultati portano ad assumere la posizione di R spostata verso A di un tratto D v/c (a meno di termini di secondo ordine in v/c)
Infatti :
x_R = D' – D = cD/(c+v) – D = - vD/ c (1+ v/c)
Mentre
x_R = D'' – D = cD/(c-v) – D = vD/ c (1- v/c)

Nella situazione di destra l'errore cambia segno e il ricevitore appare spostato verso B.
Dunque
Errore = Dv/c = (26000km. 30km/s) / 300000km/s = 2,6 km

Nel calcolo viene usato il valore di distanza dei satelliti, mentre se si usa il valore per satelliti geostazionari l'errore raddoppia.

L'informazione che si ottiene dal GPS è molto significativa.
Infatti nessuno ha mai visto, usando il GPS, questa ipotetica oscillazione: il GPS funziona perfettamente in accordo con l'ipotesi che la velocità delle onde e.m. sia sempre c.

In classe è stato portato un GPS da uno studente, che durante la mattinata doveva controllare eventuali variazioni nella posizione segnata dallo strumento, posizionato sul banco. Nell'arco della mattinata si sarebbe dovuto osservare una variazione di circa 1 km, che ovviamente non c'è stata.

<u>Esercitazione2</u>
Diagrammi spazio- tempo

Dopo una discussione in classe sui diagrammi spazio-tempo, in laboratorio è stato chiesto agli studenti di creare con geogebra un viaggio spaziale : viaggio su Sirio di Andrea.
Sono stati creati i diagrammi del viaggio del laboratorio, del razzo in andata e del razzo di ritorno (seguendo la proposta del Taylor- Wheeler)

<u>Diagramma spazio-temporale del laboratorio</u>

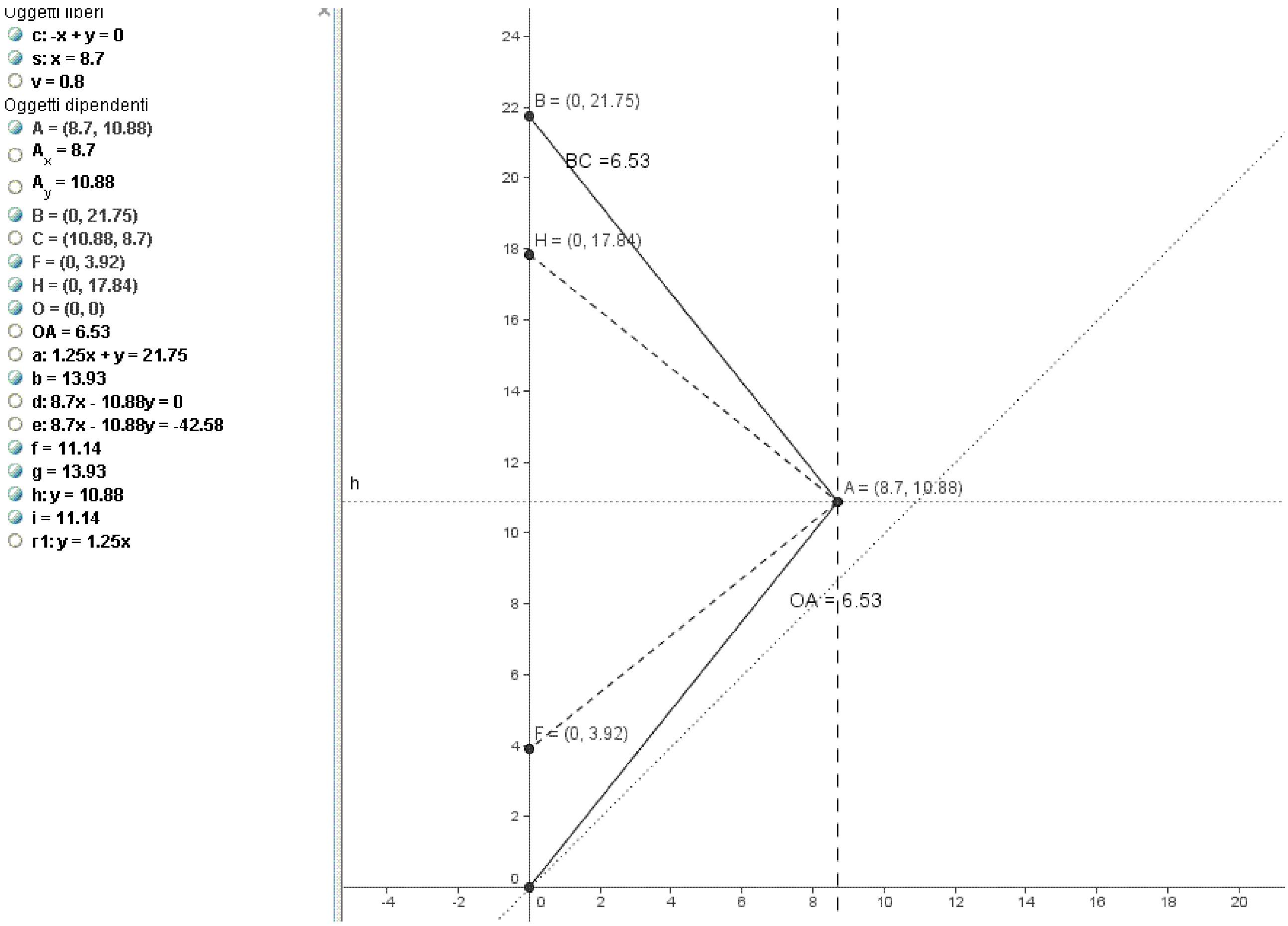


Diagramma spazio-temporale del razzo che si allontana

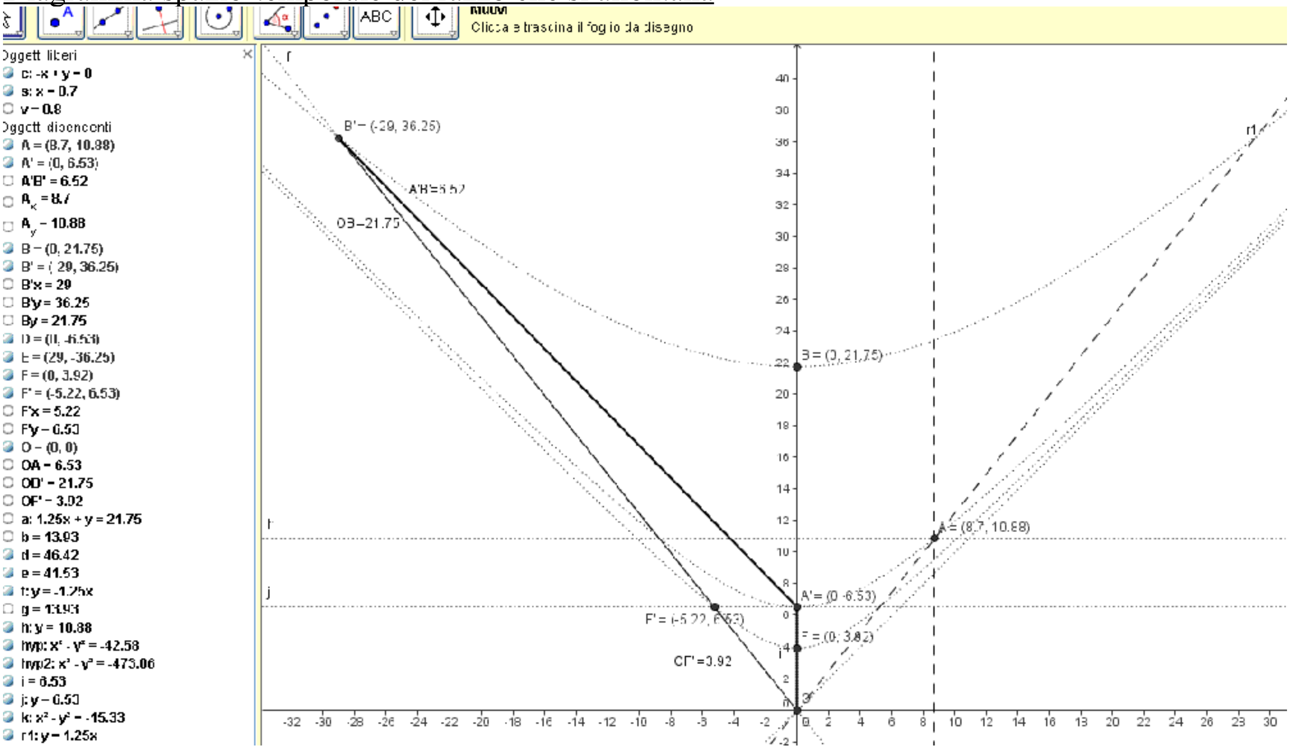
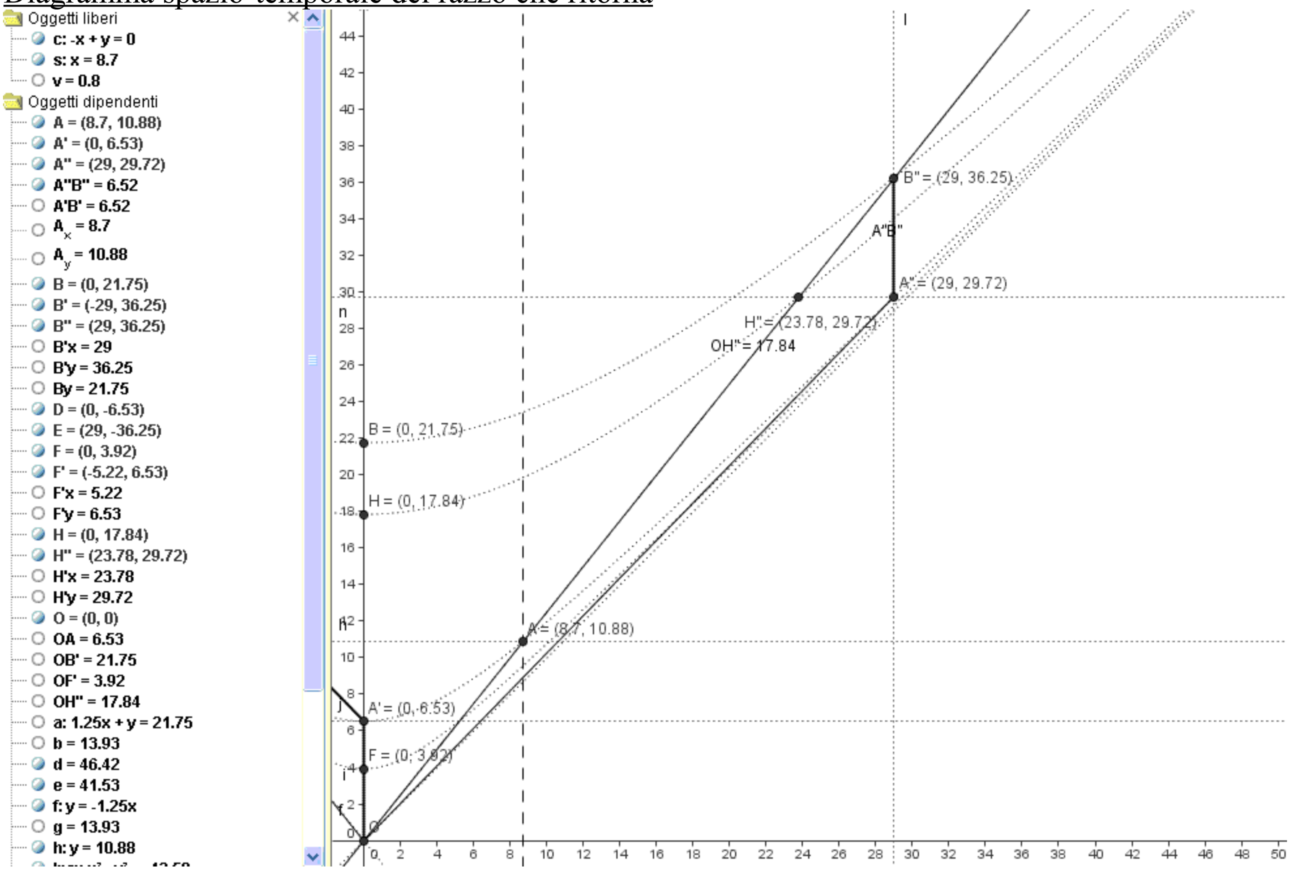


Diagramma spazio-temporale del razzo che ritorna



Per ogni diagramma sono state ricavate le posizioni spaziali e temporali degli eventi O (partenza di Andrea dalla Terra), A (arrivo di Andrea su Sirio), B (ritorno di Andrea sulla Terra) : per esigenze di software (i punti vanno nominati diversamente , ma si voleva poter tenere anche quelli dei diagrammi precedenti per mostrare agli studenti che tali punti cadevano tutti sulle iperboli invarianti), gli eventi A e B sono stati rinominati A’ e B’ nel diagramma del razzo che si allontana e A’’ e B’’ nel diagramma del razzo che ritorna.
Gli studenti hanno dunque potuto dimostrare che nel sistema del razzo che si allontana e nel sistema del razzo che ritorna si calcolano per la linea d’universo OAB lo stesso tempo propri che viene previsto nel sistema del laboratorio. Allo stesso modo si dimostra che in tali sistemi si calcola per la linea d’universo diretta OB lo stesso intervallo spazio-temporale previsto nel laboratorio.
Si è inoltre mostrato che tutti gli osservatori prevedono che l’intervallo di tempo proprio lungo OAB è minore di quello che si misura lungo OB.
Si fa poi tracciare la retta parallela all’asse x passante per A’ (come l’insieme di tutti gli eventi possibili simultanei all’evento A) nel diagramma del razzo che si allontana . Si trova l’intersezione con OB’ chiamando il punto F’. Si calcola OF e lo si rappresenta anche nel diagramma del laboratorio (evento F) : unendo nel diagramma del laboratorio A e F si fanno alcune considerazioni sulla linea di simultaneità all’evento A in tale diagramma (in preparazione anche alla successiva introduzione dei diagrammi ‘riuniti’)
Si ripete il procedimento nel diagramma del razzo di ritorno, chiamando H l’evento simultaneo all’evento A. Si discute sul salto temporale nel momento della virata (paradosso dei gemelli)
Al termine dei lavori è stato dato il seguente questionario agli studenti (i valori di velocità e distanza del pianeta erano diversi per ogni gruppo). Ogni gruppo doveva usare il proprio programma preparato nelle lezioni precedenti e a casa per rispondere alle domande (basta infatti cambiare il valore di v e di d in oggetti liberi, per ottenere i diagrammi con i nuovi parametri)

VERIFICA1 di Laboratorio

Evento O : partenza di Andrea dalla Terra

Evento A : arrivo di Andrea a destinazione su pianeta X

Evento B : ritorno di Andrea sulla Terra

Distanza pianeta X nel riferimento della Terra :

Velocità(nel riferimento Terra) razzo andata = velocità razzo ritorno =

Domande

Secondo gli osservatori del riferimento della Terra :

1. In che istante il razzo arriva su X ?
2. In che istante il razzo arriva di nuovo sulla Terra?

Secondo le osservazioni di Andrea

3. In che istante arriva su X?
4. In che istante arriva di nuovo sulla Terra?

5. Qual è la distanza spaziale tra Terra e X, secondo le osservazioni effettuate nel sistema di riferimento del razzo d’andata?

6. Nello stesso istante in cui Andrea raggiunge X, nel sistema di riferimento del razzo d'andata, qual è il tempo (indicate il punto con F) segnato dall'orologio della Terra in corrispondenza di tale evento ?

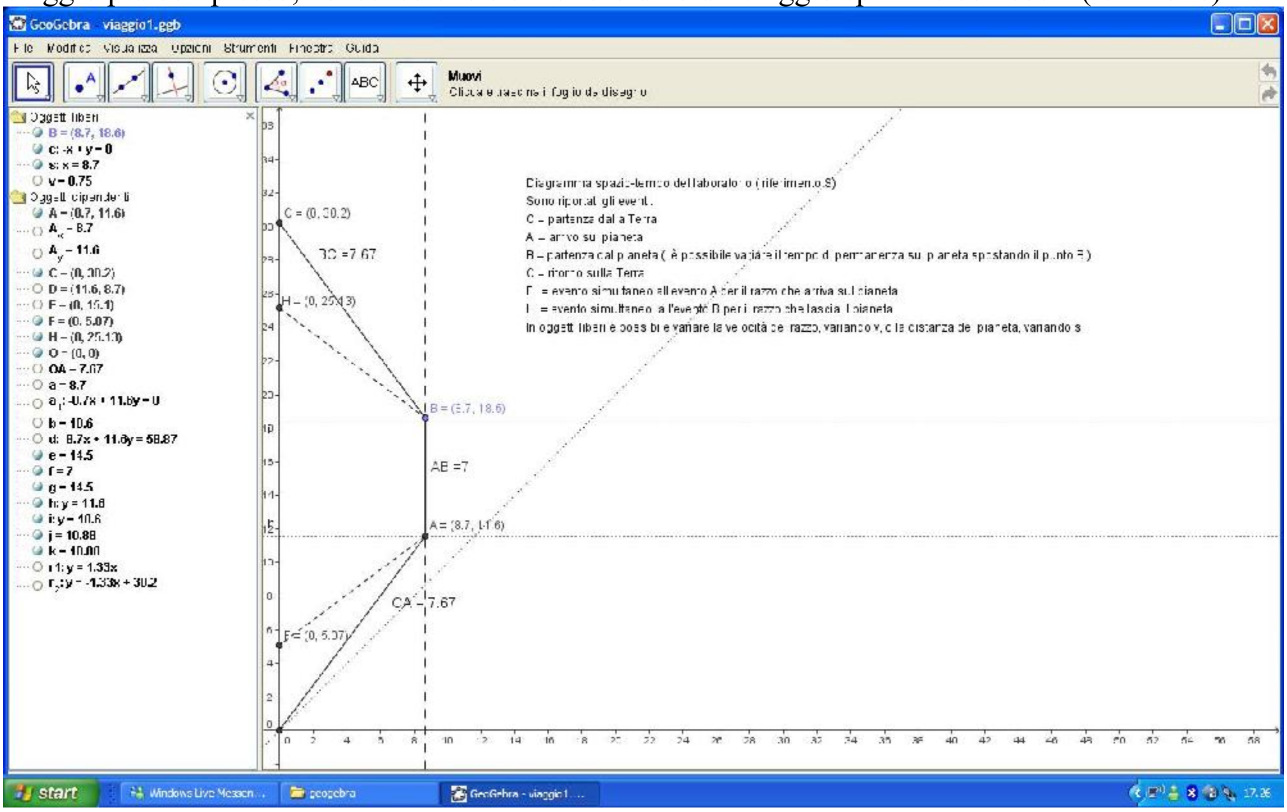
7. Nello stesso istante in cui Andrea lascia X, nel sistema di riferimento del razzo di ritorno, qual è il tempo segnato dall'orologio della Terra in corrispondenza di tale evento (evento H)?

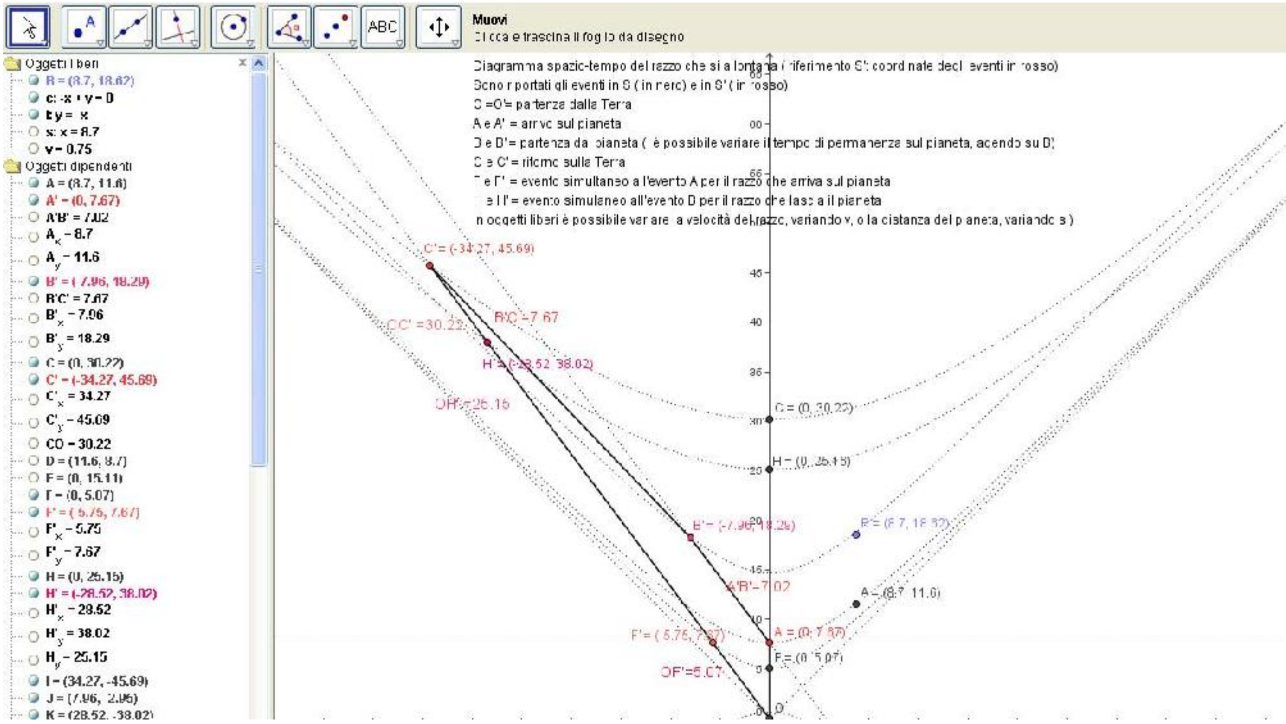
8. Calcolate OB' e A'B' . Confrontate con i valori ottenuti per OB e AB Cosa potete concludere?

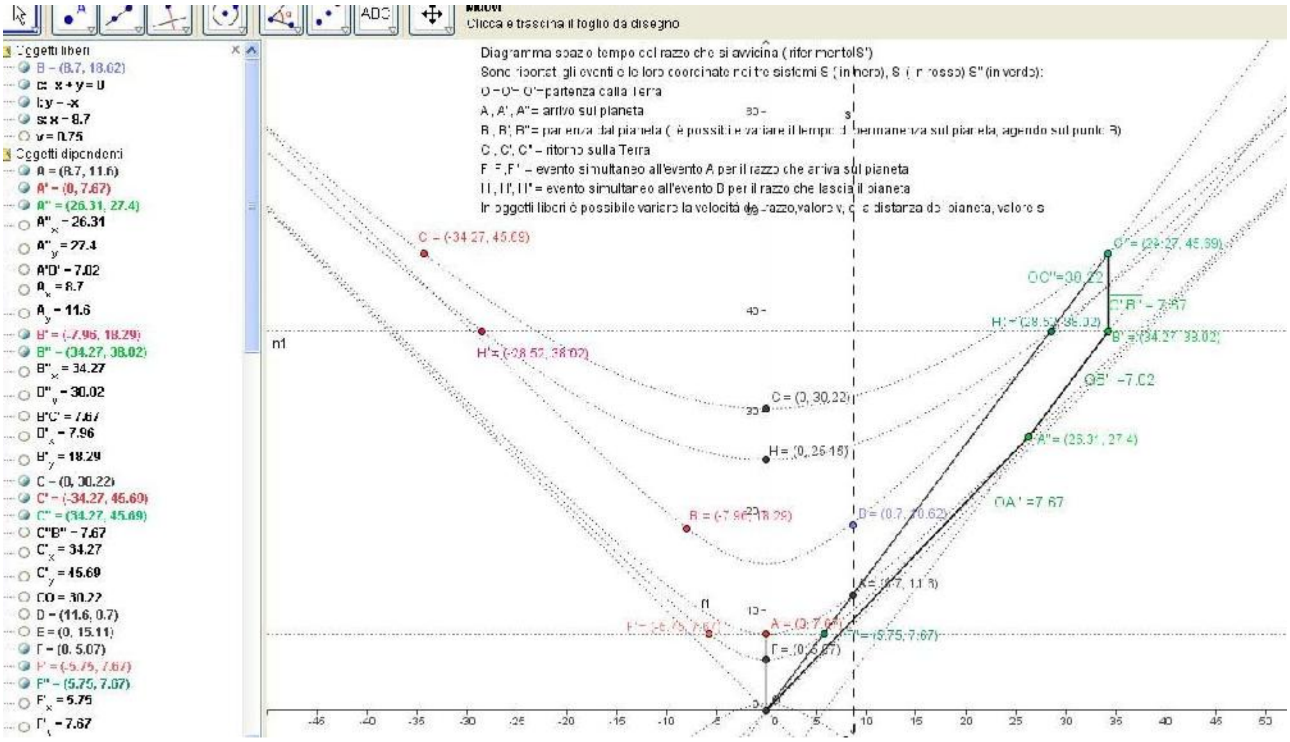
9. Cosa rappresenta la pendenza (rispetto all'asse dei tempi) della retta passante per A'B'?

Alle prime 4 domande tutti gli studenti hanno risposto correttamente; la domanda 5 è stata risolta dalla maggioranza degli studenti algebricamente : solo due studenti hanno individuato che per rispondere bastava considerare l'ascissa del punto F'; Alle domande 6,7,8 ha risposto correttamente il 60% degli studenti, mentre un altro 10% ha risposto parzialmente. Solo tre studenti hanno risposto correttamente alla domanda 9.

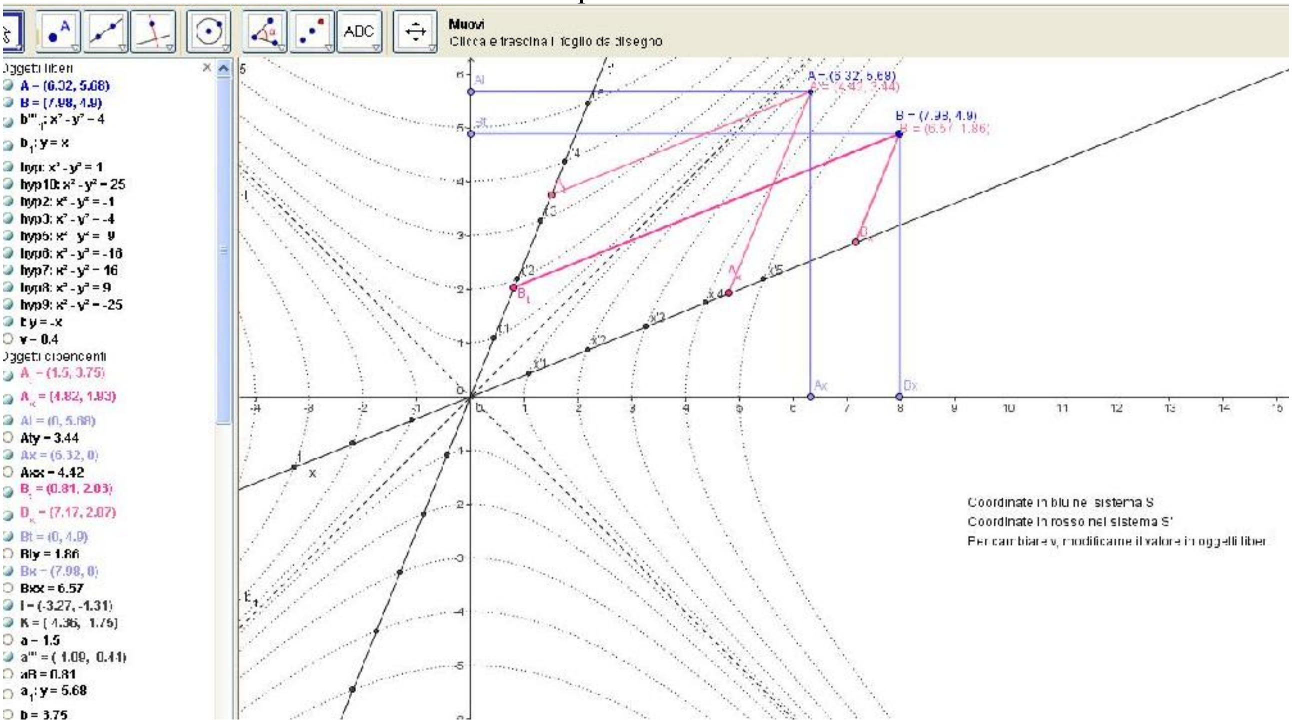
Ad un unico gruppo più interessato e agli studenti del progetto eccellenza è stato assegnato un viaggio più complesso, nel senso che è stato loro dato un viaggio spaziale con sosta (variabile)







Successivamente in laboratorio abbiamo considerato i diagrammi ‘riuniti’ a partire proprio dalle considerazioni che si potevano fare sul diagramma del laboratorio. Si è dunque passati alla costruzione delle coordinate di due eventi rispetto a due sistemi in moto relativo.



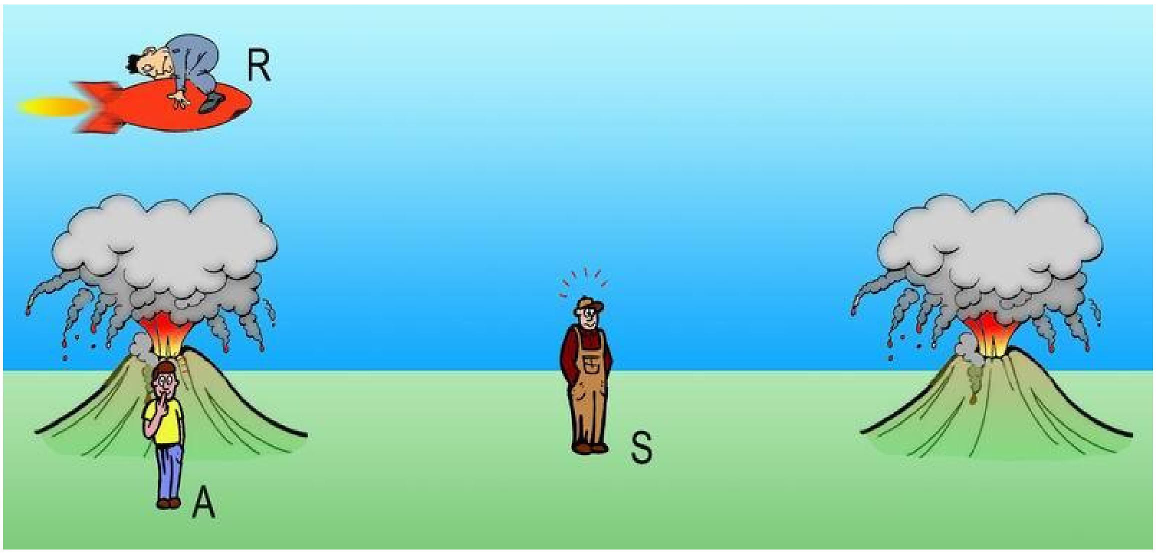
Anche qui è sufficiente cambiare il valore di v in oggetti liberi per ottenere le nuove coordinate: per ottenere i punti si è fatto sempre e solo uso dell'invariante!

Sono stati proposti diversi problemi presi dal Halliday- Resnick-Walker (proposti per usare trasformazioni di Lorentz) e risolti con i diagrammi
Sono poi stati proposti una serie di problemi su : simultaneità di eventi, contrazione lunghezze e dilatazione dei tempi.

Verifica 2 di laboratorio

1. Il problema dei vulcani Scherr et al. (2001).

In questo problema, eventi e moti avvengono lungo la stessa direzione, parallela al terreno. Effetti di non inerzialità sulla superficie della Terra possono essere trascurati.



Il monte Reiner e il monte Hood, che distano 300km in un sistema di riferimento fermo rispetto a loro, improvvisamente emettono un bagliore.
Un sismologo, che si trova fermo in un laboratorio esattamente a metà strada tra i due vulcani, riceve i segnali luminosi dell'eruzione dei due vulcani nello stesso istante.
Un assistente del sismologo si trova fermo in un laboratorio collocato alla base del Mt. Reiner, nell'istante stesso della sua eruzione.
Un'astronave molto veloce sta volando dal Mt. Reiner al Mt. Hood ad una velocità costante pari a 0,8c relativamente al terreno (γ=5/3). Nell'istante in cui il Mt. Reiner erutta, l'astronave si trova sopra questo vulcano e, dunque, il pilota percepisce immediatamente il bagliore dell'eruzione.
Chiamiamo "Evento 1" l'eruzione di Mt. Reiner ed "Evento 2" l'eruzione di Mt. Hood.
Tutti gli osservatori sono in grado di osservare i fenomeni in modo scientificamente rigoroso e cioè sono in grado di valutare il tempo di tutti gli eventi che avvengono nel loro sistema di riferimento. In altre parole ancora, ciascun osservatore possiede orologi sincronizzati con tutti gli osservatori del suo sistema di riferimento.
Dire se per ogni osservatore menzionato (sismologo, assistente del sismologo, pilota dell'astronave) l'Evento 1 avviene prima, dopo o contemporaneamente all'Evento 2 e argomentare *la risposta.*

2. Secondo un osservatore S un evento avviene a x = 3. 10^8 m all'istante t = 2.5 s. L'osservatore S' si sposta in direzione dell'asse x alla velocità v = 0.4 c Quali sono le coordinate dell'evento secondo S'? Quali le coordinate per S' se si sta movendo nella direzione delle x decrescenti alla stessa velocità ?

3. Un sistema inerziale S' si muove rispetto a S alla velocità di 0.6 c Accadono due eventi . Nel sistema S l'evento 1 avviene nell'origine al tempo t =0 e l'evento 2 sull'asse x nel punto x = 3 km nell'istante t = 4 μs. In quali istanti avvengono i due eventi in S'? Spiegate la differenza nell'ordine temporale

4. Un operaio corre con una scala di lunghezza L (nel suo SRI) ed entra in un garage di lunghezza L/2 (nel suo SRI), con porte aperte sul fronte e sul retro che si chiudono un istante quando la scala è all'interno. Se l'operaio corre con velocità v = 0.9c, la contrazione delle lunghezze dovrebbe consentire alla scala di rientrare completamente nel garage durante la chiusura istantanea e simultanea delle porte. Ma se guardiamo le cose da SR della scala, è il garage ad essere contratto e la scala non dovrebbe poter entrare????

5. Date le coordinate di due punti evento nel sistema inerziale di O, cosi definite :

$x_1 = 5 \,.\, 10^9$ m $\qquad$ $t_1 = 50$ s

$x_2 = 1{,}1 \,.\, 10^{10}$ m $\qquad$ $t_2 = 20$ s

- stabilire se può esistere un rapporto causa – effetto tra i due eventi
- dire a che velocità viaggia un osservatore per cui la distanza spaziale tra gli eventi è doppia
- dire se è possibile trovare un osservatore per cui gli eventi siano contemporanei e, in questo caso, stabilire qual è la distanza spaziale tra gli eventi
- dire se è possibile trovare un osservatore per cui gli eventi accadono nello stesso luogo e, in questo caso, dire qual è l'intervallo di tempo tra i due eventi

La verifica è stata fatta in laboratorio, in modo che gli studenti potessero anche utilizzare il programma descritto sopra, ma erano liberi di seguire la strada a loro più congeniale. Il primo problema non è stato svolto da 4 studenti, svolto in modo 'intuitivo' (e ovviamente sbagliato) da altri 4, risolto da tutti gli altri utilizzando i diagrammi, le risposte sono state, però, discretamente argomentate solo da 6 studenti.

L’esercizio 2 non è stato svolto da 2 studenti, è stato affrontato utilizzando le trasformazioni di Lorentz da 10 (di cui 8 in modo corretto), Gli altri hanno utilizzato i diagrammi, ma 6 in modo errato (non hanno reso omogenee le coordinate)
L’esercizio 3 non è stato svolto da 4 studenti, è stato affrontato utilizzando le trasformazioni di Lorentz da 12 (di cui 9 in modo corretto), Gli altri hanno utilizzato i diagrammi, ma 3 in modo errato (non hanno reso omogenee le coordinate)
L’esercizio 4 è stato quello che ha comportato più problemi : 15 studenti non l’hanno svolto, alcuni si sono cimentati, ma con scarso successo, solo 2 studenti hanno intuito il risultato ma senza argomentarlo adeguatamente con i diagrammi
L’esercizio 5 ha avuto gli stessi risultati del 3; gli studenti che hanno dato risposte corrette , hanno risposto in modo adeguato anche alle domande sugli intervalli di tipo spazio e di tipo tempo

Esercitazioe3_Dinamica

Esercizi svolti e discussi in classe

Tali esercizi sono stati per lo più presi dal Taylor-Wheeler e dal* Q16 *di Fabri

1. 1 kg di carbonio, bruciando completamente, sviluppa un'energia , sotto forma di calore, di 9,2.106J, secondo una reazione

   $C + O_2 \rightarrow CO_2$

   Quanto vale la differenza tra la massa di CO_2 e la massa dei componenti prima della reazione ?

2. L'energia luminosa proveniente dal Sole penetra negli strati più elevati dell'atmosfera terrestre con un intensità di 1372 watt per ogni metro quadrato di area disposta in direzione perpendicolare a quella della radiazione incidente. Il valore 1372 W/m^2 prende il nome di **costante solare.** Calcolate la frazione di massa persa dal Sole in un miliardo di anni, supponendo che questa perdita sia dovuta solo all'emissione di radiazione e che la luminosità del Sole si mantenga costante al valore attuale. (distanza Terra-Sole $d_S=1{,}5.10^{11}$, massa del Sole $M_{¤}=2.10^{30}$ kg) Perché diminuisce la massa del Sole?

3. Sulla base dei valori trovati, mostra che l'origine dell'energia solare non può essere chimica (ammetti che l'intensità della radiazione sia costante nel tempo e che il sistema solare abbia 10^{10}y)

4. Il Sole irraggia energia con una potenza di 4.10^{26} W da alcuni miliardi di anni. L'energia deriva dalla fusione termonucleare di nuclei di idrogeno che si trasformano in nuclei di elio (ciclo p-p), che consiste nella combinazione di 4 protoni e due elettroni, che si può sintetizzare

   $4\,{}^{1}H + 2e^{-} \rightarrow {}^{4}He + 2\nu + 6\gamma$

   Stabilire l'energia liberata dalla reazione e il ritmo R di consumo dell'idrogeno (compatibile con l'età del Sole)

5. *Pressione di radiazione*
   a. Dirigete sul palmo della vostra mano il fascio di una torcia elettrica da un watt. Sentite qualcosa? Calcolate la forza totale esercitata sulla vostra mano da questo fascio.
   b. Calcolate la pressione della luce solare su un satellite della Terra (tenendo presente il valore della costante solare)

   Considerate sia il caso di superfici riflettenti sia quello di superfici assorbenti, e anche quello di superfici reali (che assorbono parte della radiazione incidente)

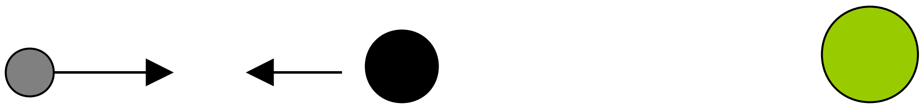
   c. Un satellite sferico in orbita attorno alla Terra ha raggio 1 m e massa 1000 kg. Supponete che assorba tutta la luce solare che vi incide sopra. Qual è il rapporto tra l'accelerazione del satellite dovuta alla luce solare e l'accelerazione gravitazionale g sulla superficie della Terra?
   d.

6. Nel sistema del laboratorio viene osservato il decadimento in figura. Supponiamo di conoscere $m_A= 20$ unità, $m_C = 2$ unità e $E_C = 5$ unità

A in quiete C D

a) Quanto vale l'energia totale E_A della particella A?
b) Dalla conservazione dell'energia trovate l'energia totale della particella E_D
c) Trovate la quantità di moto della particella C
d) Dalla conservazione della quantità di moto trovate la quantità di moto della particella D
e) La somma $m_C + m_D$ delle masse delle particelle dopo il decadimento è uguale alla massa m_A?

7. Nel sistema di riferimento del laboratorio viene osservato l'urto anelastico, illustrato
Supponiamo di conoscere m_A= 2 unità, E_A= 6 unità, m_C = 15 unità



A B C in quiete

a. Quanto vale l'energia totale E_B della particella B?
b. Qual è la quantità di moto p_A della particella A ? Qual è, quindi, la quantità di moto p_B della particella B?
c. Trovate la massa m_B della particella B
d. Indovinate velocemente : la massa della particella C dopo l'urto è uguale, maggiore o minore della somma delle masse delle particelle A e B prima dell'urto? Verificatelo

8. Un litro d'acqua ha massa circa 1 kg. Se evapora (a temperatura costante) la sua massa cambia? Quanto? Perché? (Assegnato successivamente)

9. Un protone si muove sotto l'effetto di una forza centripeta la cui espressione è F = kv, con v velocità periferica del protone e $k = 10^{-16}$ Ns/m. L'energia cinetica del protone vale 1000MeV. Usando sia formule classiche che relativistiche, determinare la quantità di moto del protone e il raggio della sua orbita. ($1\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J)

10. Un positone di massa m ed energia totale pari a 2m colpisce un elettrone fermo, generando due fotoni ad alta energia. Uno di questi entra in un rilevatore situato a 90° rispetto alla direzione del positone incidente. Quali sono le energie dei due fotoni e qual è la direzione del moto del secondo ?

11. Un protone di massa m ed energia totale pari a 6 m colpisce un protone fermo. I due protoni subiscono un urto elastico simmetrico e le particelle uscenti si muovono in direzioni che formano un angolo θ rispetto alla direzione originaria. Determina p, E di ogni particella e θ ($m_p \cong 2 \cdot 10^{-27}$ kg)

12. Lo spostamento Doppler di una radiazione da 5000 Å (1 Å = 10^{-10} m) emessa da una stella è di 10 Å. Determinare la velocità della stella (Assegnato successivamente)

13. Un agente della polizia stradale dirige un trasmettitore di segnali, fissato alla propria autovettura, in direzione dell'autostrada verso i veicoli che viaggiano nella stessa corsia. Un veicolo che sta davanti all'auto della polizia ha un rivelatore di segnali e un calcolatore interno che analizza la variazione di frequenza tra il segnale lanciato dall'agente e quello ricevuto.

Analizzate questa variazione di frequenza, supponendo che i segnali si muovano lungo una retta parallela all'autostrada- Il segnale può essere un'onda sonora(caso in cui non ci sia vento) o luce.

VERIFICA

1. Dopo aver dato la definizione relativistica di quantità di moto e di energia, esprimi il principio di conservazione energia-quantità di moto

2. Una particella di massa m si muove alla velocità 0.6c. La sua energia cinetica risulta

    a. $0.18mc^2$
    b. $0.22\ mc^2$
    c. $0.25\ mc^2$
    d. mc^2
    e. $1.25\ mc^2$

3. Un elettrone ha una velocità di 0.95c La sua quantità di moto è :
    a. $2.6 \bullet 10^{-22}$ kg.m/s
    b. $2.9 \bullet 10^{-22}$ kg.m/s
    c. $6.0 \bullet 10^{-22}$ kg.m/s
    d. $8.3 \bullet 10^{-22}$ kg.m/s
    e. $8.8 \bullet 10^{-22}$ kg.m/s

4. Se la massa di una particella è zero, la sua velocità deve essere
    a. c
    b. Infinita
    c. Zero
    d. Qualsiasi velocità minore di c
    e. Qualsiasi velocità maggiore di c

5. Un elettrone ha una quantità di moto di $4.0 \bullet 10^{-13}$ kg.m/s La sua energia cinetica è :
    a. $6.3 \bullet 10^{-14}$ J
    b. $8.2 \bullet 10^{-14}$ J
    c. $1.2 \bullet 10^{-13}$ J
    d. $1.5 \bullet 10^{-13}$ J
    e. $2.2 \bullet 10^{-13}$ J

6. L'energia cinetica di una particella è 3 volte la sua energia a riposo. Qual è la velocità della particella?

7. La prima esplosione nucleare ha sviluppato un'energia di circa $1.0 \bullet 10^{14}$ J. Quanta materia si è trasformata in energia per ottenere questo risultato?

8. Il mesone K_0 è una particella instabile con una massa pari a 974 m_e ($m_e = 9.11 \bullet 10^{-29}$kg) . Può decadere in un due pioni, di carica opposta

    $K_0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$

ognuno dei quali ha una massa complessiva di 273 m_e. Determina la velocità di ognuno dei due pioni, supponendo che questi si dividano l'energia cinetica. Tale velocità è relativistica ?

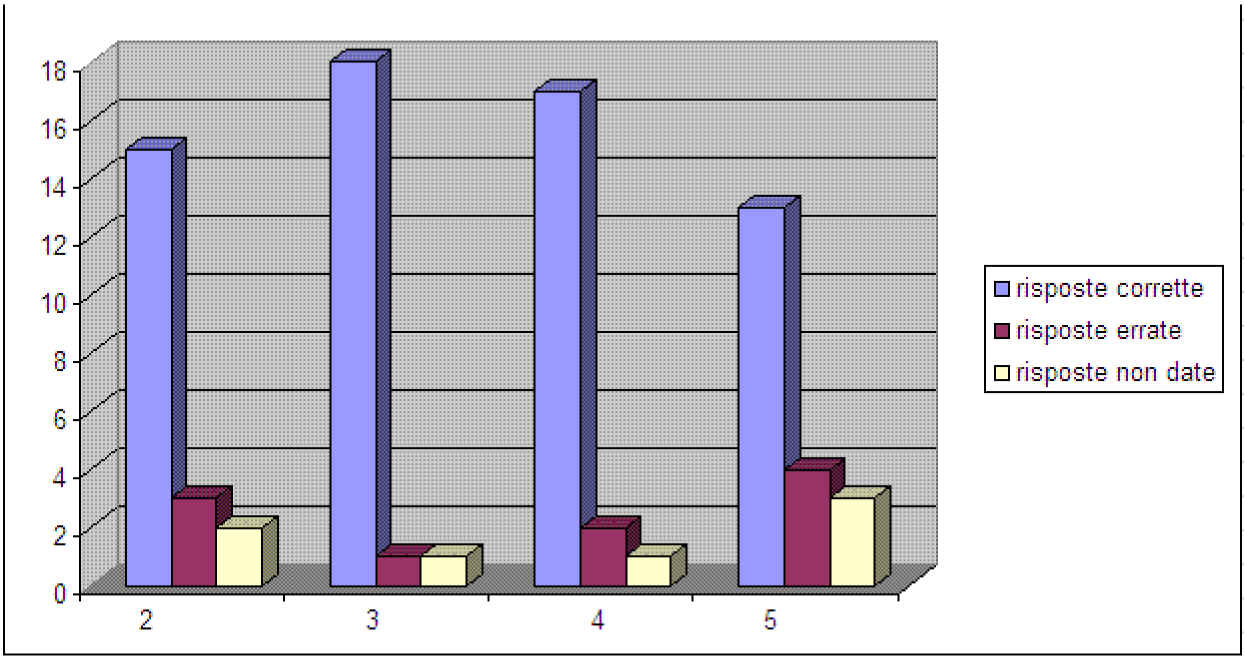
9. Un corpo di massa m passa dalla velocità 0,6 c alla velocità 0,9 c. Determinare il lavoro che si deve compiere per produrre questo incremento della velocità, utilizzando formule classiche e relativistiche.

10. Due corpi possiedono uguale massa m. Uno di questi si muove con velocità v = 0,6 c e va ad urtare l'altro, inizialmente fermo. L'urto è perfettamente anelastico. Determinare la massa M del corpo che si forma nell'urto in funzione di m e calcolarla nel caso specifico in cui m = 10^{-20} kg. Valuta inoltre la velocità di M

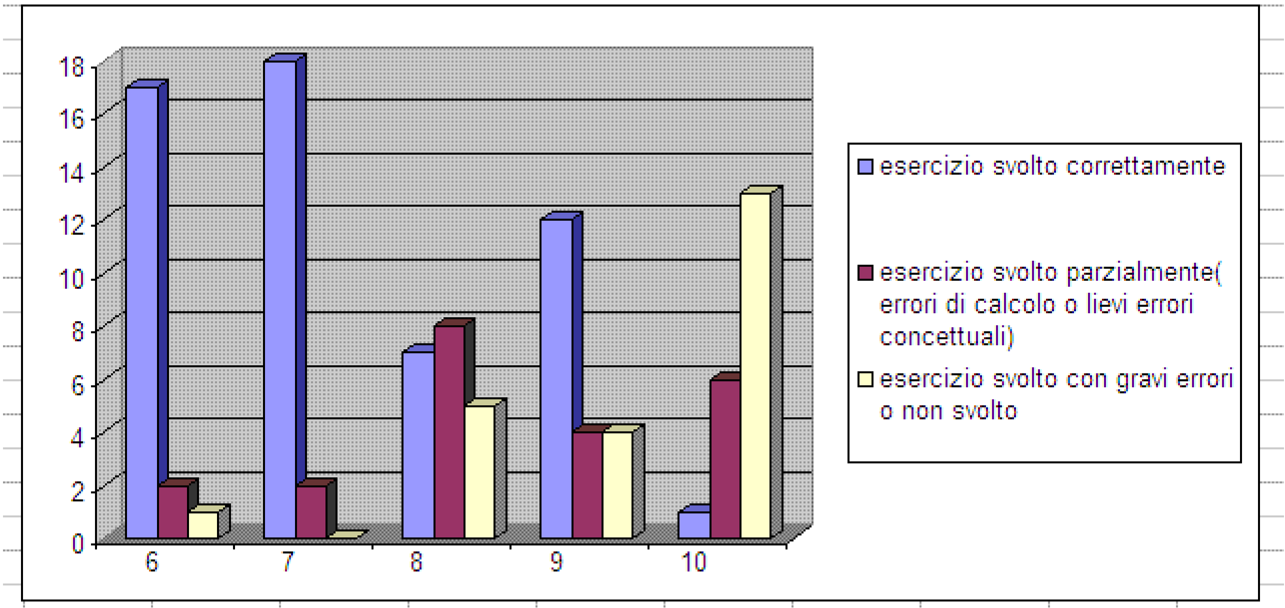
RISULTATI (20 studenti presenti su 22)

1. Alla prima domanda hanno risposto in modo esauriente 2 studenti, discretamente 3, in modo sufficiente 9 e mediocre/insufficiente 6

2. risultati dei 4 quesiti a risposta multipla



3. Risultati sulla risoluzione di esercizi-problemi



Si osserva che i risultati sono soddisfacenti sulla risoluzione di esercizi, mentre si rilevano difficoltà nell'affrontare problemi più articolati.

<u>Esercitazione4 : Relatività generale</u>

Esercizi svolti e discussi (parzialmente in terza)

Tali esercizi sono stati per lo più presi dal Taylor-Wheeler e dal Q16 di Fabri

1. In un ascensore in caduta libera, si può sapere se si è in un sistema inerziale avendo a disposizione tutto quello che si vuole?
2. Una persona è all'interno di un ascensore che viene sparato verso l'alto da un cannone. Considera l'ascensore dopo che esso è uscito dal cannone e mentre si sta muovendo liberamente nel campo gravitazionale della Terra. Trascura la resistenza dell'aria. Mentre l'ascensore si sta ancora muovendo verso l'alto, la persona che è all'interno salta sul pavimento. Cosa gli succederà?
   a) Ricadrà sul pavimento dell'ascensore
   b) Colpirà il soffitto
   c) Succederà qualcosa di diverso (in questo caso, cosa?)

   La persona non salta più fino a quando l'ascensore non è passato oltre il punto più elevato della sua traiettoria e non ha iniziato a cadere verso la Terra. La tua risposta alla domanda precedente sarebbe in questo caso diversa?
   Come fa la persona all'interno dell'ascensore a riconoscere il momento in cui esso raggiunge il punto più alto della sua traiettoria?
3. Siete lanciati verso l'alto in un vagone ferroviario disposto orizzontalmente rispetto alla superficie terrestre. Dopo il lancio, ma mentre il vagone sta salendo, lasciate andare due sferette ai due estremi del treno e a riposo rispetto ad esso.

   a. Viaggiando nel vagone osserverete che la distanza tra le sfere aumenterà o diminuirà al trascorrere del tempo?

   b. Se siete in un secondo vagone lanciato verso l'alto con un'orientazione verticale rispetto alla superficie terrestre e ripetete l'esperimento, la distanza tra le sfere aumenterà o diminuirà al trascorrere del tempo?

   c. In entrambi i casi siete in grado di distinguere se il vagone sta salendo o scendendo rispetto alla superficie terrestre, osservando solo le sferette

4. Anna prende l'ascensore. Ha in mano una molla. Alla molla ha attaccato un pesetto. La molla non oscilla, è in equilibrio. L'ascensore cade in caduta libera. Cosa fa la molla? E se Anna avesse in mano un pendolo in oscillazione ?

5. Anna decide di lanciarsi in paracadute da un aereo a 5000 metri di quota con una vaschetta che contiene una pallina da ping pong sospesa al centro del liquido con un pesetto (è in equilibrio, inizialmente). Ad un certo punto apre il paracadute… Potete descrivere esattamente cosa fa la pallina nelle varie fasi?

6. Nel solito ascensore c'è un barometro a mercurio consistente in una bacinella con del mercurio e un tubicino rovesciato dentro la bacinella. L'altezza del mercurio è di 790 mm. Che fa il mercurio dentro il tubicino, se l'ascensore cade improvvisamente in caduta libera. ?

7. Marco, in caduta libera con l'ascensore, tiene in mano tre tonnellate di piombo con grande facilità. Se volesse spingere le tre tonnellate di piombo da un angolo dell'ascensore all'altro ci riuscirebbe facilmente o no?

8. Anna è su un treno che si muove di moto rettilineo uniforme e tiene in mano un pendolino che fa oscillare. Se il treno incomincia a frenare con una decelerazione costante. Anna, fissando il pendolino, può accorgersene della frenata? Che succede al moto del pendolo, al periodo ecc. ecc.?
9. Provate a descrivere una cena in un sistema in volo libero e in un riferimento nello spazio vuoto (sarebbe possibile, per es., farla a lume di candela ?)

Problemi

1. Molti esperimenti che coinvolgono particelle ad alta velocità sono effettuati in laboratori terrestri , che non sono il caduta libera, ma in molti casi possono soddisfare le condizioni richieste per un per un sistema in volo libero.
    a. In un laboratorio terrestre una particelle di velocità v = 0,96 attraversa una camera a scintilla cubica larga 1 m. Quanto è lungo l'intervallo di tempo (del laboratorio) impiegato dalla particella per attraversare la camera? Quindi per quanto tempo questo esperimento è 'in corso'.? Durante questo tempo di quanto cadrà una diversa particella di prova che parte da ferma? Confrontare il risultato con il diametro di un nucleo atomico
    b. Quanto può essere grande una camera a scintilla per essere considerata un sistema in volo libero per questo esperimento, nell'ipotesi che si è in grado di rilevare una variazione della posizione della particella di prova di $5 . 10^{-7}$m?

2. Consideriamo due sferette che distano tra loro 20 m nella direzione orizzontale Dimostrate che quando vengono lasciate libere di muoversi partendo rispetto alla Terra dalla quiete le due sferette si avvicinano di 1mm quando cadono di 315m

3. Consideriamo ora il vagone del problema due disposto verticalmente e supponiamo che venga lasciato cadere partendo da fermo con l'estremità inferiore posta inizialmente a 315 m dal suolo. Lasciate ancora libere di muoversi due sferette poste ai due estremi del vagone . In questo caso, nel tempo di caduta (circa 8s), le sferette si allontanano tra di loro della distanza di 2 mm a causa della differenza dell'attrazione gravitazionale che è maggiore su quella più vicina alla Terra. Questo valore è il doppio della variazione che si ha nel caso di separazione orizzontale tra le sferette Dimostratelo
4.

5. Risolvere l'esercizio 8, nell'ipotesi che il periodo del pendolo sia di 1s, quando il treno è fermo, e che il treno deceleri con un'accelerazione di modulo 1m/s^2 a partire da una velocità iniziale di 100 km/h

6. Valuta il peso di una persona di massa 55 kg quando si trova in cima e nel punto più basso di una ruota panoramica, sapendo che il raggio della ruota è di 7,2 m e che compie un giro completo in 28s

APPENDICE3
Approfondimento1

Rappresentazione Geometrica delle Trasformazioni di Galileo [29]

" Consideriamo la trasformazione classica

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

riscrivendola nella forma:

$$\begin{cases} x'^0 = x^0 \\ x'^1 = -\beta x^0 + x^1 \end{cases} \quad (1.a)$$

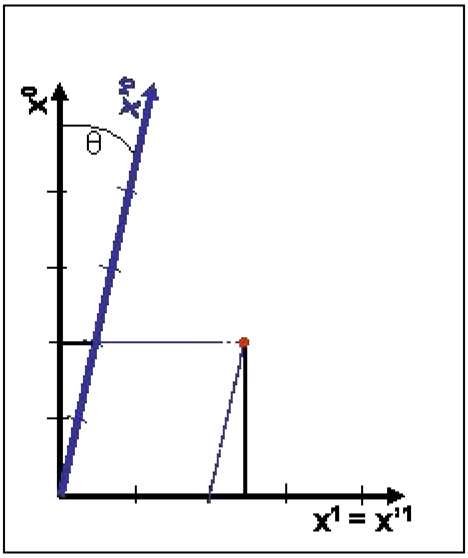
(dove $x^0 = ct$, $x^1 = x$ e $\beta = u/c$), si vede che ad essa è associata la matrice di trasformazione

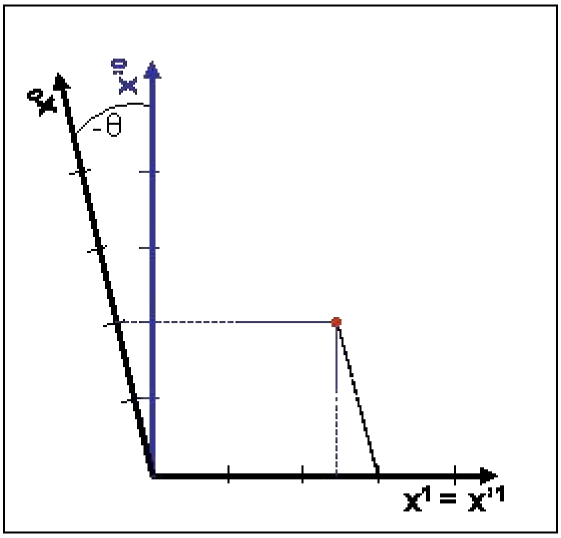
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$$

Si vuole rappresentare questa trasformazione nello spaziotempo classico, ossia in un piano x^1x^0
Detta **O'** l'origine di SR', essa risulterà in quiete rispetto ad SR' (cioè: $(x'_{O'})^1 = 0$) ed in moto rispetto ad SR, essendo la sua equazione del moto in SR data da: $(x_{O'})^1 = \beta x^0$. D'altra parte nello spaziotempo il luogo dei punti in cui l'origine di un sistema di riferimento è in quiete rappresenta l'asse dei tempi di questo sistema, per cui la retta di equazione $x^1 = \beta x^0$ rappresenta in SR l'asse dei tempi di SR'.

Invertendo la matrice di trasformazione otteniamo: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$, che differisce da A solo per il segno di β. Ciò esprime il fatto (detto Lemma di Reciprocità) che *se SR vede SR' muoversi con velocità **u**, allora SR' vede SR muoversi con velocità –**u***.

La situazione è schematizzata nelle figure seguenti:





Va notato quanto segue:

- É evidente l'asimmetria fra spazio e tempo.
- Gli assi di SR' non sono più ortogonali, e l'asse x'^0 è inclinato rispetto a x^0 di un angolo $\theta = \arctan \beta$;
- Le unità di misura temporali sono differenti;
- L'assunzione del tempo assoluto si traduce nell'invarianza dell'asse spaziale (infatti la coordinata temporale si ottiene tracciando la proiezione parallela all'asse spaziale);
- L'invarianza dell'asse spaziale (e quindi di tutte le sue parallele) unitamente alla differenza delle unità di misura, comporta che la relazione di simultaneità sia assoluta, così come lo è il tempo (infatti gli eventi simultanei giacciono tutti su una retta parallela all'asse dei tempi, ed hanno quindi la stessa ordinata in entrambi i sistemi di riferimento).

Composizione delle Velocità (Classica)

Consideriamo ora un sistema di riferimento SR solidale con il laboratorio, un altro sistema di riferimento SR_1 in moto con velocità di trascinamento β_1 rispetto ad SR ed una particella in moto con velocità β_2 rispetto ad SR_1. Volendo determinare la velocità β_3 della particella rispetto al sistema del laboratorio, è sufficiente considerare un sistema di riferimento SR_2 solidale con la particella e considerare che la trasformazione $SR \rightarrow SR_2$ è data dalla composizione delle due trasformazioni $SR \rightarrow SR_1$ e $SR_1 \rightarrow SR_2$, e quindi la matrice A_3 sarà il prodotto delle matrici A_1 e A_2: $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\beta_1 + \beta_2) & 1 \end{pmatrix}$ Questo risultato ci dice che il prodotto di due GT è ancora una GT, con velocità, rispetto al SR di partenza, data da:"

(1-b) $$\beta_3 = \beta_1 + \beta_2$$

(questa formula coincide ovviamente con la **v = v' + u**, già ricavata in modo più elementare durante la lezione).

Da notare che qui compare il problema centrale affrontato da Minkowski che è infatti quello di risolvere la disomogeneità esistente tra i due gruppi di trasformazioni che conservano la forma delle equazioni differenziali della meccanica classica: il gruppo delle rotazioni spaziali e quello delle trasformazioni di Galileo. Minkowski legge in questi due gruppi di trasformazioni profonde differenze in quanto:
- nel primo gruppo vede espresse le proprietà di omogeneità ed isotropia dello *spazio*, proprietà a cui viene attribuito significato *geometrico*;
- nel secondo gruppo vede espresse le caratteristiche del *tempo* classico (l'esistenza di una simultaneità assoluta e la libertà del tempo di assumere una qualunque direzione rispetto agli assi spaziali), nonché l'assunto *fisico* che non esista alcun fenomeno che ci permetta di distinguere tra sistemi di riferimento inerziali

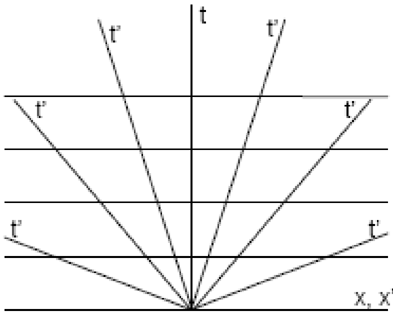


Fig. 7 – Lo spaziotempo classico

Approfondimento2

Rappresentazione Geometrica delle Trasformazioni Relativistiche

2.1 Trasformazioni di Lorentz

Ricaviamo innanzitutto tali trasformazioni a partire dai due postulati di Einstein. Tali trasformazioni devono costituire un gruppo (gruppo di Poincarè o gruppo di Lorentz inomogeneo) Si deve trattare di un gruppo per il principio di relatività. Infatti sia S l'insieme dei riferimenti K, K',---inerziali

Sia f la trasformazione che connette K e K' . : $x' = f(x)$

Sia g la trasformazione che connette K_1 e K_1' : $x_1' = g(x_1)$

Sia G l'insieme delle trasformazioni f, g ….Allora anche gf $\in$ G Infatti per il principio di relatività $\exists$ un riferimento K'' che è nella stessa relazione con K' con cui K_1' si trova con K_1. Allora $x_1' = g(x_1) \Rightarrow x'' = g(x')=g(f(x))= (gf)(x)$ La trasformazione da K a K'' allora è gf, per cui G è chiuso rispetto alla composizione; contiene l'elemento neutro, l'identità, deve contenere f^{-1} che fa passare da K'' a K, quindi è un gruppo

Dobbiamo allora trovare il gruppo di trasformazioni $R^4 \rightarrow R^4$, invertibili, biunivoche, tali da conservare c (che qui assumiamo =1)

Sia K un riferimento inerziale; x^μ sono le 4 componenti; $\eta_{\mu\nu}$ la matrice diagonale

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sia x^μ un evento e $x^\mu + dx^\mu$ un altro evento infinitamente vicino Definiamo

$d\tau^2 = - \eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = (dx^0)^2 - \Sigma_i((dx^i)^2$ quadrato dell'intervallo tra due eventi

Se $d\tau^2 = 0$ ho $\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dx^i}{dx^0}\right)^2 = 1$ e gli eventi x^μ e $x^\mu + dx^\mu$ sono sulla traiettoria di un fotone.

Poiché anche rispetto a K' la velocità della luce è 1, avremo $d\tau'^2 = - \eta_{\mu\nu}\, dx'^\mu\, dx'^\nu = 0$ come conseguenza dell'invarianza della velocità della luce.Allora per la totalità degli eventi in cui $d\tau^2 = 0$ in K deve essere $d\tau'^2 = 0$ in K' e viceversa, cioè $d\tau^2 = 0 \Leftrightarrow d\tau'^2 = 0$ (2.1)

Sia poi $x'^\mu = f^\mu(x^\lambda)$ Vediamo cosa implica l'ipotesi (2.1)

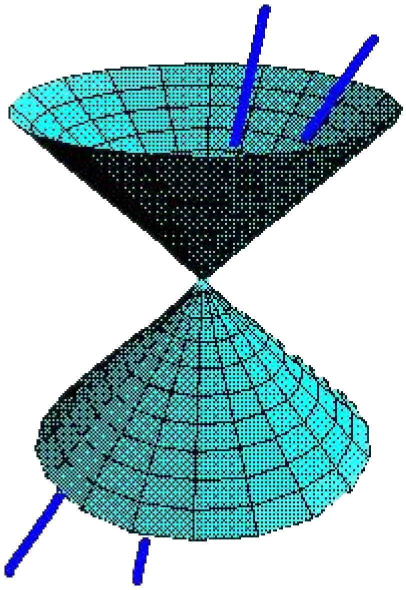
$$d\tau'^2 = -\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = -\eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} dx^\rho\, dx^\sigma = -\tilde{\eta}_{\rho\sigma}\, dx^\rho\, dx^\sigma$$

Noi vogliamo che $-\eta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = 0 \Leftrightarrow -\tilde{\eta}_{\rho\sigma}\, dx^\rho\, dx^\sigma = 0$

Quest'ultima condizone si può anche scrivere

$\eta_{\mu\nu}\, y^\mu\, y^\nu = 0 \Leftrightarrow \tilde{\eta}_{\mu\nu}\, y^\mu\, y^\nu = 0$ (2.2)

che è l'equazione di un ipercono, detto cono-luce



Tutti e soli i punti del cono soddisfano l'equazione (2.1), ma gli stessi punti devono soddisfare l'equazione (2.2) che deve essere l'equazione dello stesso cono, ma questo è possibile solo se $\tilde{\eta}_{\mu\nu} = \lambda(K,K',x)\eta_{\mu\nu}$ cioè le due matrici devono essere proporzionali

Consideriamo ora due eventi per cui $d\tau^2 \neq 0$, allora

$d\tau'^2 = -\tilde{\eta}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -\lambda(K,K',x)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \lambda(K,K',x)d\tau^2$

Vogliamo mostrare che $\lambda(K, K',x) = 1$

Per *l'omogeneità dello spazio-tempo* λ non può dipendere da x

Una volta fissato K, il riferimento K' è univocamente determinato dalla funzione $f : K \to K'$, ma *per il principio di relatività* λ non può dipendere da K, altrimenti ogni K avrebbe il suo λ, dunque $\lambda=\lambda(f)$

Considero i riferimenti K e K', un riferimento K_1 ruotato rispetto a K secondo una rotazione r e un riferimento K_1' ruotato rispetto a K' secondo una rotazione r' Allora $g : K_1 \to K_1'$ è $g = r' f r^{-1}$ D'altra parte $\lambda(r' f r^{-1}) = \lambda(f)$ per *l'isotropia dello spazio.* Ora applichiamo $(r' f r^{-1})$ a K, andando in un riferimento K'' diverso da K'. K'' e K' non sono in quiete relativa Chiamo $h : K' \to K''$ Si ha

$d\tau''^2 = \lambda(r' f r^{-1})\, d\tau^2 = \lambda(f)\, d\tau^2$

$d\tau''^2 = \lambda(h)\, d\tau'^2 = \lambda(h)\lambda(f)\, d\tau^2 \Rightarrow \lambda(f) = \lambda(f)\lambda(h) \Rightarrow \lambda(h) = 1$

Variando f,r,r' anche h varia su tutte le possibili trasformazioni; allora, per ogni x, K, K' si ha

$d\tau^2 = d\tau'^2$ o anche $\eta_{\mu\nu} = \tilde{\eta}_{\mu\nu}$ cioè

$$\eta_{\gamma\delta} = \tilde{\eta}_{\gamma\delta} = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta}dx^\rho dx^\sigma \qquad (2.3)$$

Voglio far vedere che l'insieme delle trasformxioni cercato è un insieme di trasformazioni lineari omogenee. Per farlo derivo l'equazione precedente rispetto a x^ε, tenendo presente che $\eta_{\alpha\beta}$ è una costante. Ottengo

$$0 = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\varepsilon \partial x^\gamma}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} + \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\varepsilon \partial x^\delta} \qquad (a)$$

Scambio γ con ε

$$0 = \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\gamma \partial x^\varepsilon}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\delta} + \eta_{\alpha\beta}\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\varepsilon}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\gamma \partial x^\delta} \qquad (b)$$

Scambio δ con ε

$$0 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\delta}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\varepsilon}} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}\partial x^{\varepsilon}} \qquad (c)$$

Sommo (a) e (b) e sottraggo (c)

$$0 = \eta_{\alpha\beta} \left[\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\varepsilon}\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\varepsilon}\partial x^{\delta}} + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\varepsilon}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} + \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\varepsilon}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\delta}} - \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\delta}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\varepsilon}} - \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}\partial x^{\varepsilon}} \right]$$

$$= 2\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\varepsilon}\partial x^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}}$$

Le semplificazioni sono lecite perché $\eta_{\alpha\beta}$ è simmetrica e si possono invertire gli indici. Moltiplico per l'inversa

$$0 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\varepsilon}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\delta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\varepsilon}} \delta^{\beta}_{\lambda} = \eta_{\alpha\lambda} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\varepsilon}} = \textit{moltiplico per la matrice } \eta^{-1}$$

$$= \eta^{\lambda\mu}\eta_{\alpha\lambda} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\varepsilon}} = \delta^{\mu}_{\alpha} \frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\varepsilon}}$$

In conclusione

$$\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\varepsilon}} = 0$$

Tutte le derivate seconde sono nulle, dunque le coordinate primate sono funzioni lineari omogenee delle coordinate non primate. Perciò

$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$

con $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ matrice 4x4 costante : lo jacobiano della trasformazione

La condizione (2.3) si riscriverà

$\eta_{\gamma\delta} = \eta_{\alpha\beta}\Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\Lambda^{\beta}{}_{\delta}$ o $\Lambda^T\eta\Lambda = \eta$

Le trasformazioni del tipo

$$\begin{cases} x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \\ \Lambda^T\eta\Lambda = \eta \end{cases}$$

formano il gruppo di Poincarè P. Se $a^{\mu}=0$ formano il gruppo di Lorentz (in questo caso gli orologi sono in fase all'istante 0 di K e le origini coincidono)

Ricaviamo una parametrizzazione esplicita delle trasformazioni di Lorentz $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$

Le riscrivo come

$$\begin{cases} x'^{i} = \Lambda^{i}{}_{k} x^{k} + \Lambda^{i}{}_{o} x^{0} \\ x'^{0} = \Lambda^{0}{}_{k} x^{k} + \Lambda^{0}{}_{o} x^{0} \end{cases}$$

Considero un punto materiale in quiete rispetto a K, allora

$$\begin{cases} dx'^{i} = \Lambda^{i}{}_{k} d x^{k} + \Lambda^{i}{}_{o} dx^{0} = \Lambda^{i}{}_{o} dx^{0} \\ dx'^{0} = \Lambda^{0}{}_{k} dx^{k} + \Lambda^{0}{}_{0} dx^{0} = \Lambda^{0}{}_{0} dx^{0} \end{cases}$$

Dividendo si ha $\dfrac{dx^{i}}{dx^{0}} = \dfrac{\Lambda^{i}{}_{0}}{\Lambda^{0}{}_{0}}$

Ma dx^{i} / dx^{0} sono le componenti della velocità del punto in K': Poiché il punto è in quiete in K sono anche le componenti della velocità di K rispetto a K' : le indichiamo con v^{i} Per cui

$(\Lambda^{0}{}_{0})^2 = 1 + \Sigma_i(\Lambda^{i}{}_{0})^2 = 1 + (\Lambda^{0}{}_{0})^2\, \Sigma_i(\Lambda^{i}{}_{0})^2/ (\Lambda^{0}{}_{0})^2 = 1 + (\Lambda^{0}{}_{0})^2\, v^2$

da cui

$(\Lambda^{0}{}_{0})^2 (1 - v^2) =1$

Considerando il gruppo di Lorentz proprio, per cui $\Lambda^{0}{}_{0} \geq 0$

$\Lambda^{0}{}_{0} = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma$ e

$$\Lambda^{i}{}_{0} = v^{i}\Lambda^{0}{}_{0} = \frac{v^{i}}{\sqrt{1-v^{2}}} = \gamma v^{i}$$

$$\Lambda^{1}{}_{k} = \delta^{i}{}_{k} + v^{i}v_{k}\,\frac{\gamma-1}{v^{2}}$$

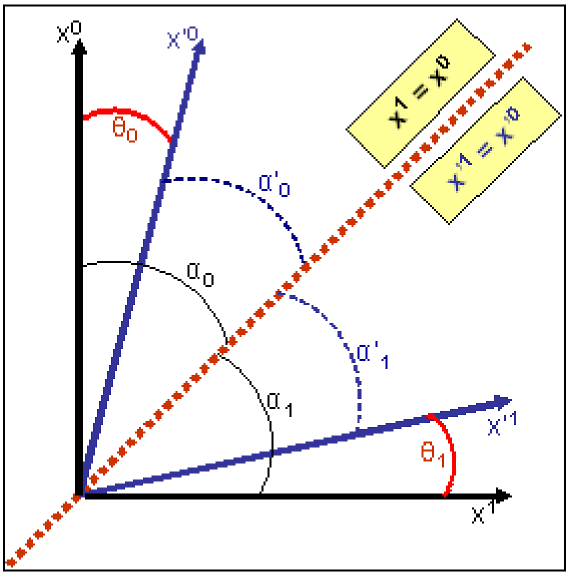
Abbiamo dunque le formule cercate (Trasformazioni di Lorentz LT).
Scritte, reintroducendo c,

$$\begin{cases} x'^{0} = \gamma(x^{0} - \beta x^{1}) \\ x'^{1} = \gamma(-\beta x^{0} + x^{1}) \end{cases}$$

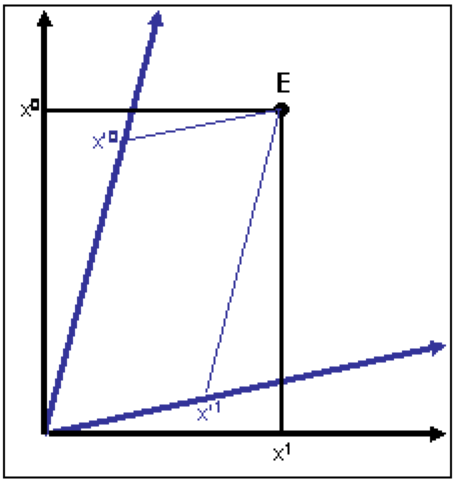
Ovviamente agli studenti sono state ricavate nel modo descritto nella tesi, dato che non hanno mai trattato le matrici

Vediamo geometricamente. Cominciamo col considerare l'equazione del moto di un fotone in K: essa è rappresentata dalla retta R di equazione: $x^1 = x^0$; geometricamente abbiamo che, detti rispettivamente α_0 ed α_1 gli angoli fra tale retta e gli assi x^0 ed x^1, deve risultare $\alpha_0 = \alpha_1$.

L'invarianza di c si traduce nella condizione che anche in K' l'equazione del moto dell'impulso debba essere del tipo: $x'^1 = x'^0$, quindi anche K' si dovrà avere $\alpha'_0 = \alpha'_1$, ovvero – in termini delle inclinazioni degli assi di K' rispetto a quelli di K – si dovrà avere: $\theta_1 = \theta_0$.



É evidente la completa simmetria che viene ora ad esistere fra spazio e tempo: in entrambi i sistemi di riferimento l'asse spaziale e quello temporale sono simmetrici rispetto alla retta che esprime l'equazione del moto di un fotone (la bisettrice), e l'invarianza della bisettrice assicura l'invarianza di c.



Il procedimento per utilizzare i diagrammi spaziotemporali può essere così riassunto:

a) si traccia una coppia di assi ortogonali (K);
b) si disegnano sul piano x^0x^1 i punti relativi agli eventi da analizzare, utilizzando le consuete proiezioni ortogonali;
c) si traccia una seconda coppia di assi (K') inclinata rispetto ai precedenti di un angolo $\beta = v/c$ e simmetrici rispetto alla bisettrice del primo quadrante;
d) le coordinate spaziotemporali degli eventi in esame vengono ottenute tracciando le parallele agli assi di K' (e tenendo conto del coefficiente γ).

Particolare rilevanza assumono le rette parallele agli assi spaziali (x^0 = cost e x'^0 = cost), in quanto esse rappresentano il luogo degli eventi simultanei nei rispettivi SR. Anticipando un punto che esamineremo più in dettaglio in seguito, possiamo già affermare che l'inclinazione relativa dei due assi spaziali fa sì che gli eventi simultanei in un sistema di riferimento non lo siano più nell'altro.

Il Coefficiente γ

Sviluppando γ in serie di potenze otteniamo che, per $\beta << 1$: $\gamma \cong 1 + \beta^2/2$, ovvero il coefficiente di dilatazione relativistica γ differisce dall'unità solo per termini dell'ordine di β^2, e quindi, al primo ordine di approssimazione, può essere posto uguale a 1, e le *(2-c)* diventano: $\begin{cases} t' \cong t - u\beta^2 x \cong t \\ x' \cong x - ut \end{cases}$ che coincidono con le formule classiche delle GT *(1-a)*. Con ciò si osserva che vale un Principio di Corrispondenza: la Fisica Relativistica coincide con quella classica al primo ordine di approssimazione

2.2 LO SPAZIOTEMPO [29]

"Gli eventi hanno una realtà fisica ben precisa per tutti gli osservatori, la quale ovviamente prescinde dagli specifici sistemi di coordinate spaziotemporali utilizzati per rilevarli; tuttavia queste coordinate, oltre a costituire lo strumento necessario per poter descrivere gli eventi, consentono anche di analizzare le relazioni spaziali e temporali in termini della struttura geometrica dello spaziotempo.

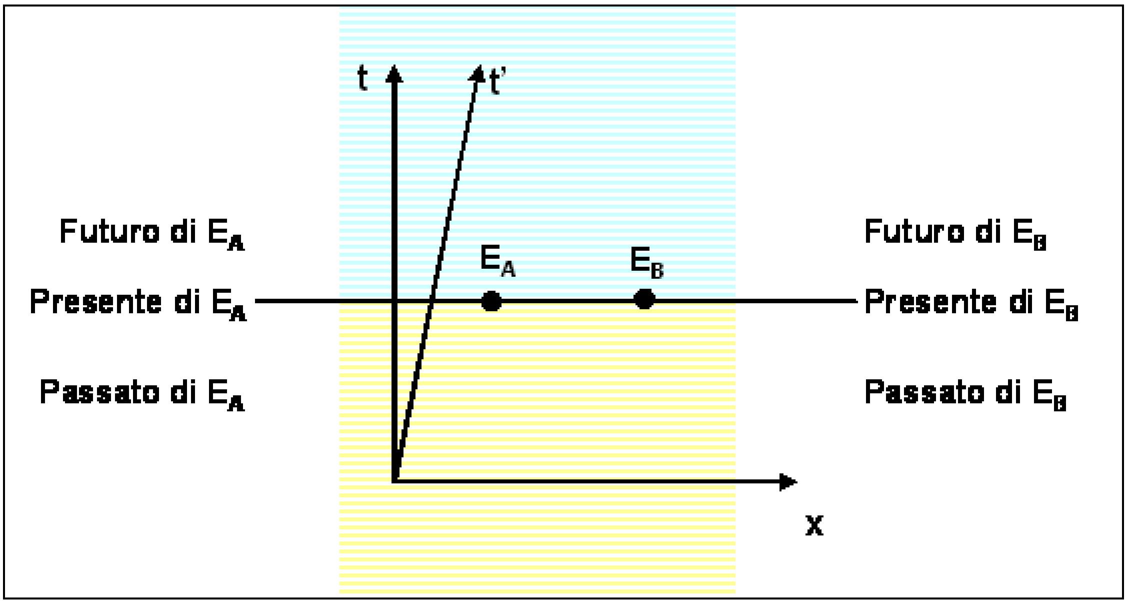
Spaziotempo Classico

La natura assoluta del tempo fa sì che nella Fisica Classica lo spazio ed il tempo siano due entità totalmente separate: mentre le tre coordinate spaziali dipendono dallo stato di moto dell'osservatore, la coordinata temporale invece non ne è influenzata e risulta identica per tutti gli osservatori, indipendentemente dal loro stato di moto. In altre parole: mentre le tre coordinate spaziali possono "mescolarsi" sia fra di loro (per effetto di una rotazione degli assi spaziali) che con la coordinata temporale (per effetto del moto del sistema di riferimento), la coordinata temporale non viene invece influenzata da questi fenomeni.

In uno spaziotempo a due dimensioni (x, t) la relazione di simultaneità fra più eventi viene ad essere rappresentata geometricamente dal fatto che tali eventi giacciono su rette di equazione $t = t_0$, che sono ovviamente perpendicolari all'asse t (e quindi parallele all'asse x). Inoltre queste rette sono invarianti rispetto alle GT: infatti anche in un differente sistema di riferimento SR' l'equazione della retta rimane sempre $t' = t_0$.

La retta $t = t_0$ divide lo spaziotempo classico in tre regioni:

- gli eventi giacenti sotto di essa ($t < t_0$) appartengono al *passato* (nel senso che sono già avvenuti) di un qualsiasi evento giacente su di essa;
- gli eventi giacenti su di essa ($t = t_0$) appartengono al *presente* (nel senso che avvengono contemporaneamente) di un qualsiasi evento giacente su di essa;
- gli eventi giacenti sopra di essa ($t > t_0$) appartengono al *futuro* (nel senso che devono ancora avvenire) di un qualsiasi evento giacente su di essa.



É importante sottolineare che queste relazioni temporali:

- sono valide per tutti gli osservatori, indipendentemente dal loro stato di moto e attengono quindi unicamente agli eventi: tutti gli osservatori infatti concorderanno sul fatto che un evento si verfichi prima, contemporaneamente o dopo rispetto ad un altro evento;
- coinvolgono solo la coordinata temporale e non quelle spaziali, pertanto eventi avvenuti contemporaneamente in posti diversi hanno lo stesso passato/presente/futuro.

Per quanto infine attiene le relazioni di causalità, notiamo che l'assenza di una velocità limite fa sì che un evento nel presente può essere stato influenzato da un qualsiasi evento nel passato e può a sua volta influenzare un qualsiasi evento nel futuro, prescindendo totalmente dalle coordinate spaziali di tali eventi.

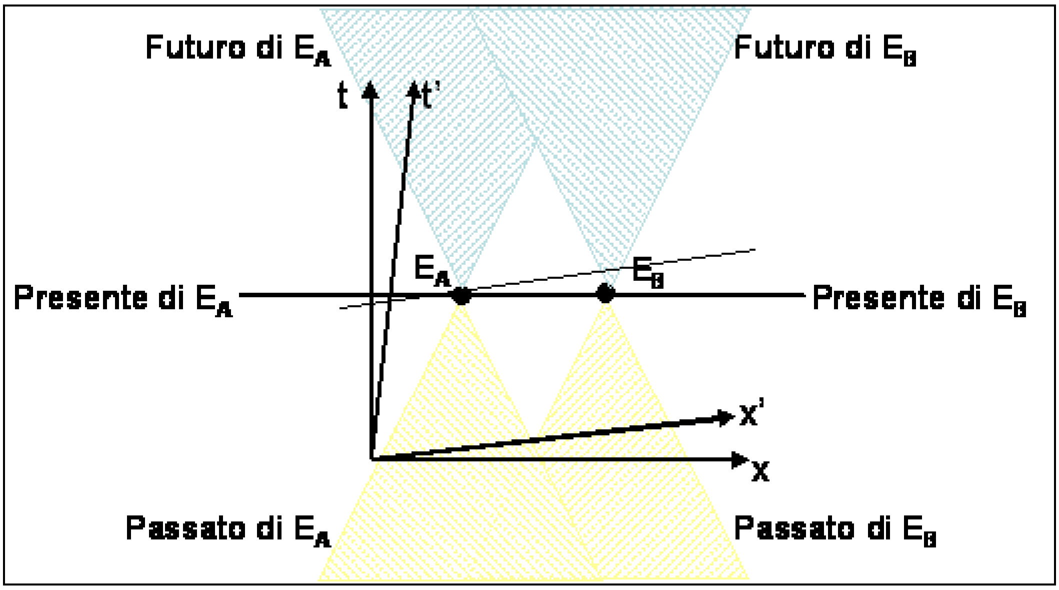
Se si considerano anche le coordinate y e z (trasversali rispetto alla direzione del moto relativo dei due SR), abbiamo che l'equazione $t = t_0$ viene a rappresentare un iperpiano normale all'asse z, ma quanto già espresso continua a rimanere valido.

Spaziotempo Relativistico

Come abbiamo già visto, la natura assoluta della velocità della luce fa sì che nella Fisica Relativistica lo spazio ed il tempo non siano più due entità separate: lo spazio non può essere descritto separatamente dal tempo in quanto essi formano un tutt'uno indissociabile: lo

spaziotempo. In altre parole, lo spazio ed il tempo sono due aspetti di un'unica entità, e quindi non solo le tre coordinate spaziali, ma anche quella temporale, dipendono dallo stato di moto dell'osservatore, e vengono a "mescolarsi" fra di loro, per effetto del moto del sistema di riferimento.

> Il concetto di *spazio relativo* rientra nella nostra esperienza quotidiana e nella nostra percezione sensoriale diretta. Noi siamo cioè consapevoli del fatto che le dimensioni reali di un oggetto non cambiano se esso viene ruotato o spostato e che le variazioni che noi percepiamo quando ci avviciniamo o quando ruotiamo attorno ad esso sono solo apparenti e dipendono dal fatto che abbiamo cambiato il nostro punto di osservazione: non ci stupiamo cioè se avvicinandoci all'oggetto la sua larghezza sembra aumentare, o se girandogli attorno "un po' di larghezza sembra trasformarsi in un po' di profondità" o viceversa. Alla base di questi fenomeni c'è il fatto che lo spazio fisico, pur essendo dotato di tre dimensioni distinte, è tuttavia un'unica entità, e le sue dimensioni – anche se vengono riferite a tre assi cartesiani distinti – non possono essere separate, sono cioè destinate a trasformarsi reciprocamente l'una nell'altra quando cambiamo l'orientamento degli assi coordinati.
>
> Il concetto di *tempo relativo* esula invece completamente dalla nostra esperienza. Il fatto che i fenomeni che normalmente osserviamo avvengono a velocità molto basse rispetto a quelle della luce ha generato in noi il "preconcetto classico" che il tempo sia un'entità assoluta (uguale cioè per tutti gli osservatori, indipendentemente dal loro stato di moto) e completamente separata dallo spazio.
>
> Un altro preconcetto classico è l'idea che lo spazio ed il tempo siano entità completamente distinte fra di loro, destinate a mantenere questa netta separazione a prescindere da variazioni del sistema di riferimento utilizzato per descriverle. La Meccanica Relativistica ci mostra invece che così non è: spazio e tempo, pur avendo una differente natura, sono entrambi dimensioni di un'unica entità fisica ben precisa (lo spaziotempo), e sia le coordinate spaziali che quella temporale vengono a mescolarsi fra di loro a seguito di un cambiamento del sistema di riferimento spaziotemporale. Queste "rotazioni" nello spaziotempo comprendono sia le rotazioni puramente spaziali degli assi cartesiani sia le trasformazioni da un sistema di riferimento ad un altro per effetto del moto relativo di due Osservatori.



Iniziamo, per semplicità, a considerare uno spaziotempo a due dimensioni (x^0 , x^1):

- la traiettoria (che in termini relativistici viene chiamata **linea d'universo**) di un fotone emesso nell'origine è rappresentata da un'equazione del tipo $x^1 = \pm x^0$, coincide cioè con una bisettrice degli assi coordinati; inoltre le LT garantiscono l'invarianza di queste rette, per cui la loro equazione rimane sempre $x'^1 = \pm x'^0$ in qualsiasi SRI, e ciò esprime l'invarianza della velocità della luce.
- la condizione di simultaneità di due eventi è rappresentata, in un determinato SR, dalla loro appartenenza ad una retta di equazione x^0 = costante, che è ovviamente parallela all'asse x^1;

tuttavia, poiché le LT "inclinano" l'asse x'^1 rispetto ad x^1, in un qualsiasi altro SRI la retta in questione non sarà più parallela all'asse x'^1, e quindi i due eventi non saranno più simultanei.

Se poi aggiungiamo anche le altre due coordinate spaziali x^2 e x^3, abbiamo che:

- l'equazione di un fronte d'onda luminoso è del tipo $ds^2 = 0$, la quale – nello spaziotempo – rappresenta un ipercono (detto **cono di luce**); l'invarianza dell'intervallo garantisce non solo che questa superfice venga ad essere rappresentata da un'equazione analoga ($ds'^2 = 0$) in un qualsiasi altro sistema di riferimento, ma anche che gli eventi all'interno del cono di luce (caratterizzati dalla condizione $ds^2 < 0$) continuino a rimanere al suo l'interno, e analogamente per gli eventi al suo esterno (per i quali $ds^2 > 0$)
- la condizione di simultaneità di più eventi è rappresentata dalla loro appartenenza ad un iperpiano perpendicolare all'asse x^0, ma continuano a valere le considerazioni fatte in precedenza.

Il cono di luce divide lo spaziotempo in tre regioni:

- Gli eventi situati all'interno del cono di luce ($\Delta\mathbf{r}^2 < c^2\Delta t^2$, ovvero $\Delta s^2 < 0$) sono fisicamente raggiungibili viaggiando ad una velocità $u = \Delta r/\Delta t = \beta c < c$ possono quindi essere messi in relazione causale con l'evento E_O (l'origine del cono); in particolare E_O può essere stato influenzato da un qualsiasi evento situato all'interno del semicono inferiore, e può a sua volta influenzare un qualsiasi evento situato all'interno del semicono superiore. Queste regioni dello spaziotempo rappresentano pertanto rispettivamente il *passato assoluto* ed il *futuro assoluto* dell'evento E_O.

  Gli intervalli di questo tipo sono detti di tipo tempo in quanto, in qualsiasi sistema di riferimento la loro componente temporale è preponderante rispetto a quella spaziale.

  Notiamo che in queste regioni:

  - le relazioni temporali sono assolute: tutti gli osservatori concorderanno cioè sul fatto che un qualsiasi evento è avvenuto prima o dopo rispetto all'evento E_0;
  - le relazioni spaziali sono relative: infatti il segno di $\Delta\mathbf{r}'$ dipende dal segno di $\mathbf{u}$; in particolare esiste sempre un sistema di riferimento inerziale SR' (animato da velocità $u = \Delta r/\Delta t < c$) in cui $\Delta\mathbf{r}' = 0$ (ossia dove i due eventi si verificano nello stesso posto).

- Gli eventi situati all'esterno del cono di luce ($\Delta\mathbf{r}^2 > c^2\Delta t^2$, ovvero $\Delta s^2 > 0$) non sono fisicamente raggiungibili da un raggio di luce (in quanto sarebbe necessario viaggiare ad una velocità $u = \Delta r/\Delta t > c$) e pertanto non posono essere messi in relazione causale con l'evento E_O . Questa regione dello spaziotempo viene detta l'*altrove assoluto* dell'evento E_O.

  Notiamo che in questa regione:

  - le relazioni temporali sono relative: per un osservatore in moto rispetto ad SR, un evento E_A si verifica prima o dopo l'evento E_0 a seconda del segno della velocità relativa; in particolare esiste sempre un sistema di riferimento inerziale SR' in cui $\Delta t' = 0$ (ossia dove i due eventi si verificano simultaneamente);
  - le relazioni spaziali sono assolute: tutti gli osservatori concorderanno cioè sul fatto che un qualsiasi evento è avvenuto "a destra" oppure "a sinistra" rispetto all'evento E_0.

  Gli intervalli di questo tipo sono detti di tipo spazio in quanto, in qualsiasi sistema di riferimento la loro componente spaziale è preponderante rispetto a quella temporale.

- gli eventi giacenti sulla superficie del cono di luce ($\Delta\mathbf{r}^2 = c^2\Delta t^2$, ovvero $\Delta s^2 = 0$) appartengono al fronte d'onda di un raggio luminoso emesso in E_O.

Gli intervalli di questo tipo sono detti di tipo luce.

Sintetizzando possiamo affermare che:

La velocità della luce pone un limite alla causalità: un evento non può causarne un altro quando la loro distanza spaziale è maggiore della distanza che può essere percorsa dalla luce nell'intervallo di tempo fra questi eventi.

Sottolineiamo il fatto che le relazioni (sia spaziali che temporali) sopra descritte sono relative all'evento E_0, e pertanto eventi differenti avranno coni di luce differenti: ad esempio anche per uno stesso osservatore, il passato (o il presente o il futuro) di un evento non potrà mai coincidere con quello di un altro evento: ogni evento ha il suo specifico cono di luce.

Relazioni Temporali

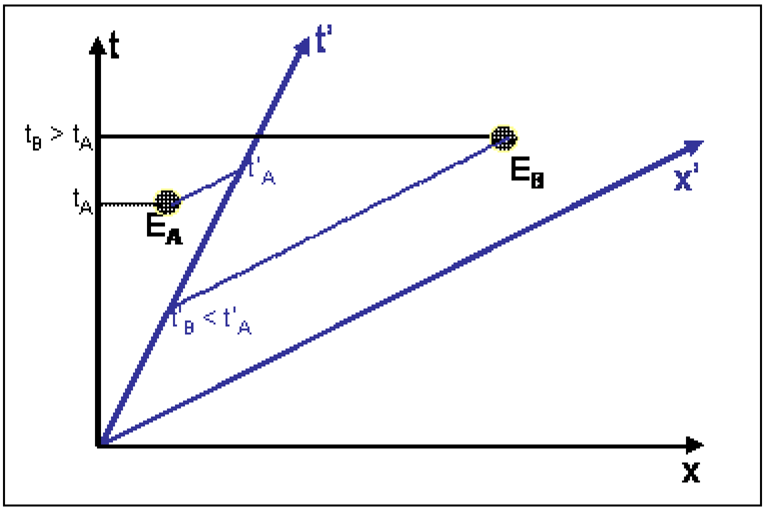
Noi siamo abituati a pensare che due avvenimenti siano sempre ordinati temporalmente, cioè o accadono simultaneamente, oppure uno di essi accade *prima* e l'altro accade *dopo*. Siamo inoltre abituati a pensare che le durate e le relazioni temporali tra gli eventi siano identiche per tutti gli osservatori, per cui dovrebbe aver senso, ad esempio, chiedersi cosa stia succedendo proprio in questo preciso momento in un punto qualsiasi dell'Universo.

La Teoria della Relatività ci mostra invece che questo modo di pensare è sbagliato:

- il tempo non scorre nello stesso modo per tutti: Osservatori differenti, in moto l'uno rispetto all'altro, hanno ciascuno il proprio tempo, e la durata temporale di uno stesso fenomeno risulta differente per i vari Osservatori (questo fenomeno prende il nome di **dilatazione temporale**).
- quando due avvenimenti accadono *"abbastanza lontani"* l'uno dall'altro, non ha senso dire quale dei due sia accaduto prima, né ha senso chiedersi cosa stia succedendo proprio ora in punti abbastanza lontani dell'Universo. Solo se gli eventi sono *"abbastanza vicini"* i due Osservatori concorderanno sulla loro relazione temporale (ossia su quale sia accaduto prima e quale dopo), altrimenti potrebbe presentarsi un fenomeno di **inversione temporale**: mentre per un osservatore O l'evento E_A si verifica *prima* dell'evento E_B (ossia nel suo sistema di riferimento risulta $t_A < t_B$) per un altro osservatore O' l'evento E_A potrebbe verificarsi *dopo* l'evento E_B (ossia nel suo sistema di riferimento risulta $t'_A > t'_B$).

Il fenomeno dell'inversione temporale ci appare ancora più sbalorditivo di quello della dilatazione temporale, e ci sembra sovvertire qualche principio di base della nostra concezione classica dell'Universo; tuttavia le situazioni in cui esso può verificarsi sono tali da non violare il principio di causalità.

Il concetto di *abbastanza vicini (*o *abbastanza lontani*) può essere precisato considerando un raggio di luce emesso in $E_A=(t_A, \mathbf{r}_A)$: se esso può raggiungere il punto $\mathbf{r}_B$ in un tempo $\Delta t < (t_B - t_A)$, allora gli eventi sono *abbastanza vicini*, ed E_B si trova all'interno del cono di luce di E_A. Nel caso contrario ($\Delta t > (t_B - t_A)$) E_B si trova all'esterno del cono di luce di E_A , e per alcuni osservatori esso si verifica prima di E_A. La situazione è illustrata in figura.

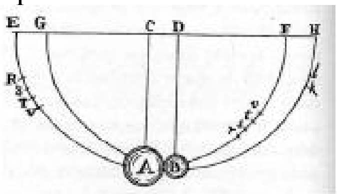


Riepilogando quanto visto a proposito delle conseguenze dell'invarianza della velocità della luce relativamente alla relazione temporale fra due eventi distinti E_A ed E_B.

- Se in un dato SR due eventi distinti si verificano nello stesso posto ($\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B$), allora essi si verificano necessariamente in istanti diversi e fra di loro può esistere una relazione di causalità, pertanto uno di essi è necessariamente successivo all'altro (sia ad es $t_B > t_A$). In questo SR risulta $\Delta s^2 = - c^2\Delta t^2 < 0$, e l'invarianza dell'intervallo assicura che anche in un qualsiasi altro SR' si avrà $\Delta s'^2 = \Delta \mathbf{r'}^2 - c^2\Delta t'^2 < 0$, ossia E_B potrà essere raggiunto partendo da E_A viaggiando ad una velocità $v = |\Delta\mathbf{r'}|/\Delta t' < c$, e quindi anche in questo SR' può esistere una relazione di causalità fra i due eventi. Ne consegue che la relazione temporale fra di essi è assoluta: E_B sarà successivo ad E_A in tutti i sistemi di riferimento.
- La situazione non cambia se in un dato SR* due eventi si verificano in posti differenti, purchè risulti $|\Delta\mathbf{r}^*| < c|\Delta t^*|$: infatti in questo caso esiste un sistema di riferimento SR (animato di velocità $u = |\Delta\mathbf{r}^*|/\Delta t^* < c$ rispetto a SR*) nel quale i due eventi avvengono nello stesso posto, e quindi ci si riconduce al caso precedente.
- Se invece risulta $|\Delta\mathbf{r}| = c|\Delta t|$ i due eventi si trovano sulla linea d'universo di un fotone, e fra di essi può esistere una relazione di causalità. Inoltre l'invarianza di c assicura che anche in un qualsiasi altro SR' risulterà $|\Delta\mathbf{r'}| = c|\Delta t'|$, e quindi la relazione temporale fra i due eventi viene ad essere indipendente dal sistema di riferimento.
- Ben diverso è invece il caso in cui in SR risulti $|\Delta\mathbf{r}| > c|\Delta t|$: inatti in questo caso la distanza spaziale che separa i due eventi non può essere percorsa da un fotone nel tempo Δt: e quindi fra di essi non può esistere nessuna relazione di causalità. Un caso particolare di questa situazione si ha quando $\Delta t = 0$, ossia quando in SR i due eventi sono simultanei, ed è ovvio che nessuno dei due può essere causa dell'altro. Osserviamo infine che, nel caso in esame la sequenza temporale dei due eventi dipende dal sistema di riferimento: infatti al crescere della velocità relativa di SR' rispetto ad SR, la durata dell'intervallo temporale tra i due eventi si riduce progressivamente fino ad annullarsi , ed in questo SR' i due eventi sono simultanei; aumentando ulteriormente la velocità la loro sequenza temporale viene invertita ($t'_B < t'_A$). "

Approfondimento3: DINAMICA

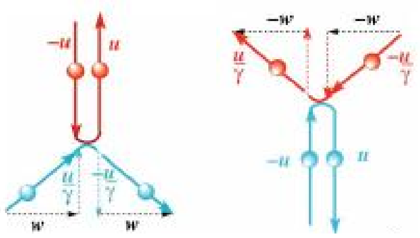
Ho trattato la dinamica partendo dalla necessità, derivante dalle osservazioni sperimentali, di una ridefinizione della quantità di moto, evitando il concetto di massa relativistica, ormai non più in uso nel linguaggio scientifico, ma ancora riportato nei libri di testo (compreso quello in uso nelle mie classi, testo per altro ottimo sotto altri punti di vista)
Cercherò di motivare tale scelta
Per Newton le forze sono dovute a interazioni
Se prendiamo in considerazione il suo esempio

ti 

Quando le biglie si urtano la variazione della quantità di moto dell'una è uguale ed opposta a quella dell'altra. *Le variazioni fatte da queste azioni sono uguali non nelle velocità ma nei moti dei corpi e* <u>la variazione del moto è proporzionale alla forza</u>

Per il principio di relatività questo deve valere in tutti i riferimenti

Se consideriamo un urto simmetrico in due riferimenti in moto relativo



Le velocità trasversali sono diverse nei due riferimenti
Se p=mv la rossa cambierebbe di –2mu la blu di 2mu/γ ma la variazione totale deve essere nulla.
La quantità di moto è, dunque, p=mγv (vedi tesi)

La massa m di un corpo è un invariante relativistico, non dipende dalla velocità, è una caratteristica del corpo, come la carica e lo spin
La quantità di moto è

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{v}$$

Se m = 0, il corpo ha velocità c in ogni riferimento e pc = E. Non esiste analogo non-relativistico
Se m≠0

$$\vec{p} = m\vec{v}\gamma$$

L'equazione del moto è $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Per v→0, γ →1 quindi p→mv la massa m è quella di Galileo-Newton
Questo comporta che l'equazione $\vec{F} = m\vec{a}$ sia errata
In relatività la massa non è l'inerzia, cioè il rapporto tra forza e accelerazione
Forza e accelerazione non sono in genere parallele, pertanto non si può definire in maniera non ambigua una costante di proporzionalità

Infatti, per mantenere l'espressione $\vec{F} = m\vec{a}$, si introducevano pasticci come massa trasversale e massa longitudinale
Infatti da

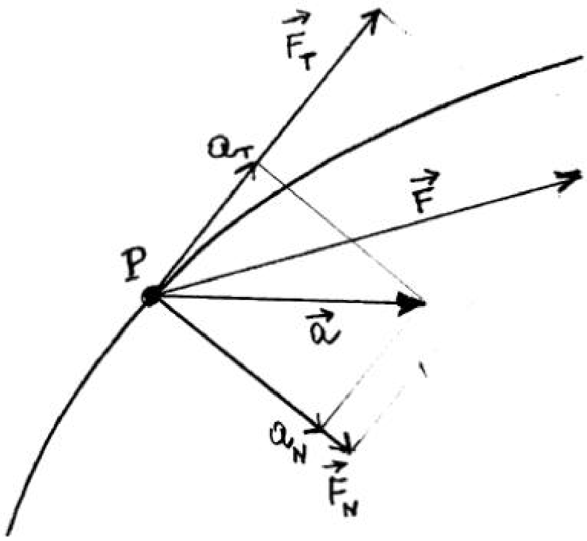
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\gamma\vec{v})}{dt} = m\gamma\vec{a} + \vec{v}\frac{d(m\gamma)}{dt}$$

da cui

$$\vec{F} = m\gamma\vec{a} + m\gamma^3(\vec{a} \bullet \vec{\beta})\vec{\beta} \qquad \text{dove } \beta = v/c$$

dove si vede che , in generale, forza e accelerazione non hanno la stessa direzione



invece le componenti tangenziali $\mathbf{a_T}$ e $\mathbf{F_T}$ della forza e dell'accelerazione e le componenti normali $\mathbf{a_N}$ e $\mathbf{F_N}$ sempre della forza e dell'accelerazione hanno rispettivamente stessa direzione e stesso verso (si noti che risulta sempre $\mathbf{F_T} > \mathbf{F_N}$).

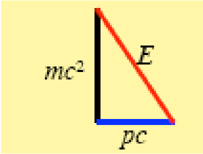
da cui i casi particolari, per cui :

$\mathbf{F} \,||\, \mathbf{v}$ $\rightarrow$ $\mathbf{F} = m\gamma^3\, \mathbf{a}$ e si parlava (parla?) di massa longitudinale= $m\gamma^3$

$\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$ $\rightarrow$ $\mathbf{F} = m\gamma\, \mathbf{a}$ e si parlava(parla?) di massa trasversale= $m\gamma$

Allo stesso modo, per mantenere formalmente valida espressione Newtoniana della quantità di moto $\mathbf{p} = m_r\mathbf{v}$, si introduceva la massa relativistica, definita da alcuni come $m_r = E/c^2$ da altri come $m_r = m\gamma$

Come dedotto anche nel lavoro presentato agli studenti l'espressione corretta è
$E^2=(mc^2)^2+(pc)^2$
Se il corpo è fermo $v=0 \rightarrow p=0 \rightarrow E_0 = mc^2$
Se $m=0 \rightarrow E = pc$



Dunque massa ed energia non sono equivalenti, nel senso che
•Se c'è massa c'è sempre una quantità equivalente di energia
•Se c'è energia non sempre c'è una quantità equivalente di massa
•L'origine della massa è un problema centrale della fisica fondamentale oggi

Anche se troviamo questo concetto nelle parole di Einstein
It followed from the special theory of relativity that mass and energy are both but different manifestations of the same thing -- a somewhat unfamiliar conception for the average mind. Furthermore, the equation E is equal to m c-squared, in which energy is put equal to *mass, multiplied with the square of the velocity of light, showed that very small amounts of mass may be converted into a very large amount of energy and viceversa. The mass and energy were in fact equivalent,according to the formula mentioned before. This was demonstrated by Cockcroft and Walton in 1932,experimentally*."
http://www.aip.org/history/einstein/voice1.htm

Ritengo, dunque, che concetti come massa relativistica, massa longitudinale e trasversale, dipendenza della massa dalla velocità, come pure la formula forse più famosa del mondo debbano essere evitati per evitare confusioni negli studenti
L'esempio che si può proporre è quello del mesoneK^0 è una delle prime particelle "strane" che sono state scoperte.
Ha una vita media molto breve ($< 10^{-10}$s) e diversi modi di decadimento.
A noi interessa quello in due pioni:
$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$.
La massa del K^0 è 498 MeV/c^2; quella di ciascun pione è 140 MeV/c^2.
Come si vede, mancano 218 MeV/c^2: dov'è finita la massa mancante?
Si dice di solito che questa massa si è "convertita in energia": infatti i due pioni non sono fermi, ma hanno un'energia cinetica, che fra tutti e due vale appunto 218 MeV.
Però attenzione: se si vuole usare la massa relativistica, i pioni – essendo in moto – hanno una massa maggiore di quella di riposo, esattamente 249MeV/c^2 ciascuno.
Infatti l'energia si conserva, e l'energia di riposo iniziale del K^0 , che è 498MeV, si sarà ripartita tra i due pioni: 249 MeV per ciascuno.
Ma allora la somma delle masse finali è uguale alla massa iniziale, e non c'è nessuna conversione di massa in energia!
Se invece usiamo la massa invariante, allora effettivamente la somma delle masse finali è minore di quella iniziale, e la differenza si ritrova come energia cinetica.
Però l'energia si conserva comunque, e quindi si deve parlare di conversione di energia di riposo in energia cinetica.

Note e bibliografia

[1]N. Grimellini Tomasini, O. Levrini. C. Casadio, M. Clementi, S. Medri Senni
Insegnare fisica per nuclei fondanti:un esempio riferito al concetto di spazio *La Fisica nella Scuola*, XXXII, 4, 202-213, 1999.
[2]Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica (1686)*
[3]Kant, Critica della ragion pura (1783)
[4]Einstein "L'elettrodinamica dei corpi in movimento" (1905)
[5]Minkowski "Spazio e tempo" (1908).
[6]O. Levrini - Il Contributo della Relatività Ristretta al dibattito sui concetti di Spazio e Tempo in Fisica:Analisi Della Prospettiva Di Einstein,2006
[7]N.Grimellini Tomasini, O. Levrini (2005) - L'Elettrodinamica dei corpi in movimento e i libri di testo: riflessioni sul significato culturale della relatività ristretta – La Fisica nella Scuola, XXXVIII
[8]Resnick R. (1968), Introduzione alla Relatività Ristretta, Casa Editrice Ambrosiana, Milano.
[9]Taylor E. F., Wheeler J. A. 1992, Fisica dello spazio-tempo, ed. it. Zanichelli (1996)
[10]Fabri E., "Insegnare relatività nel XX secolo", Lezioni alla Scuola Estiva Estiva A.I.F., 2001, Q16
[11]Halliday D., Resnick R., Walker J., Fondamenti di Fisica, Zanichelli editore, 2001,
[12]Carla Casadio e Olivia Levrini -Lo Spazio e il Tempo Assoluti di Newton, 2006
[13]P.Casini - Filosofia e fisica da Newton a Kant -, 1978.
[14]L.Geymonat - Storia del pensiero filosofico e scientifico - Garzanti, 1971.
[15]K.R.Popper - Congetture e Confutazioni - 1972.
[16]T.S.Kuhn - La struttura delle rivoluzioni scientifiche - Einaudi, 1969 .
[17]K.R.Popper - Scienza e filosofia - Einaudi, 1969.
[18]K.R.Popper - La logica della scoperta scientifica - Einaudi, 1970 .
[19]E.Mach - La meccanica nel suo sviluppo storico-critico - Boringhieri, 1968.
[20]S. Bergia - La storia della relatività - La Fisica nella scuola, Anno VIII, n°1, 1975.
[21]G. Boniolo – Filosofia della fisica- Mondatori, 1997
[22]Einstein. (1917) – Relatività esposizione divulgativa, - Boringhieri, 1980
[23]Einstein. – Opere scelte - Boringhieri, 1988
[24]Weinberg S. - Gravitation and Cosmology, Wiley and Sons, 1972
[25]Landau-Lifsits - Teoria dei campi – Ed.Riuniti, 1976
[26]Olivia Levrini _ Analisi della prospettiva di Minkowski
[27]Giordano Bruno "*La cena delle ceneri"*
[28]Galileo Galilei "*Dialogo sopra i massimi sistemi"*
[29]www.arrigoamadori.com/lezioni/FdA_WEB/FdA_F02_RelativitaRistretta.htm#_Toc114747483
[30]A.B. Arons, Guida all'insegnamento della fisica, Zanichelli, Bologna, 1992
[31]Possibile modo per ricavare le trasformazioni di Lorentz (da Scorza F., Un esperimento di insegnamento della Relatività in una classe di Liceo Scientifico: dal progetto alla realtà di classe, Tesi di Laurea in Fisica, Università di Bologna, Relatore Prof. N. Grimellini Tomasini, Correlatori Prof. P. Fantini, Dott. O. Levrini)
[32] P.Colella :presentazione della sperimentazione di relatività al WS di Udine
[33]http://www.df.unipi.it/~fabri/sagredo/

INDICE