Analisi e controllo di sistemi non lineari con applicazione ad un Robot sottoattuato

Tesi di Laurea in Ingegneria Elettronica

Università "La Sapienza" di Roma

Alessandro Bernardini

Relatore: Prof. Giuseppe Oriolo

Correlatore: Prof. Leonardo Lanari

Febbraio 2006

Panoramica

Aspetti teorici

Importanza dello studio di sistemi non lineari:

Premessa

Importanza dello studio di sistemi non lineari:

- I modelli matematici dei sistemi reali sono, salvo eccezioni, EquaDiff non lineari.

Premessa

Importanza dello studio di sistemi non lineari:

- I modelli matematici dei sistemi reali sono, salvo eccezioni, EquaDiff non lineari.
- La linearizzazione è una tecnica adatta al più allo studio locale di un sistema dinamico non lineare.

Premessa

Importanza dello studio di sistemi non lineari:

- I modelli matematici dei sistemi reali sono, salvo eccezioni, EquaDiff non lineari.
- La linearizzazione è una tecnica adatta al più allo studio locale di un sistema dinamico non lineare.
- I risultati di una simulazione numerica relativa ad un sistema non lineare possono essere del tutto insoddisfacenti se non supportati anche da uno studio qualitativo teorico condotto con gli strumenti della Teoria dei Sistemi Dinamici: si pensi al caos deterministico o ad un punto di sella di un sistema non lineare...

Premessa

Importanza dello studio di sistemi non lineari:

- I modelli matematici dei sistemi reali sono, salvo eccezioni, EquaDiff non lineari.
- La linearizzazione è una tecnica adatta al più allo studio locale di un sistema dinamico non lineare.
- I risultati di una simulazione numerica relativa ad un sistema non lineare possono essere del tutto insoddisfacenti se non supportati anche da uno studio qualitativo teorico condotto con gli strumenti della Teoria dei Sistemi Dinamici: si pensi al caos deterministico o ad un punto di sella di un sistema non lineare. . .
- La Teoria dei Sistemi Dinamici è capace di fornire risultati qualitativi generali, mentre la simulazione numerica può, al più, stimare approssimativamente andamenti per particolari condizioni iniziali e particolari parametri.

Premessa

Importanza dello studio di sistemi non lineari:

- I modelli matematici dei sistemi reali sono, salvo eccezioni, EquaDiff non lineari.
- La linearizzazione è una tecnica adatta al più allo studio locale di un sistema dinamico non lineare.
- I risultati di una simulazione numerica relativa ad un sistema non lineare possono essere del tutto insoddisfacenti se non supportati anche da uno studio qualitativo teorico condotto con gli strumenti della Teoria dei Sistemi Dinamici: si pensi al caos deterministico o ad un punto di sella di un sistema non lineare. . .
- La Teoria dei Sistemi Dinamici è capace di fornire risultati qualitativi generali, mentre la simulazione numerica può, al più, stimare approssimativamente andamenti per particolari condizioni iniziali e particolari parametri.
- Si osservi che anche un sistema come il doppio pendolo o l'oscillatore di Colpitts può essere caotico.

Definizioni fondamentali

Sono stati considerati sistemi descritti da EquaDiff del tipo

$$\dot{x} = f(x) \qquad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$$

Definizioni fondamentali

Sono stati considerati sistemi descritti da EquaDiff del tipo

$$\dot{x} = f(x) \qquad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$$

- Indicheremo con $\phi(t,\xi)$ la soluzione (unica stanti opportune ipotesi) del sistema considerato relativa alla condizione iniziale ξ. Si ha $\dot{\phi}(t,\xi) = f(\phi(t,\xi))$ e $\phi(0,\xi) = \xi$, per $\xi \in D$

Definizioni fondamentali

Sono stati considerati sistemi descritti da EquaDiff del tipo

$$\dot{x} = f(x) \qquad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$$

- Indicheremo con $\phi(t, \xi)$ la soluzione (unica stanti opportune ipotesi) del sistema considerato relativa alla condizione iniziale ξ. Si ha $\dot{\phi}(t, \xi) = f(\phi(t, \xi))$ e $\phi(0, \xi) = \xi$, per $\xi \in D$
- La traiettoria passante per ξ, indicata da noi con $O(\xi)$ è il luogo dei punti $\{x \in D \subseteq \mathbb{R}^n : \exists \bar{t}$ t.c. $x = \phi(\bar{t}, \xi)\}$

Definizioni fondamentali

Sono stati considerati sistemi descritti da EquaDiff del tipo

$$\dot{x} = f(x) \qquad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$$

- Indicheremo con $\phi(t, \xi)$ la soluzione (unica stanti opportune ipotesi) del sistema considerato relativa alla condizione iniziale ξ. Si ha $\dot{\phi}(t, \xi) = f(\phi(t, \xi))$ e $\phi(0, \xi) = \xi$, per $\xi \in D$
- La traiettoria passante per ξ, indicata da noi con $O(\xi)$ è il luogo dei punti $\{x \in D \subseteq \mathbb{R}^n : \exists \bar{t}$ t.c. $x = \phi(\bar{t}, \xi)\}$
- $O^+(\xi)$ sarà la *semitraiettoria* positiva per ξ.

Definizioni fondamentali

Sono stati considerati sistemi descritti da EquaDiff del tipo

$$\dot{x} = f(x) \qquad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$$

- Indicheremo con $\phi(t, \xi)$ la soluzione (unica stanti opportune ipotesi) del sistema considerato relativa alla condizione iniziale ξ. Si ha $\dot{\phi}(t, \xi) = f(\phi(t, \xi))$ e $\phi(0, \xi) = \xi$, per $\xi \in D$
- La traiettoria passante per ξ, indicata da noi con $O(\xi)$ è il luogo dei punti $\{x \in D \subseteq \mathbb{R}^n : \exists \bar{t} \text{ t.c. } x = \phi(\bar{t}, \xi)\}$
- $O^+(\xi)$ sarà la *semitraiettoria* positiva per ξ.
- Una traiettoria *omoclina* è t.c. $lim_{t \to \pm\infty} \phi(t) = x_E$ con $f(x_E) = 0$

Definizioni fondamentali

Sono stati considerati sistemi descritti da EquaDiff del tipo

$$\dot{x} = f(x) \qquad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$$

- Indicheremo con $\phi(t, \xi)$ la soluzione (unica stanti opportune ipotesi) del sistema considerato relativa alla condizione iniziale ξ. Si ha $\dot{\phi}(t, \xi) = f(\phi(t, \xi))$ e $\phi(0, \xi) = \xi$, per $\xi \in D$
- La traiettoria passante per ξ, indicata da noi con $O(\xi)$ è il luogo dei punti $\{x \in D \subseteq \mathbb{R}^n : \exists \bar{t}$ t.c. $x = \phi(\bar{t}, \xi)\}$
- $O^+(\xi)$ sarà la *semitraiettoria* positiva per ξ.
- Una traiettoria *omoclina* è t.c. $lim_{t \to \pm\infty} \phi(t) = x_E$ con $f(x_E) = 0$
- Chiameremo *phase portrait* il "ritratto" o meglio l'insieme di tutte le traiettorie di un dato sistema.

Definizioni fondamentali

Sono stati considerati sistemi descritti da EquaDiff del tipo

$$\dot{x} = f(x) \qquad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$$

- Indicheremo con $\phi(t, \xi)$ la soluzione (unica stanti opportune ipotesi) del sistema considerato relativa alla condizione iniziale ξ. Si ha $\dot{\phi}(t, \xi) = f(\phi(t, \xi))$ e $\phi(0, \xi) = \xi$, per $\xi \in D$
- La traiettoria passante per ξ, indicata da noi con $O(\xi)$ è il luogo dei punti $\{x \in D \subseteq \mathbb{R}^n : \exists \bar{t} \text{ t.c. } x = \phi(\bar{t}, \xi)\}$
- $O^+(\xi)$ sarà la *semitraiettoria* positiva per ξ.
- Una traiettoria *omoclina* è t.c. $lim_{t \to \pm\infty} \phi(t) = x_E$ con $f(x_E) = 0$
- Chiameremo *phase portrait* il "ritratto" o meglio l'insieme di tutte le traiettorie di un dato sistema.
- Conoscere e/o caratterizzare qualitativamente l'insieme di tutte le traiettorie è il fine della Teoria dei Sistemi Dinamici.

Esempio del pendolo semplice

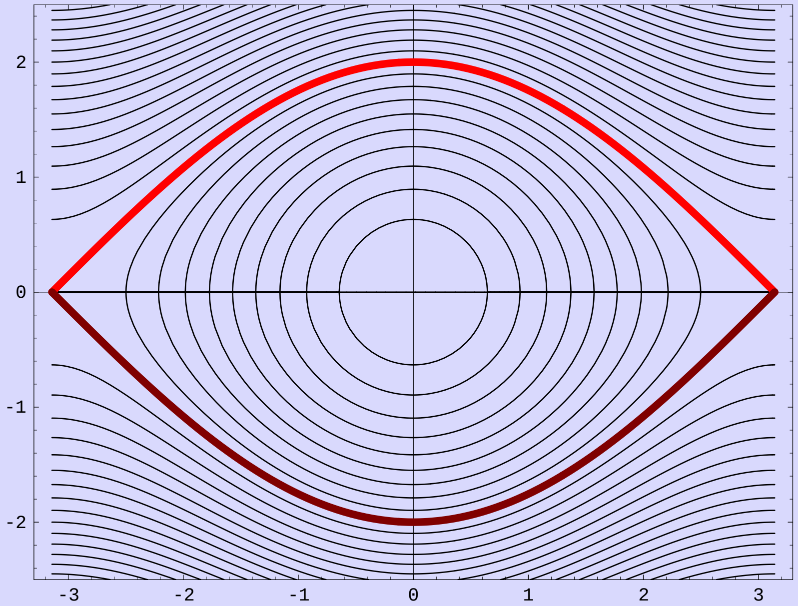
Consideriamo ad esempio le traiettorie del pendolo non dissipativo, descritto dal sistema:

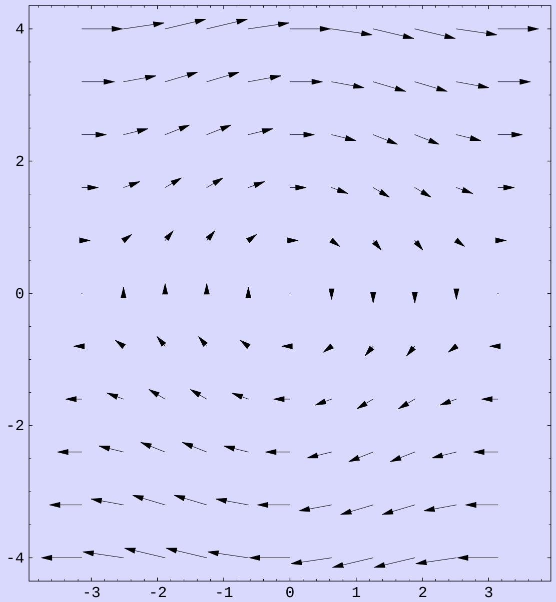
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 \end{cases}$$

Consideriamo ad esempio le traiettorie del pendolo non dissipativo, descritto dal sistema:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -\sin x_1 \end{cases}$$

Notare le *omocline* (su cui $E = E_{top}$). A destra è il campo vettoriale $f(x)$.





In ascissa vi sono i valori di x_1, in ordinata quelli di x_2.

Integrali primi

In generale non è possibile individuare esattamente l'andamento delle traiettorie e di solito si studiano solo qualitativamente le proprietà di queste (per es. la convergenza verso *stati di equilibrio*). Ma per particolari classi di sistemi è possibile determinare esattamente l'andamento di tutte le traiettorie del sistema. Per tali sistemi esistono infatti degli *integrali primi* che sono *invarianti* lungo le traiettorie.

Integrali primi

In generale non è possibile individuare esattamente l'andamento delle traiettorie e di solito si studiano solo qualitativamente le proprietà di queste (per es. la convergenza verso *stati di equilibrio*). Ma per particolari classi di sistemi è possibile determinare esattamente l'andamento di tutte le traiettorie del sistema. Per tali sistemi esistono infatti degli *integrali primi* che sono *invarianti* lungo le traiettorie.

Per sistemi planari

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = g(x_1, x_2) \end{cases}$$

si ha che una funzione $F(x_1, x_2)$ è un integrale primo (per Def) se e solo se

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} f + \frac{\partial F}{\partial x_2} g = 0$$

In tal caso F è costante lungo una qualsiasi traiettoria del sistema e dunque tali traiettorie sono contenute nelle curve di livello di F.

Traiettorie di sistemi planari hamiltoniani

In particolare se $\exists\, H(x_1, x_2)$ t.c.

$$\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -g(x_1, x_2) \qquad \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$$

le traiettorie saranno contenute nelle curve di livello di H che prende il nome di funzione di Hamilton (sistemi hamiltoniani).

Traiettorie di sistemi planari hamiltoniani

In particolare se $\exists\, H(x_1, x_2)$ t.c.

$$\frac{\partial H}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -g(x_1, x_2) \qquad \frac{\partial H}{\partial x_2}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)$$

le traiettorie saranno contenute nelle curve di livello di H che prende il nome di funzione di Hamilton (sistemi hamiltoniani).

Sotto opportune ipotesi si ha:

$$H(x_1, x_2) = H(x, y) = \int_{y_0}^{y} f(x, v)dv - \int_{x_0}^{x} g(w, y_0)dw$$

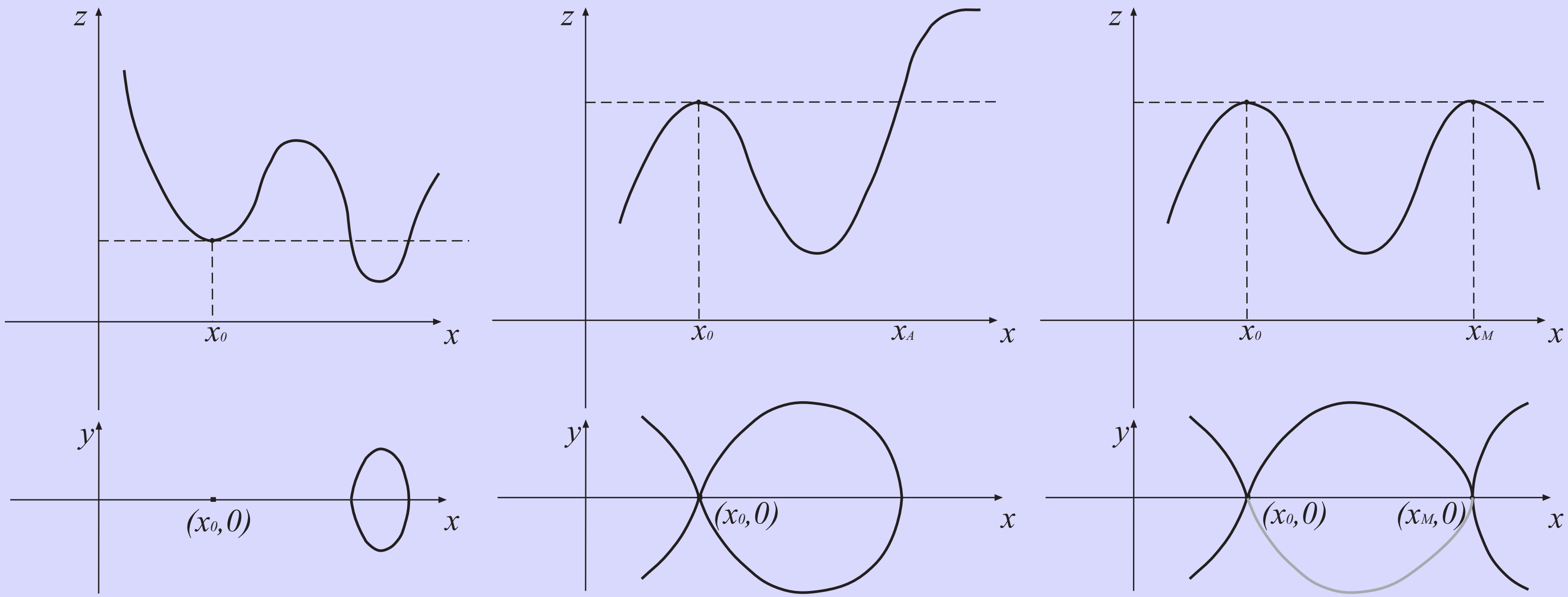
Usando tale procedimento ed individuando le curve di livello di H è stato possibile trovare esplicitamente le traiettorie del pendolo semplice non dissipativo.

Sistemi planari conservativi

Consideriamo un sistema planare con variabili di stato $(x, \dot{x})$ e conservativo, nel senso che la somma dell'energia potenziale $V(x)$ e di quella cinetica $T(x, \dot{x})$ rimane costante nel tempo: per un tale sistema *alcune* traiettorie tipiche (nello spazio di stato $(x, \dot{x})$) sono riportate nelle Figure che seguono, insieme all'andamento dell'energia potenziale $V(x)$. $E = T + V$ è integrale primo.

Sistemi planari conservativi

Consideriamo un sistema planare con variabili di stato $(x, \dot{x})$ e conservativo, nel senso che la somma dell'energia potenziale $V(x)$ e di quella cinetica $T(x, \dot{x})$ rimane costante nel tempo: per un tale sistema *alcune* traiettorie tipiche (nello spazio di stato $(x, \dot{x})$) sono riportate nelle Figure che seguono, insieme all'andamento dell'energia potenziale $V(x)$. $E = T + V$ è integrale primo.



In Fig. $z = V(x)$ e $y = \dot{x}$. Notare le *omocline* ed *eterocline*. Si ripensi al pendolo.

Teorema di Poincaré-Bendixon

Il teorema di Poicaré-Bendixon afferma che per un sistema planare (autonomo) le traiettorie

Teorema di Poincaré-Bendixon

Il teorema di Poicaré-Bendixon afferma che per un sistema planare (autonomo) le traiettorie

- o convergono verso un punto di equilibrio

Teorema di Poincaré-Bendixon

Il teorema di Poicaré-Bendixon afferma che per un sistema planare (autonomo) le traiettorie

- o convergono verso un punto di equilibrio
- o divergono

Teorema di Poincaré-Bendixon

Il teorema di Poicaré-Bendixon afferma che per un sistema planare (autonomo) le traiettorie

- o convergono verso un punto di equilibrio
- o divergono
- o tendono verso una traiettoria periodica

Teorema di Poincaré-Bendixon

Il teorema di Poicaré-Bendixon afferma che per un sistema planare (autonomo) le traiettorie

- o convergono verso un punto di equilibrio
- o divergono
- o tendono verso una traiettoria periodica

Con questo si esclude il caos nei sistemi autonomi planari. Una traiettoria caotica è una traiettoria limitata che non converge nè ad un punto di equilibrio nè verso una traiettoria periodica.

Teorema di Poincaré-Bendixon

Il teorema di Poicaré-Bendixon afferma che per un sistema planare (autonomo) le traiettorie

- o convergono verso un punto di equilibrio
- o divergono
- o tendono verso una traiettoria periodica

Con questo si esclude il caos nei sistemi autonomi planari. Una traiettoria caotica è una traiettoria limitata che non converge nè ad un punto di equilibrio nè verso una traiettoria periodica.

Si pensi all'attrattore di Lorenz, al doppio pendolo, o anche all'oscillatore di Colpitts.

Funzioni di Lyapunov

Una funzione continua e differenziabile $V : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^N$ si chiama funzione di Lyapunov per il sistema $\dot{x} = f(x)$, con $x \in \mathbb{R}^N$, se la funzione

$$\dot{V}(x) := \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) f_i(x)$$

soddisfa alla seguente disequazione

$$\dot{V}(x) \leq 0 \qquad \forall\, x \in D$$

Funzioni di Lyapunov

Una funzione continua e differenziabile $V : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^N$ si chiama funzione di Lyapunov per il sistema $\dot{x} = f(x)$, con $x \in \mathbb{R}^N$, se la funzione

$$\dot{V}(x) := \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) f_i(x)$$

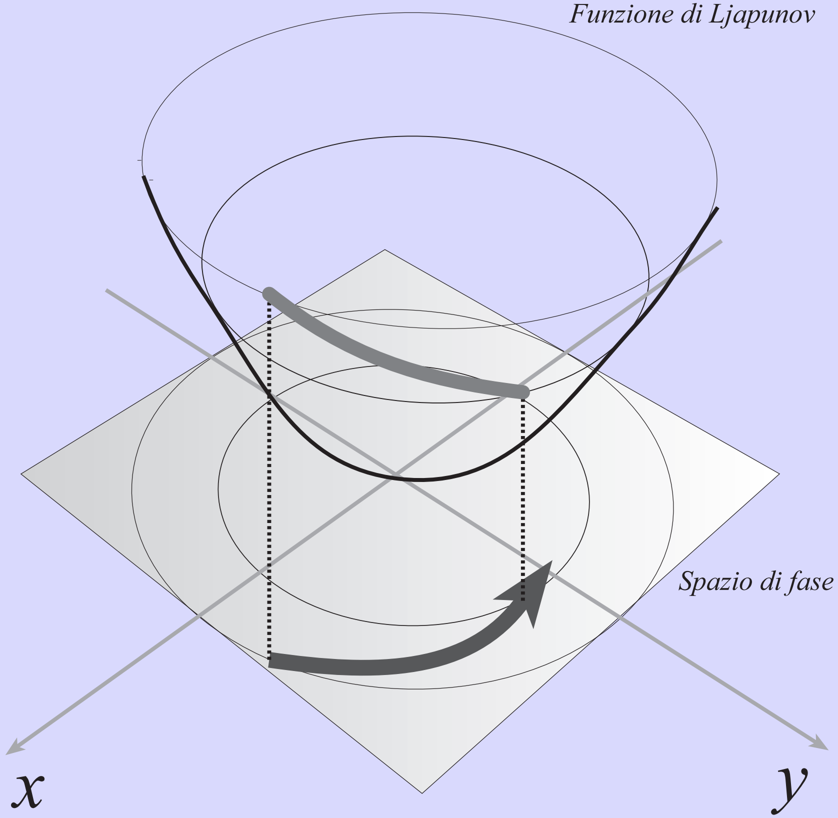
soddisfa alla seguente disequazione

$$\dot{V}(x) \leq 0 \qquad \forall\, x \in D$$

Una funzione di Lyapunov è sempre decrescente (strettamente o non) lungo una qualsiasi traiettoria. Infatti vale:

$$\frac{d}{dt} V(\mu(t)) = \text{grad}\, V(\mu(t)) \cdot \dot{\mu}(t) = \text{grad}\, V(\mu(t)) \cdot f(\mu(t)) = \dot{V}(\mu(t)) \leq 0$$

Per capire l'importanza di una funzione di Lyapunov può essere utile considerare la seguente figura



Notare come la funzione di Lyapunov decresce lungo la traiettoria indicata.

Principio di invarianza

- Un insieme A è invariante se $\xi \in A \Rightarrow O^{+}(\xi) \in A$. Questo vuol dire, cioè, che l'evoluzione del sistema rimane in A, per ogni condizione iniziale $\xi \in A$.

Principio di invarianza

- Un insieme A è invariante se $\xi \in A \Rightarrow O^+(\xi) \in A$. Questo vuol dire, cioè, che l'evoluzione del sistema rimane in A, per ogni condizione iniziale $\xi \in A$.

- *Principio di invarianza*: Se *ogni* semitraiettoria positiva $O^+(\xi)$ è limitata, allora indicando con M il massimo insieme invariante contenuto in $\{x \in D : \dot{V}(x) = 0\}$ si ha che

$$\lim_{t\to\infty} \text{dist}(\phi(t,\xi), M) = 0$$

Useremo tali risultati per teorizzare un controllore per il sistema del Pendubot.

Applicazioni ad un Robot sottoattuato, il Pendubot

Sistemi sottoattuati

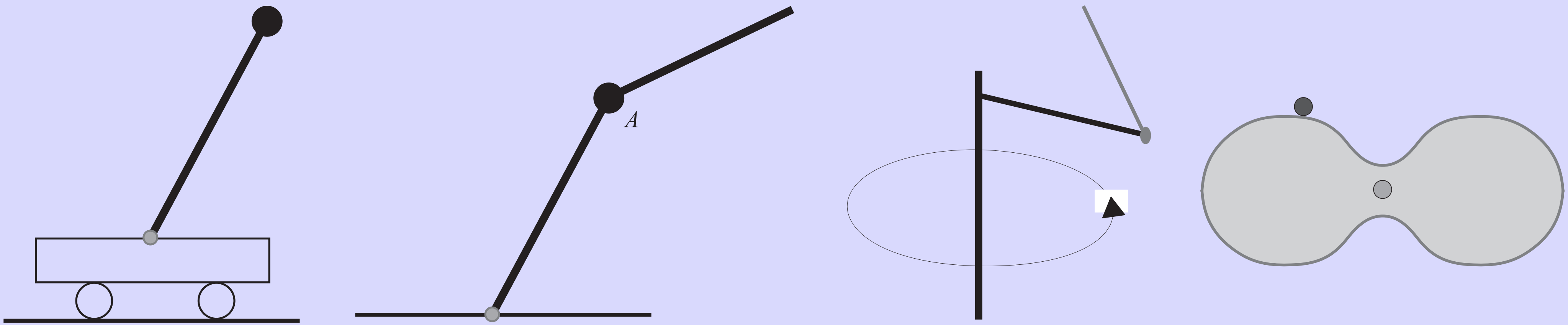
- Quando un sistema a n gradi di libertà, ossia un sistema il cui stato è dato da n variabili $(q_1, \ldots, q_n) = q \in \mathbb{R}^n$ e dalle loro derivate $\dot{q}$, viene controllato con un numero di ingressi di controllo inferiore ad n, allora si dice che il sistema in questione è *sottoattuato*.

Sistemi sottoattuati

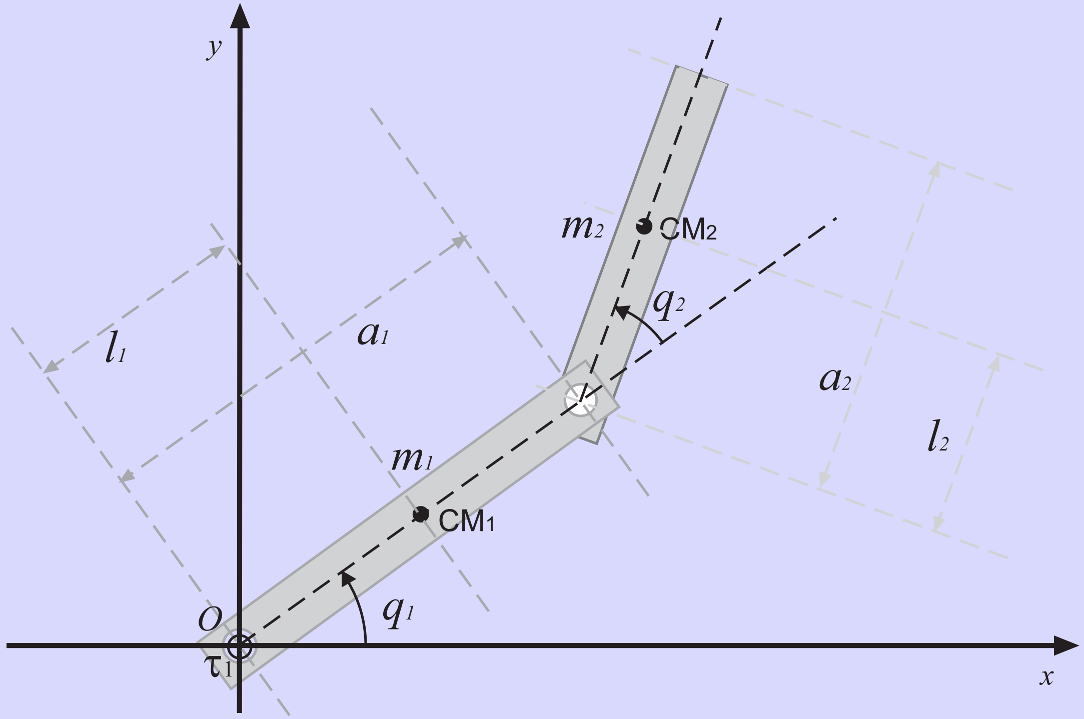
- Quando un sistema a n gradi di libertà, ossia un sistema il cui stato è dato da n variabili $(q_1, \ldots, q_n) = q \in \mathbb{R}^n$ e dalle loro derivate $\dot{q}$, viene controllato con un numero di ingressi di controllo inferiore ad n, allora si dice che il sistema in questione è *sottoattuato*.
- In caso di rottura di attuatori in sistemi attuati si ha che il sistema diventa sottoattuato.

Sistemi sottoattuati

- Quando un sistema a n gradi di libertà, ossia un sistema il cui stato è dato da n variabili $(q_1, \ldots, q_n) = q \in \mathbb{R}^n$ e dalle loro derivate $\dot{q}$, viene controllato con un numero di ingressi di controllo inferiore ad n, allora si dice che il sistema in questione è *sottoattuato*.
- In caso di rottura di attuatori in sistemi attuati si ha che il sistema diventa sottoattuato.
- Alcuni tipici sistemi sottoattuati che si incontrano nella Letteratura (rispettivamente il *cart pendulum*, *l'Acrobot*, il *Furuta Pendulum*, il *Butterfly*):



Il sistema sottoattuato di cui ci occuperemo è il *Pendubot* posto presso il D.I.S. "Antonio Ruberti":



Nel seguito considereremo le costanti $\theta_1, \ldots, \theta_5$ che dipendono dai parametri del Pendubot. Lo stato sarà: $x_1 = q_1$, $x_2 = q_2$, $x_3 = \dot{q}_1$, $x_4 = \dot{q}_2$.

- Il nostro fine è quello di realizzare lo *swing up* del Pendubot.

- Il nostro fine è quello di realizzare lo *swing up* del Pendubot.
- Per *swing up* si intende il portare il sistema ad avere tutti e due i bracci fermi verso l'alto.

- Il nostro fine è quello di realizzare lo *swing up* del Pendubot.
- Per *swing up* si intende il portare il sistema ad avere tutti e due i bracci fermi verso l'alto.
- Al fine di realizzare lo *swing up* definiremo una opportuna legge di controllo $\tau_1(x)$: dato uno stato x la coppia che agisce sul primo braccio (per effetto dell'attuatore) dovrà essere $\tau_1(x)$

- Il nostro fine è quello di realizzare lo *swing up* del Pendubot.
- Per *swing up* si intende il portare il sistema ad avere tutti e due i bracci fermi verso l'alto.
- Al fine di realizzare lo *swing up* definiremo una opportuna legge di controllo $\tau_1(x)$: dato uno stato x la coppia che agisce sul primo braccio (per effetto dell'attuatore) dovrà essere $\tau_1(x)$
- Abbiamo cioè realizzato un *controllore senza memoria a retroazione dallo stato* e questo presuppone che lo stato sia (istantaneamente) misurabile.

- Il nostro fine è quello di realizzare lo *swing up* del Pendubot.
- Per *swing up* si intende il portare il sistema ad avere tutti e due i bracci fermi verso l'alto.
- Al fine di realizzare lo *swing up* definiremo una opportuna legge di controllo $\tau_1(x)$: dato uno stato x la coppia che agisce sul primo braccio (per effetto dell'attuatore) dovrà essere $\tau_1(x)$
- Abbiamo cioè realizzato un *controllore senza memoria a retroazione dallo stato* e questo presuppone che lo stato sia (istantaneamente) misurabile.
- Lo scopo del nostro controllore è in prima linea quello di portare per $t \to \infty$ il sistema ad avere il primo braccio fermo verso l'alto ed il secondo che evolve in modo t.c. q_2 e $\dot{q}_2$ evolvano lungo le *omocline* relative all'equilibrio instabile che si desidera raggiungere (secondo braccio in alto).

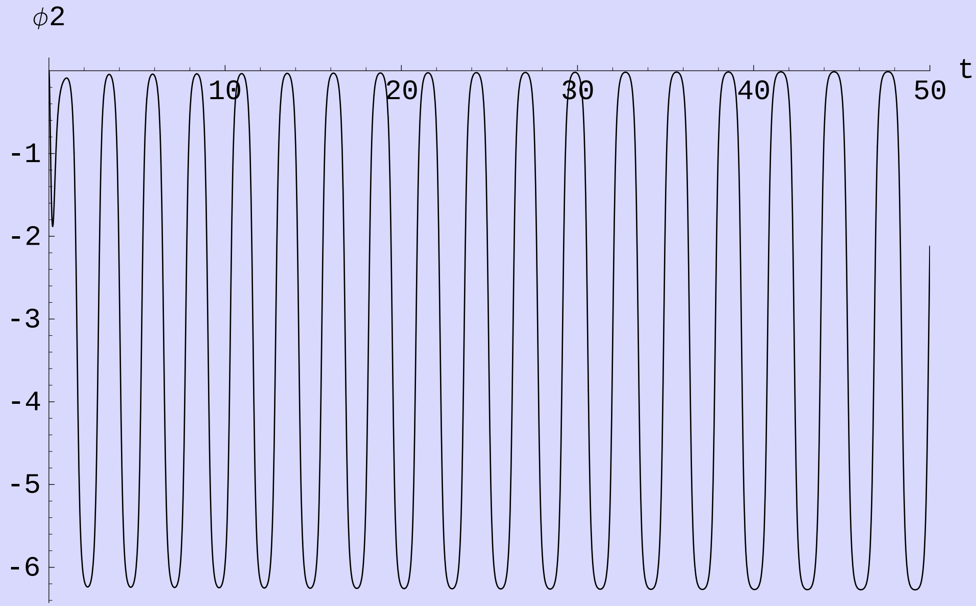
- Il nostro fine è quello di realizzare lo *swing up* del Pendubot.
- Per *swing up* si intende il portare il sistema ad avere tutti e due i bracci fermi verso l'alto.
- Al fine di realizzare lo *swing up* definiremo una opportuna legge di controllo $\tau_1(x)$: dato uno stato x la coppia che agisce sul primo braccio (per effetto dell'attuatore) dovrà essere $\tau_1(x)$
- Abbiamo cioè realizzato un *controllore senza memoria a retroazione dallo stato* e questo presuppone che lo stato sia (istantaneamente) misurabile.
- Lo scopo del nostro controllore è in prima linea quello di portare per $t \longrightarrow \infty$ il sistema ad avere il primo braccio fermo verso l'alto ed il secondo che evolve in modo t.c. q_2 e $\dot{q}_2$ evolvano lungo le *omocline* relative all'equilibrio instabile che si desidera raggiungere (secondo braccio in alto).
  Ossia vogliamo che per effetto del controllore, per $t \longrightarrow \infty$ si abbia

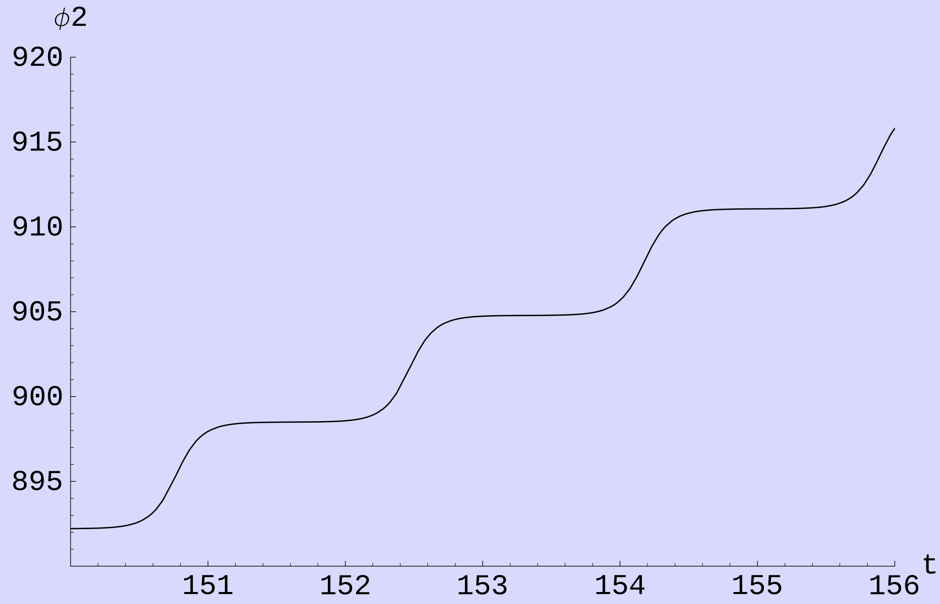
$$q_1 \longrightarrow \frac{\pi}{2} \qquad \dot{q}_1 \longrightarrow 0 \qquad E \longrightarrow E_{top}$$

E_{top} è l'energia del sistema nella *top position* ossia nella posizione data da tutti e due i bracci in alto e *fermi*

Tendendo l'evoluzione del secondo braccio del Pendubot verso le traiettorie *omocline* di cui si è parlato, si avrà che lo stato del sistema si *avvicinerà* sempre più alla *top position* $(\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ al passare del tempo: tuttavia tale stato *non* resterà mai definitivamente in un intorno (piccolo a piacere) della *top position* e dunque al fine di realizzare lo *swing up* vero e proprio è necessario l'intervento anche di un controllore locale di stabilizzazione attorno alla *top position*.

Tendendo l'evoluzione del secondo braccio del Pendubot verso le traiettorie *omocline* di cui si è parlato, si avrà che lo stato del sistema si *avvicinerà* sempre più alla *top position* $(\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ al passare del tempo: tuttavia tale stato *non* resterà mai definitivamente in un intorno (piccolo a piacere) della *top position* e dunque al fine di realizzare lo *swing up* vero e proprio è necessario l'intervento anche di un controllore locale di stabilizzazione attorno alla *top position*.
Anticipiamo alcuni andamenti tipici di $\phi_2 = q_2$





Al fine di definire una opportuna legge di controllo $\tau_1(x)$:

Al fine di definire una opportuna legge di controllo $\tau_1(x)$:

- abbiamo ricercato una possibile funzione di Lyapunov $V(x)$ s.d.p. ponendo

$$V(\bar{x}) = \frac{k_E}{2}(E(\bar{x}) - E_{top})^2 + \frac{k_D}{2}x_3^2 + \frac{k_P}{2}\left(x_1 - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

  Tale funzione si *annullerà* solamente nei punti appartenenti alle *omocline* verso cui si vuole che il sistema converga. Sia $V_0 = \{x : V(x) = 0\}$

Al fine di definire una opportuna legge di controllo $\tau_1(x)$:

- abbiamo ricercato una possibile funzione di Lyapunov $V(x)$ s.d.p. ponendo

$$V(\bar{x}) = \frac{k_E}{2}(E(\bar{x}) - E_{top})^2 + \frac{k_D}{2}x_3^2 + \frac{k_P}{2}\left(x_1 - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

  Tale funzione si *annullerà* solamente nei punti appartenenti alle *omocline* verso cui si vuole che il sistema converga. Sia $V_0 = \{x : V(x) = 0\}$
- abbiamo scelto la legge di controllo τ_1 in modo t.c. V fosse effettivamente una funzione di Lyapunov con $\dot{V} = -x_3^2 \leq 0$

Al fine di definire una opportuna legge di controllo $\tau_1(x)$:

- abbiamo ricercato una possibile funzione di Lyapunov $V(x)$ s.d.p. ponendo

$$V(\bar{x}) = \frac{k_E}{2}(E(\bar{x}) - E_{top})^2 + \frac{k_D}{2}x_3^2 + \frac{k_P}{2}\left(x_1 - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

  Tale funzione si *annullerà* solamente nei punti appartenenti alle *omocline* verso cui si vuole che il sistema converga. Sia $V_0 = \{x : V(x) = 0\}$
- abbiamo scelto la legge di controllo τ_1 in modo t.c. V fosse effettivamente una funzione di Lyapunov con $\dot{V} = -x_3^2 \leq 0$
- abbiamo applicato il *principio di invarianza*, ovvero il principio di LaSalle, secondo cui l'evoluzione del sistema converge vero il *massimo insieme invariante* M contenuto in $\{x \in \mathbb{R}^4 : \dot{V}(x) = 0\}$.

Al fine di definire una opportuna legge di controllo $\tau_1(x)$:

- abbiamo ricercato una possibile funzione di Lyapunov $V(x)$ s.d.p. ponendo

$$V(\bar{x}) = \frac{k_E}{2}(E(\bar{x}) - E_{top})^2 + \frac{k_D}{2}x_3^2 + \frac{k_P}{2}\left(x_1 - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

  Tale funzione si *annullerà* solamente nei punti appartenenti alle *omocline* verso cui si vuole che il sistema converga. Sia $V_0 = \{x : V(x) = 0\}$
- abbiamo scelto la legge di controllo τ_1 in modo t.c. V fosse effettivamente una funzione di Lyapunov con $\dot{V} = -x_3^2 \leq 0$
- abbiamo applicato il *principio di invarianza*, ovvero il principio di LaSalle, secondo cui l'evoluzione del sistema converge vero il *massimo insieme invariante* M contenuto in $\{x \in \mathbb{R}^4 : \dot{V}(x) = 0\}$.
- abbiamo ricercato tale insieme M. E abbiamo trovato opportune condizioni relativamente alle costanti k_E, k_D, k_P affinchè sia

$$M = V_0 \cup \left(\frac{\pi}{2}, -\pi[+2k\pi], 0, 0\right) \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Pertanto il sistema o converge a V_0 (come si desidera contenendo V_0 le *omocline* di cui si è detto) e dunque si rende possibile lo *swing up* o converge in modo indesiderato verso un punto di equilibrio del sistema retroazionato $x_{E_{IND}} = (\frac{\pi}{2}, -\pi, 0, 0)$. Ma tale punto di equilibrio indesiderato è instabile, come è stato mostrato con considerazioni topologiche.

Pertanto il sistema o converge a V_0 (come si desidera contenendo V_0 le *omocline* di cui si è detto) e dunque si rende possibile lo *swing up* o converge in modo indesiderato verso un punto di equilibrio del sistema retroazionato $x_{E_{IND}} = (\frac{\pi}{2}, -\pi, 0, 0)$. Ma tale punto di equilibrio indesiderato è instabile, come è stato mostrato con considerazioni topologiche.

Pertanto il controllore teorizzato è semiglobale, nel senso che “funziona” per ogni condizione iniziale, eccetto al più quelle sulla varietà stabile del punto di equilibrio instabile $x_{E_{IND}}$.

Pertanto il sistema o converge a V_0 (come si desidera contenendo V_0 le *omocline* di cui si è detto) e dunque si rende possibile lo *swing up* o converge in modo indesiderato verso un punto di equilibrio del sistema retroazionato $x_{E_{IND}} = (\frac{\pi}{2}, -\pi, 0, 0)$. Ma tale punto di equilibrio indesiderato è instabile, come è stato mostrato con considerazioni topologiche.

Pertanto il controllore teorizzato è semiglobale, nel senso che "funziona" per ogni condizione iniziale, eccetto al più quelle sulla varietà stabile del punto di equilibrio instabile $x_{E_{IND}}$.

In definitiva la legge di controllo proposta è:

$$\tau_1(\bar{x}) = \frac{-k_D F(\bar{x}) - (\theta_1\theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 x_2)\left(x_3 + k_P\left(x_1 - \frac{\pi}{2}\right)\right)}{(\theta_1\theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 x_2)k_E(E(\bar{x}) - E_{top}) + k_D\theta_2}$$

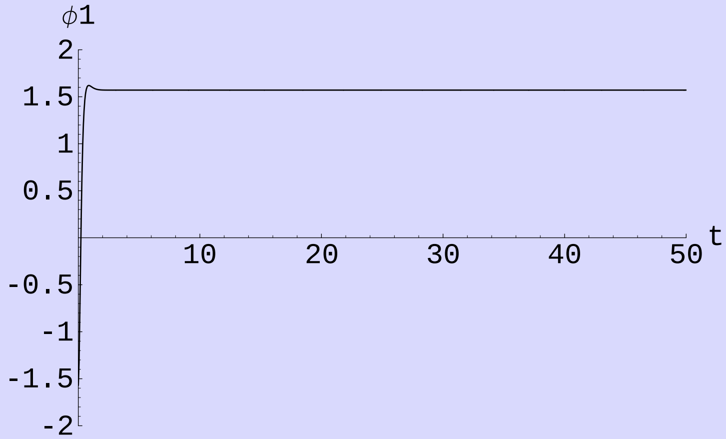
ove le costanti k devono verificare opportune diseguaglianze.

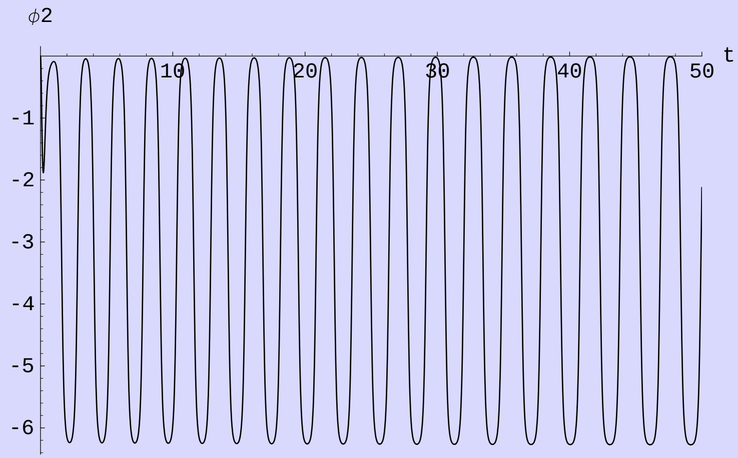
Mediante linearizzazione nel caso particolare del Pendubot conservato presso il D.I.S. “Antonio Ruberti” (ed al variare dei valori di k), si è mostrato che lo jacobiano $Df(x_{E_{IND}})$, calcolato in $x_{E_{IND}}$, presenta una coppia di auotvalori complessi e coniugati a parte reale positiva ed una coppia di autovalori c.c. a parte reale negativa. Ciò implica che $x_{E_{IND}}$ sia un punto di sella non lineare e che pertanto esiste, appunto, una varietà stabile relativa ad esso.

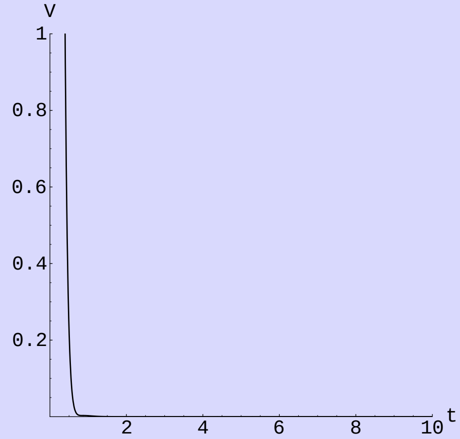
Mediante linearizzazione nel caso particolare del Pendubot conservato presso il D.I.S. “Antonio Ruberti” (ed al variare dei valori di k), si è mostrato che lo jacobiano $Df(x_{E_{IND}})$, calcolato in $x_{E_{IND}}$, presenta una coppia di auotvalori complessi e coniugati a parte reale positiva ed una coppia di autovalori c.c. a parte reale negativa. Ciò implica che $x_{E_{IND}}$ sia un punto di sella non lineare e che pertanto esiste, appunto, una varietà stabile relativa ad esso.

Essendo però in ogni caso $x_{E_{IND}}$ un punto di equilibrio instabile, basterà una piccola perturbazione per fare convergere l’evoluzione del sistema retroazionato verso V_0 e dunque per poter realizzare lo swing up come desiderato.

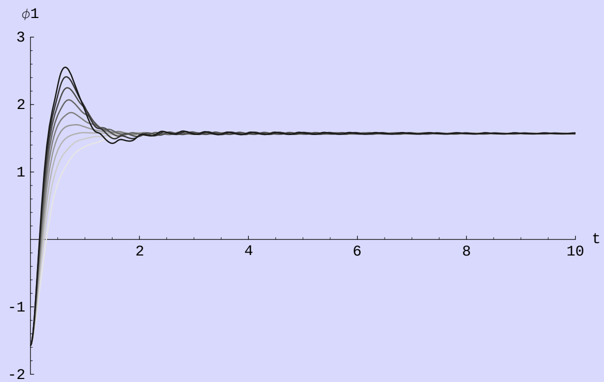
Mediante simulazioni numeriche abbiamo ottenuto i grafici:

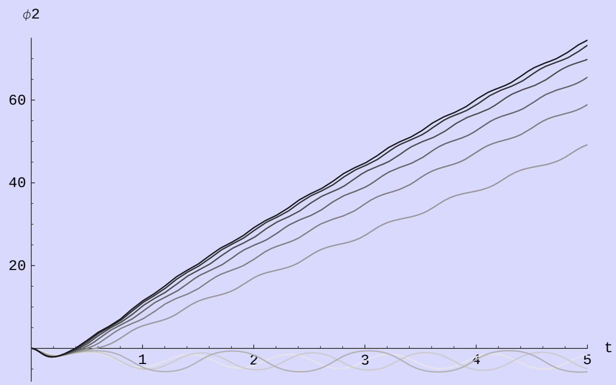


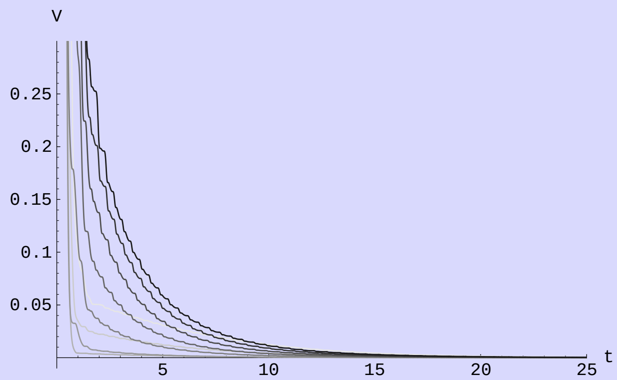




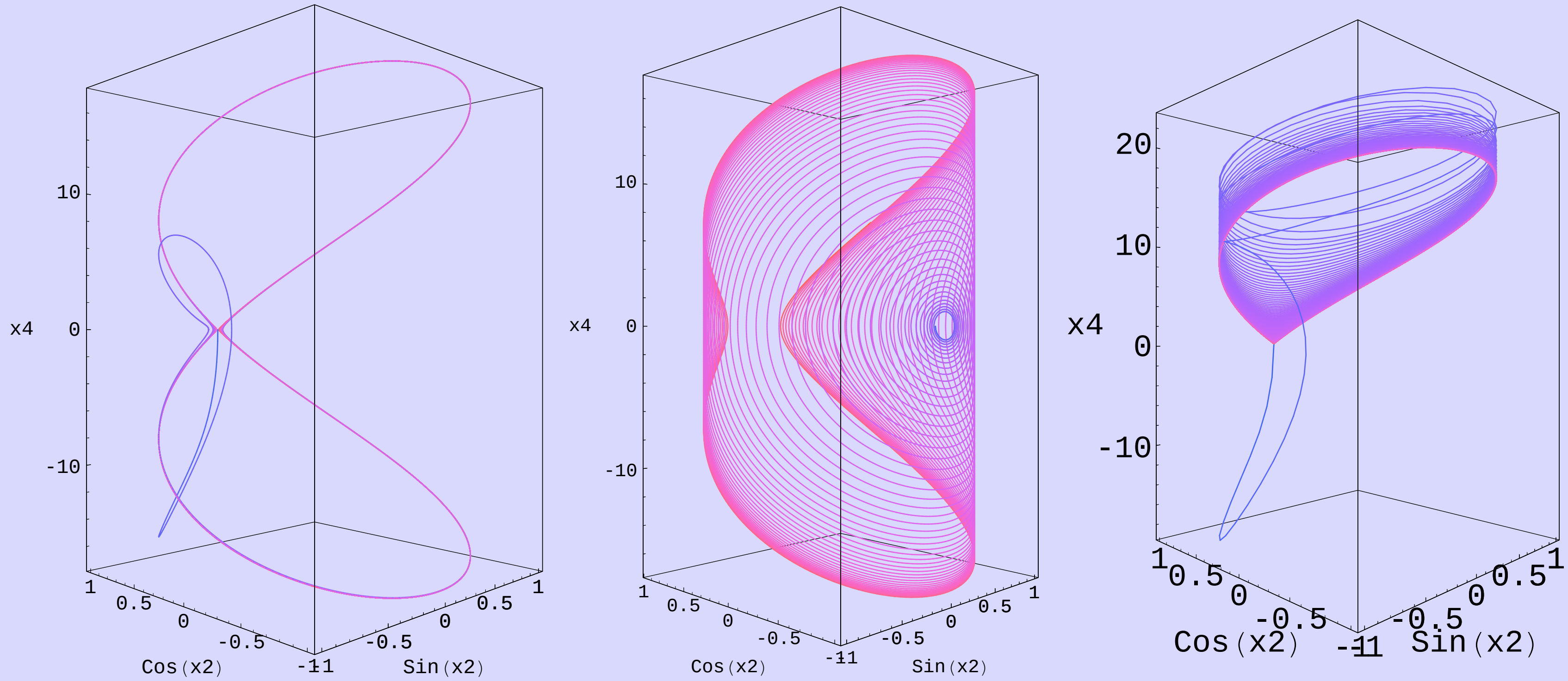
Incrementando (ulteriormente) il parametro k_E si ha:





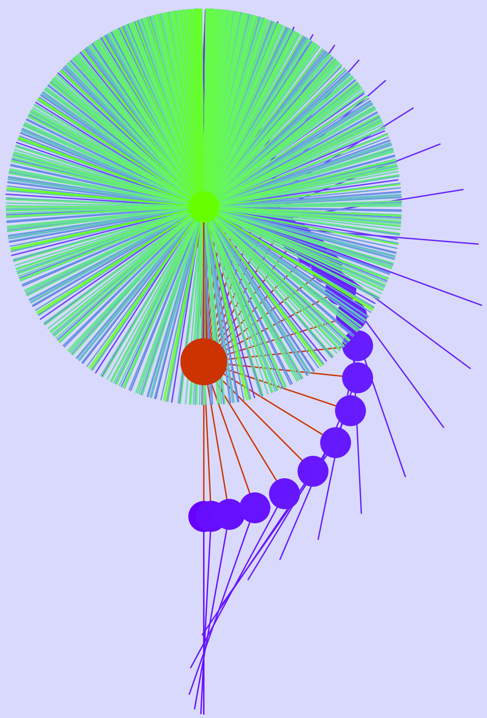


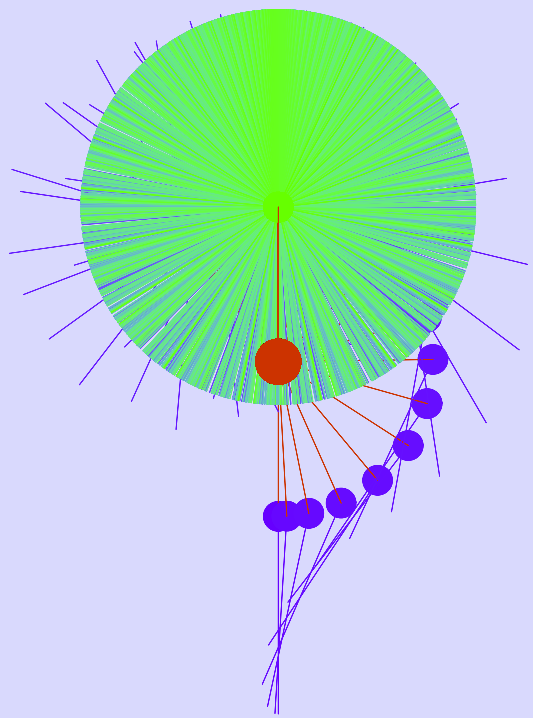
Presentiamo adesso alcune evoluzioni tipiche del Pendubot retroazionato



Notare sempre la convergenza a V_0 (ossia verso le *omocline*. . .). Inoltre $\phi_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ e $\phi_3 \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$.

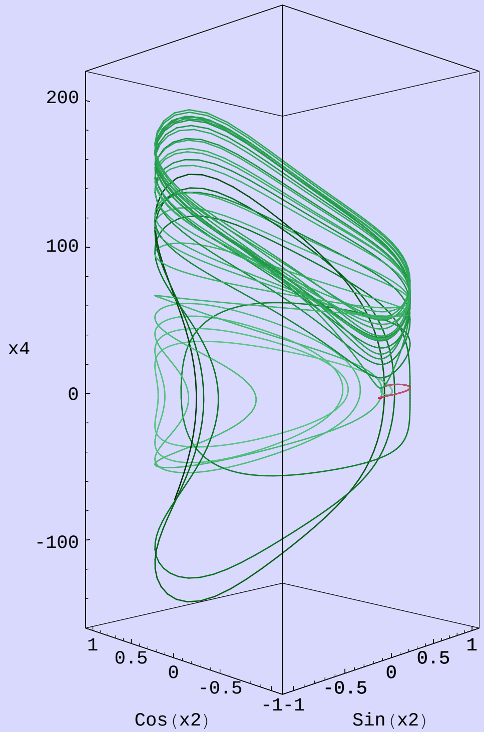
Nel tempo l'evoluzione del Pendubot si presenta tipicamente quale:

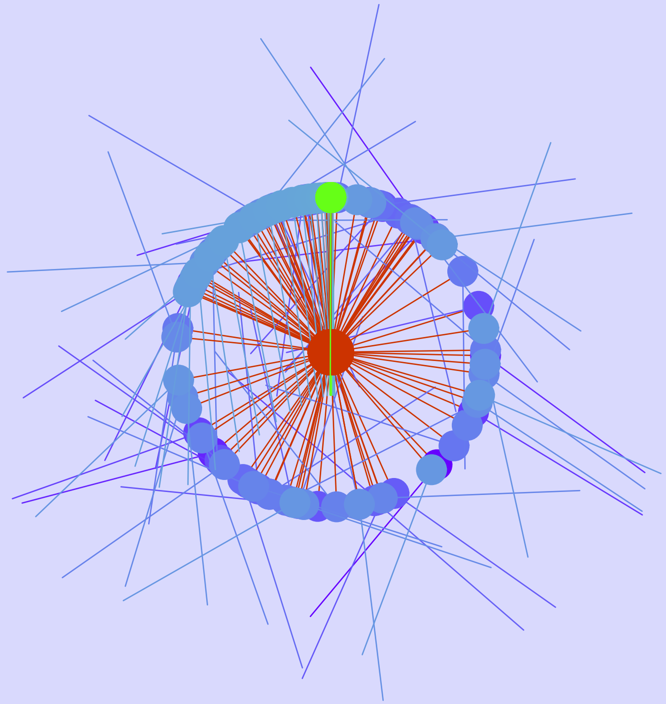


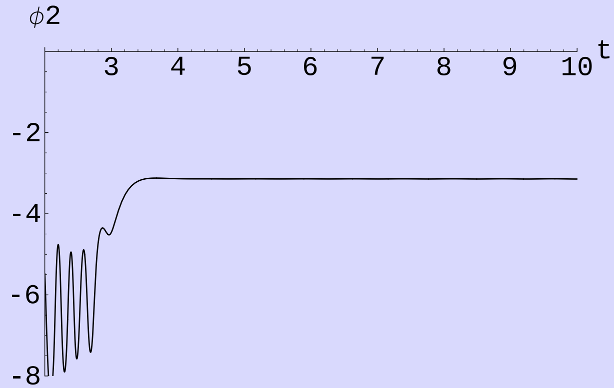


Il secondo link compie tipicamente o giri completi (fig a DX) oppure no, oscillando (fig a SX).

Riportiamo un esempio di convergenza verso $x_{E_{IND}}$:







In ogni caso comunque $x_{E_{IND}}$ è instabile e pertanto basta una piccola perturbazione per realizzare comunque lo *swing up*.

Conclusione

Considerazioni finali

Grazie ai risultati ottenuti nella prima parte del testo, è stato possibile teorizzare un controllore capace di realizzare lo swing up del Pendubot. La teorizzazione di questo controllore, chiaramente, è un lavoro costruttivo e non la semplice applicazione di risultati generali: infatti ogni sistema dinamico non lineare va studiato caso per caso, usando gli strumenti della teoria generale e non applicando questi in modo algoritmico. Numerose simulazioni numeriche hanno corroborato la validità dei risultati ottenuti.

Note tecniche

Questa presentazione è stata realizzata in LaTeX con la powerdot class.

I grafici e le simulazioni sono realizzati con Mathematica e i disegni con FreeHand.