

ANALISI E CONTROLLO DI SISTEMI NON
LINEARI CON APPLICAZIONE AD UN
ROBOT SOTTOATTUATO

Tesi di laurea in Ingegneria Elettronica

UNIVERSITÀ “LA SAPIENZA” DI ROMA

Candidato: Alessandro Bernardini
Relatore: Prof. Giuseppe Oriolo
Correlatore: Prof. Leonardo Lanari

Anno Accademico 2004-2005

*A tutti quei miei parenti
che con il loro affetto mi hanno sostenuto negli anni,
con particolare riferimento a mia nonna,
ai miei genitori,
ad Ettore Travarelli,
ed a tutti coloro che si impegnano per diffondere la cultura della legalità*

*ed a Peter Zobel, DJ5CA,
che mi ha fatto amare l'elettronica.*

Introduzione

Questo testo è idealmente diviso in due parti: nella *prima parte*, dal Capitolo 1 al Capitolo 4 incluso, si introducono i principali risultati della Teoria dei Sistemi Dinamici non lineari. Tale introduzione non è comunque, evidentemente, esautiva dell'argomento e dunque il Lettore che volesse acquisire conoscenze organiche e complete potrebbe consultare ottimi testi introduttivi e completi di Teoria dei Sistemi, quali, per esempio, [1] o [2] o anche [4] o [10], che sono da annoverare tra le principali fonti del presente scritto.

Una delle principali preoccupazioni dell'autore è stata quella di fornire il più possibile dimostrazioni chiare, complete e rigorose delle Proposizioni affermate nel testo, esplicitando (o completando) spesso le dimostrazioni tratte dalle varie fonti ed integrandole con opportune considerazioni. In tal modo il Lettore dovrebbe essere in grado di *comprendere e capire* (e non solo di apprendere e ricordare) nozioni utili per gli studi di Ingegneria in generale, senza accettare acriticamente risultati che in realtà richiedono attenzione ed una analisi oculata, condotta secondo Logica. Il testo rimane però, chiaramente, di livello introduttivo. Per facilitare la lettura, si è cercato di non ignorare nessun "passaggio" di una dimostrazione o di un calcolo. Il presente scritto risulta, tutto sommato, auto-contenuto, pur essendo una sintesi di un discorso che chiaramente potrebbe essere molto più vasto. Il testo dovrebbe essere, nelle intenzioni dell'autore, di facile lettura per chi abbia una preparazione di base in Analisi ed in Fisica.

Nella *seconda parte* del testo, dal Capitolo 5 in poi, si adoperano costruttivamente i risultati dimostrati o presentati nella prima parte al fine della teorizzazione di un opportuno controllore per un sistema sottoattuato: il sistema "Pendubot".

Tale sistema è formato da un doppio pendolo di cui il primo braccio è attuato (è collegato ad un motore elettrico), mentre il secondo è libero di muoversi¹. Anche in tale seconda parte del testo si è cercato di approfondire

¹e dunque è non attuato ed il sistema del Pendubot risulta perciò sottoattuato.

e di completare in maniera costruttiva i risultati già noti nella Letteratura a proposito del sistema del Pendubot, indagando in modo critico e completando il contenuto delle fonti (principalmente [11] e [12]). Si sono anche presentati *dimostrazioni e contenuti nuovi*, non tratti da alcuna fonte, intesi ad approfondire, integrare o semplificare la trattazione dell'argomento considerato. In ogni caso, anche nella seconda parte del testo, si è cercato di esplicitare ogni passaggio logico di una dimostrazione o algebrico di un calcolo.

Il Capitolo 6 presenta infine i risultati di numerose simulazioni numeriche, rappresentati mediante grafici, a sostegno di quanto ricavato nel Capitolo 5 in cui si è trattato del Pendubot.

Tutte le volte che nel testo si è fatto uso di contenuti tratti da fonti esterne, tali contenuti sono comunque sempre stati il più possibile verificati (ed esplicitati) e sottoposti ad analisi critica da parte dell'autore (anche nei casi in cui non viene riportata alcuna dimostrazione).

Il presente testo dunque, si occupa di Teoria dei Sistemi.

Secondo il parere dall'autore, la Teoria dei Sistemi costituisce o dovrebbe costituire, insieme all'Analisi ed alla Fisica, la base sulla quale fondare l'edificio della conoscenza ingegneristica. Infatti la Teoria dei Sistemi offre un vasto armamentario di strumenti per affrontare i problemi che nascono dalla modellizzazione matematica della realtà fisica. E tali strumenti sono indispensabili non solo al fine dello studio teorico, ma anche e soprattutto al fine delle applicazioni pratiche, in numerosi campi (tra cui la Meccanica e l'Elettronica).

Studiando un sistema dinamico non lineare non esiste però la “garanzia del successo”, ossia non si è certi di poter rispondere alle domande che ci si pone tipicamente: ogni sistema è come una cassaforte da aprire e la Teoria dei Sistemi mette a disposizione dello Studioso gli attrezzi per tentare di “scassinare²” la cassaforte in questione, ma alla fine sarà solo la tenacia, l'astuzia e l'intelligenza dello “scassinatore” a condurre al successo, sempre che la cassaforte non sia inespugnanbile. Il bottino di questo “scasso” sono le applicazioni ed il rigore dei risultati ottenuti. Nel testo gli “attrezzi da scasso” sono stati provati sul sistema Pendubot, con l'intento di realizzare un controllore capace di effettuare lo *swing up* dello stesso (ossia di portarlo nella posizione di equilibrio instabile corrispondente ai due bracci orientati

²in senso “buono”, è ovvio...

verso l'alto...).

Veniamo adesso al contenuto dettagliato del testo. Nel Capitolo 1 si introducono sinteticamente concetti, definizioni e risultati fondamentali relativi ai sistemi dinamici in generale; tali concetti vengono ampliati nel Capitolo 2 in cui si caratterizza lo spazio di stato di un sistema dinamico. Per approfondimenti relativamente agli argomenti trattati in questi capitoli sono consigliati i testi [1] e [2], nonché [4] e [3]. Nel Capitolo 3 si accenna ai sistemi integrabili (planari) per i quali è possibile individuare esplicitamente le traiettorie come curve di livello di un *integrale primo*. In particolare si considera l'esempio del pendolo semplice e si illustrano i sistemi planari conservativi mediante l'esempio di una massa vincolata a muoversi su una curva nel piano verticale. Il Lettore consulti a tale proposito [8] ed anche [1].

Il Capitolo 4 presenta importanti strumenti per lo studio di sistemi non lineari, introduce le funzioni di Lyapunov, il teorema di invarianza e di LaSalle, nonché importanti definizioni e risultati. Per le dimostrazioni si vedano in particolare [1] e [10].

Tali risultati saranno poi usati nel Capitolo 5 in cui viene proposto un controllore per il sistema del Pendubot e mediante tale esempio il Lettore si forma una idea di come è possibile controllare un sistema *sottoattuato*. Riguardo a tali argomenti si vedano [11], [12] e [13]. I risultati così ottenuti saranno ampiamente corroborati da simulazioni numeriche nel Capitolo 6.

A tale proposito va detto che le simulazioni numeriche sono solo in grado di corroborare risultati teorici ottenuti mediante la Teoria dei Sistemi, mentre al contrario non è possibile dedurre da una serie di simulazioni numeriche (per quanto accurate) alcun risultato generale e/o certo riguardo all'evoluzione di un sistema dinamico. Si pensi al caos deterministico o anche all'esistenza di varietà stabili del sistema del Pendubot retroazionato, relative al punto di equilibrio indesiderato (che tipicamente forma un punto di sella non lineare), non individuabili mediante una analisi numerica, specie se non accurata.

In questo testo sono, comprensibilmente, molti gli argomenti non toccati e l'autore si propone di colmare possibilmente questa carenza nel futuro. In particolare non si è parlato di sistemi integrabili in \mathbb{R}^n , nè del metodo variazionale secondo cui sistemi debolmente non lineari possono essere considerati come perturbazioni di sistemi lineari, nè si è parlato dello studio di soluzioni periodiche attraverso le mappe di Poincarè: anzi non si è parlato affatto di mappe, ma solo di sistemi tempo-continui. Ovviamente non si è parlato nè di caos e non si è parlato di teoria delle biforcazioni.

L'autore ringrazia chiunque voglia comunicare errori o suggerimenti o commenti relativi al presente testo, inviando la propria osservazione al seguente indirizzo di posta elettronica: a.bernardini.1979@gmail.com

Anche semplici considerazioni circa il gradimento o meno del testo sono apprezzate. L'autore incoraggia esplicitamente alla scrittura di email !

L'autore ringrazia in modo particolare il suo Correlatore, il Prof. Leonardo Lanari, del Dipartimento di Informatica e Sistemistica "Antonio Ruberti" dell'Università "La Sapienza" di Roma per la sua grande disponibilità, cortesia e professionalità.

Infine il presente testo è stato scritto con il software \LaTeX e per le simulazioni ed i grafici è stato usato Mathematica. Si è usato FreeHand per disegnare le figure.

Successivamente, l'autore ha effettuato piccole correzioni e reso i riferimenti navigabili con l'uso del package *hyperref*.

Si consiglia di attivare nel proprio lettore di file pdf gli strumenti per la navigazione (simili a quelli di un web browser). In tal modo, quando viene per esempio citato un teorema è possibile visionare questo cliccando sull'apposito link e poi ritornare al punto in cui si stava leggendo con un click sull'apposito pulsante di navigazione del lettore pdf. In tal modo visionare i riferimenti diventa una operazione semplice e veloce.

Chiunque voglia è libero di scaricare, duplicare, stampare, copiare o distribuire il presente scritto (anche in parte), purché non alteri la paternità dell'autore e la integrità del testo.

Roma, Febbraio 2006 - Dicembre 2007.

Alessandro Bernardini

Indice

Introduzione	3
Indice	7
1 Concetti fondamentali	9
1.1 Cosa è un sistema dinamico ?	9
1.2 Di quali sistemi dinamici ci occuperemo ?	10
1.3 Definizioni di base.	10
1.4 Sistemi autonomi o tempo invarianti	14
1.5 Stati di equilibrio	18
1.6 Considerazioni conclusive	19
2 Caratterizzazione dello spazio di stato.	20
2.1 Stabilità di un punto di equilibrio	20
2.2 Linearizzazione in un intorno di un punto di equilibrio	21
2.3 Richiami sui sistemi lineari	22
2.4 Classificazione dei punti di equilibrio	24
2.5 Classificazione delle traiettorie. Traiettorie omocline ed eterocline.	36
2.6 Considerazioni conclusive	37
3 Sistemi integrabili	38
3.1 Introduzione	38
3.2 Sistemi planari autonomi	38
3.2.1 Sistemi hamiltoniani	40
3.2.2 Il pendolo non dissipativo	43
3.2.3 EquaDiff del tipo $\ddot{x} = h(x)$	49
3.2.4 Integrali primi	50
3.2.5 Risoluzione di una EquaDiff del primo ordine, lineare ed a coefficienti non costanti	53
3.2.6 Esempi ulteriori	56

3.2.7	Cenni alla meccanica lagrangiana	57
3.2.8	Massa vincolata a muoversi su una curva nel piano verticale	60
3.2.9	Sistemi planari conservativi	76
3.2.10	Considerazioni finali sui sistemi planari e Teorema di Poincaré-Bendixon	76
3.3	Sistemi integrabili di ordine superiore al secondo	77
4	Teoria della stabilità	79
4.1	Introduzione	79
4.2	Insiemi limite e funzioni di Lyapunov	79
5	Controllo di sistemi dinamici sottoattuati	89
5.1	Introduzione	89
5.2	Esempio del Pendubot	92
6	Simulazioni numeriche relative al Pendubot	126
6.1	Introduzione	126
6.2	Descrizione del sistema oggetto delle simulazioni.	128
6.3	Caso di una rapida convergenza ad N_0^+	129
6.4	Caso di una lenta convergenza ad N_0^+	138
6.5	Un'altra evoluzione caratteristica del Pendubot	145
6.6	Variazione del parametro k_E	156
6.7	Cosa accade per un ulteriore incremento di k_E	163
6.8	Variazione del parametro k_D	169
6.9	Variazione del parametro k_P	177
6.10	Alcune considerazioni sul funzionamento del Pendubot retroazion- ato	183
6.11	Il Pendubot potrebbe anche non convergere a N_0^+	187
6.12	Conclusioni	197
	Considerazioni finali	199
	Bibliografia	201

Capitolo 1

Concetti fondamentali

1.1 Cosa è un sistema dinamico ?

Con il termine “sistema” si indica generalmente una determinata porzione del mondo fisico, la quale costituisce oggetto di osservazione o di studio. Nello studio della maggior parte dei sistemi è chiaramente necessario tenere conto delle interazioni tra il sistema stesso ed il resto del mondo fisico. L’aggettivo “dinamico” indica che il sistema si evolve nel tempo e il fine della Teoria dei Sistemi è proprio quello di prevedere le caratteristiche di tale evoluzione nel modo più completo possibile.

Un *sistema dinamico* pertanto è una porzione del mondo fisico che muta le sue caratteristiche nel tempo. Per descrivere in modo completo un sistema e le sue variazioni è necessario conoscere in ogni istante un insieme di variabili, chiamate variabili di stato o stato del sistema dinamico, nonché le eccitazioni che il sistema riceve dall’esterno, chiamate ingressi del sistema. Dal punto di vista della modellizzazione matematica si tratta in generale di risolvere sistemi di equazioni differenziali che legano gli ingressi, le variabili di stato del sistema e le relative derivate rispetto al tempo.

Eventualmente sarà necessario tener conto anche della aleatorietà di alcuni ingressi o di alcuni parametri del sistema, con metodi statistici e probabilistici.

Distinguiamo infine tra sistemi che evolvono in modo continuo nel tempo e sistemi che evolvono in modo discreto: per tali ultimi, chiaramente, non avremo sistemi di equazioni differenziali, ma sistemi di equazioni alle differenze finite.

La *Teoria dei Sistemi* è una branca della Matematica Applicata che si occupa in modo astratto dello studio qualitativo dei sistemi dinamici in base alle proprietà dei sistemi di equazioni differenziali con cui vengono modelliz-

zati tali sistemi dinamici. La Teoria dei Sistemi studia dunque le equazioni differenziali e le loro proprietà, servendosi di risultati di Analisi Matematica, Analisi Numerica, Analisi Funzionale, Calcolo delle Variazioni.

1.2 Di quali sistemi dinamici ci occuperemo ?

Prenderemo in considerazione i sistemi modellizzabili da equazioni differenziali del tipo:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (1.1)$$

ove $x(t) \in \mathbb{R}^n$ indica il vettore di stato del sistema (lo stato), t indica il tempo, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ secondo la notazione di Newton ed ove f è una funzione continua definita in un sottoinsieme di \mathbb{R}^{n+1} a valori in \mathbb{R}^n .

Il vettore di stato $x(t)$ va pensato come vettore colonna e nel seguito verrà omessa tale precisazione.

Non è una eccessiva limitazione prendere in considerazione solo equazioni del tipo (1.1): infatti degli effetti di eventuali ingressi (considerati dati) del sistema dinamico si tiene conto mediante la dipendenza di f dal tempo¹ ed inoltre un generico sistema di equazioni differenziali è sempre equivalente ad un sistema del primo ordine del tipo (1.1). Ci occuperemo in seguito più approfonditamente di tali argomenti, dopo aver introdotto concetti più basilari.

Lo scopo del nostro lavoro sarà quello di caratterizzare il più possibile il comportamento del sistema dinamico, mediante lo studio delle proprietà della equazione che lo descrive, del tipo della (1.1).

1.3 Definizioni di base.

Definizione 1.3.1 *Sia data una equazione differenziale del tipo (1.1), che qui riscriviamo per comodità:*

$$\dot{x} = f(x, t) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.2)$$

si dice che $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $I \subseteq \mathbb{R}$ è una soluzione della (1.2) se vale:

$$\dot{\lambda}(t) = f(\lambda(t), t) \quad \forall t \in I \quad (1.3)$$

¹Si parla in tale caso di sistemi dinamici forzati e la funzione f tiene appunto conto anche degli effetti del termine forzante, ovvero dell'ingresso considerato. Si osservi esplicitamente che data una funzione $f(x(t), u(t), t)$ si può sempre porre $f^*(x(t), t) = f(x(t), u(t), t)$, ove $u(t)$ è una funzione che descrive un (particolare) ingresso per un dato sistema dinamico considerato.

Chiaramente il punto $(\lambda(t), t)$ dovrà restare all'interno dell'insieme di definizione della f al variare di t in $I \subseteq \mathbb{R}$.

Molto spesso interessa la ricerca di una soluzione $\lambda(t)$ che in un determinato istante τ assuma un dato valore $\xi \in \mathbb{R}^n$. Interessa cioè che sia:

$$\lambda(\tau) = \xi \quad (1.4)$$

Questa condizione si chiama *condizione iniziale* ed il problema della ricerca di una soluzione $\lambda(t)$ che sia soluzione della equazione differenziale (1.2) e che verifichi la condizione iniziale prende il nome di *problema di Cauchy*.

Esistono anche i cosiddetti problemi al contorno, di cui non verrà parlato in questa sede.

Chiaramente il punto $(\xi, \tau) = (\lambda(\tau), \tau)$ deve appartenere all'insieme di definizione della f , come si evince se si considera che debbono essere soddisfatte le (1.4) e (1.3).

In generale il punto $(\lambda(t), t)$ dovrà restare all'interno dell'insieme di definizione della f al variare di t .

Se la f è una funzione continua rispetto a t e Lipschitziana rispetto ad x nel suo insieme di definizione, si può dimostrare che per ogni problema di Cauchy esiste una unica soluzione continua λ_{max} definita in un aperto $]I^-, I^+[\subseteq \mathbb{R}$ che verifica la (1.3) e la condizione iniziale (1.4) e tale che ogni altra soluzione continua dello stesso problema di Cauchy risulta necessariamente definita su un sottointervallo $J \subseteq]I^-, I^+[$. In altre parole λ_{max} è la soluzione continua più estesa (massima).

Alla luce di quanto detto introduciamo dunque la seguente

Definizione 1.3.2 *Sia dato un aperto D di \mathbb{R}^{n+1} ed una funzione $f(x, t)$ con $x \in \mathbb{R}^n$ definita in D , continua rispetto a t e Lipschitziana rispetto ad x . Allora per ogni punto (ξ, τ) di D il problema di Cauchy relativo alla equazione differenziale*

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (1.5)$$

con la condizione iniziale $\lambda(\tau) = \xi$ ammetterà² una unica soluzione (massima) che indicheremo in modo più preciso con la scrittura $\lambda(t; \xi, \tau)$. In tal modo si sottolinea che la specifica soluzione del problema di Cauchy è funzione della condizione iniziale ξ all'istante iniziale τ .

²Il simbolo λ indica la soluzione cercata del problema di Cauchy in questione, tuttavia molto spesso si indica la soluzione con x , ossia come lo stesso simbolo della variabile nella equazione differenziale.

Si ricordi peraltro che una funzione $f(x, t)$, con $x \in \mathbb{R}^n$ si dice *Lipschitziana* rispetto ad x se esiste una costante $L \geq 0$ tale che

$$\|f(x_1, t) - f(x_2, t)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in D \quad \forall t \in J \quad (1.6)$$

essendo $D \times J$ l'insieme di definizione di f . La costante L prende il nome di *costante di Lipschitz*.

La dimensione del vettore di stato x specificherà dunque quante sono le *condizioni iniziali* da assegnare, essendo chiaramente ξ della stessa dimensione di x : per un sistema di dimensione n occorre dunque specificare n condizioni iniziali sullo stato al tempo τ per fissare la unica soluzione λ del problema di Cauchy considerato.

La *soluzione generale* $\lambda(t; \xi, \tau)$ si può chiaramente graficare in funzione del tempo (eventualmente considerando opportune proiezioni se ci troviamo in spazi a dimensione superiore) ottenendo le curve o i grafici delle varie soluzioni al variare della condizione iniziale. Tali curve saranno date, al variare della condizione iniziale, ossia al variare dei valori di ξ e/o di τ , da tutti i punti di \mathbb{R}^{n+1} individuati dall'insieme $\{(t, \lambda(t; \xi, \tau)) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in I\}$ essendo I l'insieme di definizione della soluzione $\lambda(t; \xi, \tau)$, conformemente a quanto detto nella Definizione 1.3.1.

Molto utile risulta la seguente

Proposizione 1.3.1 (Riduzione a sistemi di primo ordine.) *Sia data una funzione $g : D \subseteq \mathbb{R}^{1+\nu n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ allora il sistema n dimensionale di ordine ν definito da³*

$$x^{(\nu)} = g(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(\nu-1)}) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.7)$$

è equivalente al sistema di dimensione νn e del primo ordine dato da:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \vdots \\ \dot{y}_{\nu-1} = y_\nu \\ \dot{y}_\nu = g(t, y_1, y_2, \dots, y_\nu) \end{cases} \quad (1.8)$$

con $y_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, \nu$, nel senso che:

- Se $\lambda(t)$ è soluzione⁴ del sistema (1.7), allora $(\lambda(t), \dot{\lambda}(t), \dots, \lambda^{(\nu-1)}(t))$ è soluzione del sistema (1.8) che è un sistema del tipo (1.5).

³ $x^{(j)}$ indica la derivata j -esima rispetto a t .

⁴Ossia se $\lambda(t)$, sostituita al posto della x nella (1.7) rende identicamente verificata tale uguaglianza (in un opportuno insieme di definizione).

- Se $(\mu_1(t), \dots, \mu_\nu(t))$ è soluzione del sistema (1.8), allora $\mu_1(t)$ è soluzione del sistema (1.7).

Si osservi che dovrà essere $(t, y_1, \dots, y_\nu) \in D$.

Inoltre abbiamo che se una soluzione $\lambda(t)$ di (1.7) soddisfa alla condizione iniziale

$$\lambda(t_0) = x_0, \quad \dot{\lambda}(t_0) = x_1, \quad \dots, \quad \lambda^{(\nu-1)}(t_0) = x_{\nu-1} \quad (1.9)$$

allora la soluzione corrispondente di (1.8) verifica la condizione iniziale

$$\mu_1(t_0) = x_0, \quad \mu_2(t_0) = x_1, \quad \dots, \quad \mu_\nu(t_0) = x_{\nu-1} \quad (1.10)$$

e viceversa. Il punto $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{\nu-1})$ appartiene a D con $x_j \in \mathbb{R}^n$ per $j = 0, \dots, \nu - 1$.

Dimostrazione: Sia λ una soluzione di (1.7), allora si avrà⁵ che

$$\lambda^{(\nu)}(t) = g(t, \lambda(t), \dots, \lambda^{(\nu-1)}(t)) \quad (1.11)$$

Poniamo:

$$(\mu_1, \dots, \mu_\nu) = (\lambda, \dots, \lambda^{(\nu-1)})$$

derivando ambo i membri si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mu}_1 = \dot{\lambda} = \mu_2 \\ \dot{\mu}_2 = \ddot{\lambda} = \mu_3 \\ \vdots \\ \dot{\mu}_{\nu-1} = \lambda^{(\nu-1)} = \mu_\nu \\ \dot{\mu}_\nu = \lambda^{(\nu)} = g(t, \mu_1(t), \dots, \mu_\nu(t)) \end{array} \right.$$

ove nell'ultima eguaglianza si è fatto uso anche della (1.11). Quanto scritto significa proprio che $(\mu_1, \dots, \mu_\nu) = (\lambda, \dots, \lambda^{(\nu-1)})$ è una soluzione del sistema (1.8) e questo era quanto si intendeva dimostrare. Per quanto riguarda le condizioni iniziali la tesi segue banalmente.

Viceversa, se vale

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mu}_1 = \mu_2 \\ \dot{\mu}_2 = \mu_3 \\ \vdots \\ \dot{\mu}_\nu = g(t, \mu_1(t), \dots, \mu_\nu(t)) \end{array} \right.$$

⁵per ogni t dell'insieme di definizione

si osserva che

$$\dot{\mu}_1 = \mu_2, \quad \ddot{\mu}_1 = \dot{\mu}_2 = \mu_3, \quad \dots, \quad \mu_1^{(\nu-1)} = \mu_\nu \quad (1.12)$$

e pertanto, derivando ancora una volta e tenendo conto delle equazioni precedenti, nonchè del fatto che μ è soluzione del sistema (1.8) si ottiene che

$$\mu_1^{(\nu)} = \dot{\mu}_\nu = g(t, \mu_1(t), \dots, \mu_\nu(t)) = g\left(t, \mu_1(t), \dot{\mu}_1(t), \dots, \mu_1^{(\nu-1)}(t)\right)$$

e questo vuol dire che $\mu_1(t)$ è soluzione della (1.7). La tesi circa le condizioni iniziali segue facilmente.

La proposizione risulta così completamente dimostrata. \square

1.4 Sistemi autonomi o tempo invarianti

Nel seguito considereremo sistemi descritti da equazioni differenziali del tipo:

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.13)$$

detti *sistemi autonomi o tempo invarianti*, con $x \in \mathbb{R}^n$ (ed f funzione vettoriale, chiaramente). Anche qui, a rigore, x va pensato come vettore colonna⁶. Questo, da un punto di vista teorico, non è restrittivo.

Vale infatti la seguente

Proposizione 1.4.1 *Sia dato un sistema*

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (1.14)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ ed il sistema autonomo

$$\begin{cases} \dot{s} = 1 \\ \dot{y} = f(y, s) = g(s, y) \end{cases} \quad (1.15)$$

con $y \in \mathbb{R}^n$ e $s \in \mathbb{R}$ ed avendo posto per definizione $g(s, y) := f(y, s)$, per una maggiore chiarezza.

Allora:

- se $\lambda(t)$ è soluzione di (1.14) si ha che $(t, \lambda(t))$ è soluzione del sistema (1.15).
- se $(t, \nu(t))$ è soluzione di (1.15), allora $\nu(t)$ è soluzione di (1.14)

⁶Ometteremo in seguito tale precisazione.

Dimostrazione: poichè $\dot{\lambda} = f(\lambda(t), t)$ e $\dot{t} = 1$ si verifica facilmente la prima parte della tesi.

Viceversa se $(t, \nu(t))$ è soluzione di (1.15) questo implica che

$$\dot{\nu} = g(t, \nu(t)) = f(\nu(t), t)$$

da cui la tesi. □

Si osservi che (1.15) è un sistema autonomo, in base alla definizione data in precedenza, con vettore di stato dato da $\begin{pmatrix} s \\ y \end{pmatrix}$.

Anche per un sistema autonomo del tipo (1.13) vale quanto detto in generale per i sistemi del tipo (1.5), in particolare circa l'esistenza delle soluzioni $\lambda(t; \xi, \tau)$.

Proposizione 1.4.2 *Sia dato un sistema autonomo*

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.16}$$

Si consideri la soluzione $\lambda(t)$ che soddisfa al problema dei valori iniziali dato da $\lambda(\tau) = \xi$ e si indichi tale soluzione con $\lambda(t; \xi, \tau)$ (che esiste ed è unica se f è Lipschitziana), allora vale la seguente identità

$$\lambda(t; \xi, \tau) = \lambda(t - \tau; \xi, 0) \tag{1.17}$$

Si osservi che, in generale, è $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ e $t, \tau \in \mathbb{R}$.

Tale proposizione esprime l'invarianza per traslazione delle soluzioni di sistemi autonomi.

La conseguenza di tale proposizione è che per studiare l'evoluzione del sistema relativa allo stato iniziale (ξ, τ) è sufficiente studiare la risposta del sistema alla condizioni iniziali $(\xi, 0)$ e poi traslare di τ la soluzione ottenuta.

Definizione 1.4.1 *Si pone*

$$\phi(t - \tau, \xi) = \lambda(t; \xi, \tau) \tag{1.18}$$

o meglio:

$$\phi(t, \xi) = \lambda(t; \xi, 0) \tag{1.19}$$

La funzione ϕ prende il nome di flusso relativo al sistema dinamico autonomo (1.13) ed alla condizione iniziale ξ (specificata per $t = 0$).

Si osservi che, dovendo essere verificata la condizione iniziale per $t = 0$, risulta:

$$\phi(0, \xi) = \lambda(0; \xi, 0) = \xi \quad (1.20)$$

Definizione 1.4.2 *L'insieme dei punti $\{\phi(t; \xi) \in \mathbb{R}^n : t \in I\}$ prende il nome di traiettoria⁷ relativa al sistema (1.13). Al variare della condizione iniziale ξ si otterranno dunque una famiglia di traiettorie che saranno un insieme di curve in \mathbb{R}^n .*

Per quanto detto in precedenza, invece, il grafico di una soluzione è una curva in \mathbb{R}^{n+1} , ovvero l'insieme dei punti di \mathbb{R}^{n+1} dati da $\{(t, \phi(t; \xi)) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in I\}$ con I insieme di definizione della soluzione considerata⁸.

Si tenga presente inoltre che la soluzione $\phi(t; \xi)$ al tempo $t = 0$ assume proprio il valore $\xi \in \mathbb{R}^n$ e che dunque tale valore deve far parte del dominio della f se deve essere rispettata l'identità $\dot{\phi} = f(\phi(t; \xi))$, come si vede da quanto detto con poche considerazioni.

Esempio 1.4.1 Consideriamo un sistema autonomo bidimensionale, descritto mediante le equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \quad (1.21)$$

Come condizione iniziale vogliamo che la soluzione assuma (al tempo $\tau = 0$) il valore $(x_1, x_2) = (\xi, \eta)$.

La soluzione generale di tale problema dei valori iniziali è data da:

$$\lambda(t; (\xi, \eta), \tau = 0) = \phi(t; (\xi, \eta)) = (\xi \cos t + \eta \sin t, \eta \cos t - \xi \sin t) \quad (1.22)$$

Derivando infatti ambo le componenti del vettore si ottiene

$$\dot{\phi} = (-\xi \sin t + \eta \cos t, -\eta \sin t - \xi \cos t) = (\dot{\phi}_{x_1}, \dot{\phi}_{x_2})$$

e si osserva subito che

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{x_1} &= \phi_{x_2} \\ \dot{\phi}_{x_2} &= -\phi_{x_1} \end{aligned}$$

avendo indicato con $(\phi_{x_1}, \phi_{x_2}) = \phi$ le componenti della soluzione (1.22).

Pertanto in base alla Definizione 1.3.1 ed in base alla Definizione 1.4.1 si può dedurre che ϕ individua effettivamente la soluzione cercata.

⁷Ricordiamo che I indica l'insieme di definizione della soluzione, ossia l'insieme di valori di t per cui $\phi(t; \xi)$ esiste, cade nel dominio della f e per cui valga $\dot{\phi} = f(\phi(t; \xi))$.

⁸Si tenga sempre conto della Definizione 1.4.1

Inoltre tale soluzione verifica le condizioni iniziali.

Infatti

$$\phi(t = 0) = \lambda(0; (\xi, \eta), \tau = 0) = (\xi, \eta)$$

Si noti che abbiamo rispettato la simbologia della Definizione 1.3.2 e della Definizione 1.4.1

Osserviamo ora una particolare soluzione, quella che si ottiene imponendo la condizione iniziale $(\xi, \eta) = (10, 10)$. Essa è riportata in funzione di t , a destra in Figura 1.1.

Invece sulla sinistra di Figura 1.1 è riportata la traiettoria relativa alla soluzione considerata: come si vede la traiettoria è una curva del piano, mentre il grafico della soluzione viene disegnato nello spazio a tre dimensioni.

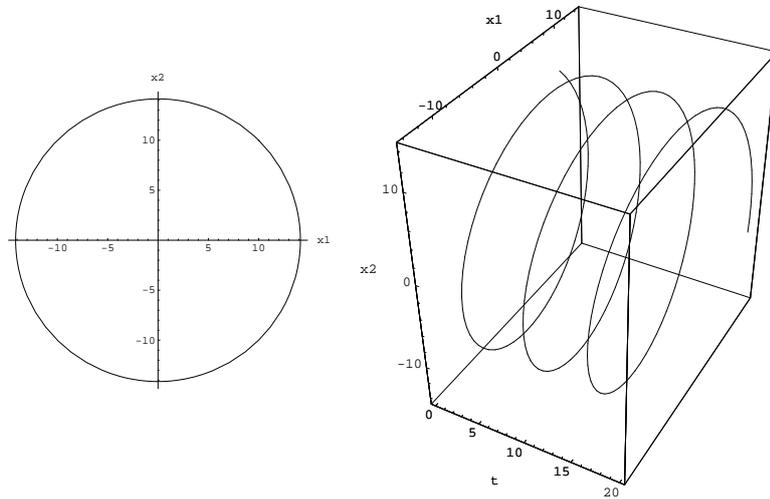


Figura 1.1: Traiettoria e grafico relativo ad una soluzione.

□

Non è difficile vedere come, in base alla Definizione 1.4.2 ed in base alla definizione di grafico di una soluzione, si possa considerare una traiettoria come la proiezione del grafico della soluzione (del flusso) corrispondente sull'iperpiano non contenente l'asse t . Nell'esempio fatto, la traiettoria è la proiezione del grafico della soluzione sul piano x_1x_2 .

Un sistema risulta sufficientemente caratterizzato se se ne conoscono tutte le sue traiettorie.

Su una curva che descrive una traiettoria si fissa un *verso*, concorde con il verso individuato dal moto del punto $\phi(t; \xi)$, per t crescente.

Nell'esempio fatto si può vedere che la traiettoria (che è circolare) va considerata con verso orario: considerando infatti la proiezione sul piano xy

del grafico della soluzione (del flusso), si osserva che per t crescente il punto $\lambda(t; (10, 10), 0)$ sul piano xy si muove appunto in verso orario (lungo la traiettoria).

Osserviamo il seguente risultato:

Proposizione 1.4.3 *Sia dato il sistema dinamico autonomo $\dot{x} = f(x)$, allora se una traiettoria passa per il punto ζ essa, in tale punto, è tangente al vettore $f(\zeta)$.*

Dimostrazione: ipotizziamo che una traiettoria passi per il punto ζ ed indichiamo con $\phi(t)$ il flusso che genera tale traiettoria. Dovrà chiaramente essere, per un certo istante τ che $\phi(\tau) = \zeta$. Ma ϕ deve essere soluzione del sistema autonomo e dunque deve valere l'uguaglianza

$$\dot{\phi} = f(\phi(t)) \quad \forall t \in I \quad (1.23)$$

In particolare all'istante τ si deve avere $\dot{\phi}(t = \tau) = f(\phi(\tau)) = f(\zeta)$ e dunque la derivata del flusso assume il valore di $f(\zeta)$ nell'istante τ in cui il flusso stesso assume il valore ζ . Ricordando la Definizione 1.4.2 di traiettoria, si osserva come questa possa essere interpretata come la traiettoria di un punto che si muove con legge oraria $\phi(t)$ nello spazio di stato. Ma se un punto si trova in un certo istante τ nel punto ζ , esso si muoverà tangenzialmente al vettore della sua velocità, dato dalla derivata rispetto a t della legge oraria, ossia dato da $\dot{\phi}(t = \tau) = f(\zeta)$. Da tutto questo segue la tesi. \square

Per ciascun punto dell'insieme di definizione della f , inoltre, passa una unica traiettoria. Ciò segue dall'unicità delle soluzioni di sistemi autonomi, dall'invarianza per traslazione delle soluzioni di sistemi autonomi, nonché dalla definizione di traiettoria.

Da quanto detto segue che graficare il campo vettoriale $f(x)$ dà una prima idea, approssimativa e qualitativa, di come è l'insieme delle traiettorie relative al sistema autonomo $\dot{x} = f(x)$. Considerando infatti un punto ξ , la traiettoria $\phi(t; \xi)$ sarà ottenuta "muovendosi lungo", ossia tangenzialmente, al campo vettoriale f in conseguenza della Proposizione 1.4.3.

1.5 Stati di equilibrio

Definizione 1.5.1 *Dato un sistema autonomo $\dot{x} = f(x)$, con $x \in \mathbb{R}^n$ si dice che $x_E \in \mathbb{R}^n$ è un punto di equilibrio se $f(x_E) = 0$.*

Proposizione 1.5.1 *Il flusso $\phi(t; x_E)$, con x_E punto di equilibrio del sistema autonomo $\dot{x} = f(x)$, si riduce alla costante*

$$\phi(t; x_E) = \phi(0; x_E) = x_E \quad \forall t \quad (1.24)$$

Dimostrazione: osserviamo che deve essere $\dot{\phi} = f(\phi(t; x_E))$ per ogni $t \in I$, in virtù della definizione di soluzione e di flusso di un sistema autonomo. Ma la funzione costante $\phi(0; x_E) = x_E$ verifica tale equazione, infatti:

$$f(\phi(0; x_E)) = f(x_E) = 0 = \dot{\phi} = \dot{\phi}(0; x_E) = \dot{x}_E \quad (1.25)$$

in quanto la derivata di una funzione costante è nulla e ricordando la definizione di punto di equilibrio.

La tesi discende poi dall'unicità della soluzione (del flusso). □

Come conseguenza la traiettoria che passa per un punto di equilibrio è costituita soltanto dal punto di equilibrio stesso e dunque degenera in un unico punto dello spazio di stato.

Graficando il campo vettoriale $f(x)$, i punti di equilibrio del sistema dinamico autonomo corrisponderanno chiaramente ai punti dello spazio di stato in cui il vettore f si annulla.

1.6 Considerazioni conclusive

In questo capitolo abbiamo introdotto le definizioni di base necessarie per intraprendere lo studio della Teoria dei Sistemi. Abbiamo infatti definito cosa è un *sistema dinamico*, che cosa si intende per *stato* di un sistema, abbiamo ricordato che la Teoria dei Sistemi è una branca della Matematica Applicata che studia principalmente in modo qualitativo le equazioni differenziali che modellizzano i sistemi fisici e abbiamo definito i concetti di *soluzione*, *flusso*, *grafico di una soluzione* di un sistema dinamico, nonché di *traiettoria*. Abbiamo altresì dimostrato alcuni importanti risultati ed introdotto il concetto di *punto di equilibrio*.

Nel prossimo capitolo approfondiremo la caratterizzazione dello spazio di stato, introducendo nuovi concetti ed approfondendo quelli fino ad ora presentati.

Capitolo 2

Caratterizzazione dello spazio di stato.

In base a quanto detto nel Capitolo 1 abbiamo intuito che le proprietà di un dato sistema dinamico sono determinate dalle caratteristiche dell'insieme delle sue traiettorie e dei suoi punti di equilibrio nello spazio di stato. In questo capitolo affronteremo in maniera più approfondita la questione della caratterizzazione di traiettorie e punti di equilibrio di un sistema dinamico al fine dello studio delle proprietà di questo.

2.1 Stabilità di un punto di equilibrio

Definizione 2.1.1 *Un punto di equilibrio x_E di un sistema dinamico autonomo $\dot{x} = f(x)$ è detto punto di equilibrio stabile se e solo se per ogni intorno V del punto di equilibrio x_E esiste un altro intorno W di x_E tale che*

$$\xi \in W \quad \Rightarrow \quad \phi(t; \xi) \in V \quad \forall t > 0 \quad (2.1)$$

Questo significa che per ogni punto ξ sufficientemente vicino al punto di equilibrio x_E la traiettoria relativa al flusso $\phi(t; \xi)$ non si allontana mai oltre una certa distanza specificata dal punto di equilibrio x_E stesso (per $t > 0$), ossia rimane sempre contenuta nell'intorno V di x_E (per $t > 0$).

Definizione 2.1.2 *Se un punto di equilibrio x_E di un sistema dinamico autonomo è stabile e se esiste un intorno W di x_E tale che*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t; \xi) = x_E \quad \forall \xi \in W \quad (2.2)$$

allora il punto di equilibrio x_E è detto asintoticamente stabile.

Un punto di equilibrio è detto *instabile* se non è stabile.

Spesso ci si domanda se una traiettoria che passa per un punto ξ dello spazio di stato (e dell'insieme di definizione della f) converga ad un dato punto di equilibrio x_E o se, almeno, non si allontani (mai) da questo.

Per rispondere a questa domanda si può tentare di ricorrere alla ricerca di una funzione di Lyapunov¹.

L'uso di una funzione di Lyapunov è un ottimo metodo per investigare la stabilità globale di un punto di equilibrio x_E , ossia per sapere se una traiettoria che passi per un punto ξ appartenente alla frontiera di un intorno di x_E converga al punto di equilibrio x_E o, almeno, non si allontani (mai) da esso².

Approfondiremo nel seguito la teoria della stabilità per sistemi dinamici (si veda in particolare la Sezione 4.2 a pagina 79) con un approccio più generale.

2.2 Linearizzazione in un intorno di un punto di equilibrio

Per investigare le caratteristiche delle varie traiettorie in un intorno immediato di un punto di equilibrio, nonchè per sapere se questo è stabile asintoticamente, è spesso conveniente linearizzare il sistema dinamico autonomo in un intorno del punto di equilibrio in questione.

Proposizione 2.2.1 *Dato un sistema dinamico autonomo $\dot{x} = f(x)$ ed un suo punto di equilibrio $x_0 \in \mathbb{R}^n$, allora in un intorno sufficientemente piccolo di x_0 le traiettorie del sistema considerato sono approssimate dalle traiettorie del sistema*

$$\dot{x} = A(x - x_0) \quad (2.3)$$

essendo

$$A = Df(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} (x_0) \quad (2.4)$$

¹o Ljapunov.

²Si parla cioè di stabilità asintotica o semplice.

lo Jacobiano di f calcolato in $x_0 \in \mathbb{R}^n$, purchè però A non abbia autovalori a parte reale nulla.

La scrittura f_j indica la componente j -esima della funzione vettoriale f e x_j indica la componente j -esima del vettore di stato $x \in \mathbb{R}^n$, per $j = 1, \dots, n$.

Studiando il sistema (2.3) si possono applicare tutti i risultati relativi ai sistemi lineari. La stabilità del punto di equilibrio x_0 sarà pertanto in relazione al segno della parte reale degli autovalori della matrice A (assumendo che non vi siano autovalori a parte reale nulla, ossia che il punto di equilibrio x_0 sia iperbolico).

2.3 Richiami sui sistemi lineari

Proposizione 2.3.1 *Sia dato un sistema lineare del tipo*

$$\dot{x} = A(x - x_0) \quad (2.5)$$

allora se $\zeta(t)$ è una soluzione del sistema

$$\dot{z} = Az \quad (2.6)$$

la funzione $\chi(t) = \zeta(t) + x_0$ è soluzione del sistema (2.5).

Si osservi inoltre che se vale la condizione iniziale $\zeta(0) = \kappa$, si avrà che χ verifica la condizione iniziale $\chi(0) = \kappa + x_0$.

Dimostrazione: per ipotesi si ha che $\dot{\zeta} = A\zeta(t)$, dunque

$$\dot{\chi} = \dot{\zeta} = A\zeta(t) = A(\chi(t) - x_0)$$

avendosi chiaramente $\zeta(t) = \chi(t) - x_0$. Ma allora χ è soluzione di (2.5) e dunque la tesi è dimostrata. \square

Proposizione 2.3.2 *Se $\psi(t; \kappa)$ è il flusso relativo al sistema (2.6), allora si ha che $\phi(t; \xi) = \psi(t; \xi - x_0) + x_0$ è il flusso relativo al sistema (2.5).*

Dimostrazione: consideriamo un generico punto ξ e notiamo che $\psi(t; \xi - x_0)$ è soluzione di (2.6).

Ma allora

$$\psi(t; \xi - x_0) + x_0 = \phi(t; \xi)$$

è soluzione di (2.5) in virtù della Proposizione 2.3.1.

Inoltre, dalla definizione di flusso e dalle proprietà di questo, si ha che

$$\phi(0; \xi) = \psi(0; \xi - x_0) + x_0 = \xi - x_0 + x_0 = \xi$$

da ciò e dall'unicità della soluzione di un sistema dinamico discende la tesi. In via alternativa ci si poteva riferire anche alla seconda parte della Proposizione 2.3.1 \square

Se si vuole dunque studiare il sistema (2.5) nei pressi del suo punto di equilibrio x_0 , basterà studiare il sistema (2.6) nei pressi dell'origine³. Alle traiettorie così ottenute basterà sommare il vettore x_0 (ossia si trasla attorno ad x_0) per ottenere le traiettorie del sistema (2.5) che si intende studiare.

Il sistema (2.6) risulta sempre risolvibile ed il flusso ad esso relativo vale

$$\psi(t; \kappa) = e^{At} \kappa \quad (2.7)$$

in cui, ricordiamo, A è una matrice $n \times n$.

Pertanto, per la Proposizione 2.3.2, sarà

$$\phi(t; \xi) = e^{At}(\xi - x_0) + x_0 \quad (2.8)$$

per quanto riguarda il flusso del sistema (2.5), come si verifica molto semplicemente anche in modo diretto⁴.

Da quanto detto si comprende che occorre calcolare l'esponenziale di matrice e^{At} al fine dello studio del sistema in questione.

Qualora la matrice A risulti diagonalizzabile è facile calcolare l'esponenziale di matrice, infatti in tale ipotesi risulta:

$$e^{At} = T^{-1} e^{\Lambda t} T \quad (2.9)$$

ove Λ è una matrice diagonale formata dagli autovalori (reali o complessi) relativi alla matrice A e T^{-1} è una matrice $n \times n$ le cui colonne sono formate da n autovettori (linearmente indipendenti), in modo tale che il j -esimo autovettore⁵ corrisponda al j -esimo autovalore sulla diagonale della matrice Λ ($j = 1, \dots, n$). La matrice T^{-1} dovrà ammettere l'inversa T .

Sono ammessi autovalori multipli, purchè ad ogni autovalore multiplo con molteplicità algebrica μ_j corrispondano μ_j autovettori (linearmente indipendenti) nella matrice T^{-1} (con inversa T).

Si dimostra che vale la seguente relazione:

$$\psi(t; \kappa) = e^{At} \kappa = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k t} v_k \quad (2.10)$$

³ossia del vettore nullo

⁴Le proposizioni 2.3.1 e 2.3.2 continuerebbero a valere anche se al posto delle scritte $A(x - x_0)$ ed Az si considerassero le scritte $f(x - x_0)$ e $f(z)$, ove f è una funzione vettoriale che definisce un sistema dinamico generico.

⁵ossia la j -esima colonna della matrice T^{-1}

ove λ_k è il k -esimo autovalore sulla diagonale della matrice Λ (in conformità a quanto detto prima) a cui corrisponde (nella matrice T^{-1}) l'autovettore v_k (ossia v_k forma appunto la k -esima colonna di T^{-1}), mentre i coefficienti c_k sono

$$c_k = w_k \kappa \quad (2.11)$$

con w_k k -esima riga della matrice T , inversa di T^{-1} , e κ condizione iniziale considerata.

Vale inoltre la relazione

$$\psi(0; \kappa) = \kappa = \sum_{k=1}^n c_k v_k \quad (2.12)$$

Per ulteriori osservazioni e considerazioni, nonché per una trattazione rigorosa ed esauriente si rimanda a testi che trattano di Sistemi Lineari.

Le espressioni scritte valgono anche nel caso generale di autovalori ed autovettori complessi e coniugati, purchè A sia diagonalizzabile⁶, anche se in molti testi si preferisce usare un'altra scrittura nel caso di grandezze complesse. Anche qui si rimanda a testi sui Sistemi Lineari.

2.4 Classificazione dei punti di equilibrio

Il Lettore dovrebbe avere già una certa familiarità con i Sistemi Lineari: in particolar modo, dato un sistema $\dot{x} = Ax$ con A matrice $n \times n$, dovrebbe essere noto come la stabilità dell'origine sia collegata al segno degli autovalori della matrice A , supposta in ogni caso diagonalizzabile⁷. Nel seguito supporremo implicitamente di avere a che fare solo con matrici diagonalizzabili con diagonalizzazione reale o complessa.

Introdurremo delle definizioni generali, a partire da esempi sui sistemi lineari; tali definizioni tuttavia si estenderanno a sistemi non lineari generici.

Consideriamo il sistema lineare

$$\dot{x} = Ax \quad (2.13)$$

con

$$A = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad \rho, \sigma \in \mathbb{R} \quad (2.14)$$

⁶con diagonalizzazione reale o complessa

⁷Nel seguito supporremo A diagonalizzabile (in modo reale o complesso) e lo stesso supporremo per i vari jacobiani considerati e per le matrici degli esempi presentati. Pertanto quanto detto varrà stanti tali ipotesi di diagonalizzabilità.

Gli autovalori di A saranno semplicemente i numeri (reali) ρ e σ . Pertanto se ρ e σ sono entrambe negativi l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema (2.13). Ciò implica che tutte le traiettorie convergono verso l'origine.

L'insieme delle traiettorie pertanto è rappresentato in Figura 2.1, per i particolari valori $\rho = -2.5$ e $\sigma = -2$. Si osservi che l'asse delle ascisse indica i valori di x_1 , quello delle ordinate i valori di x_2 , con $x = (x_1, x_2)$. Tutte

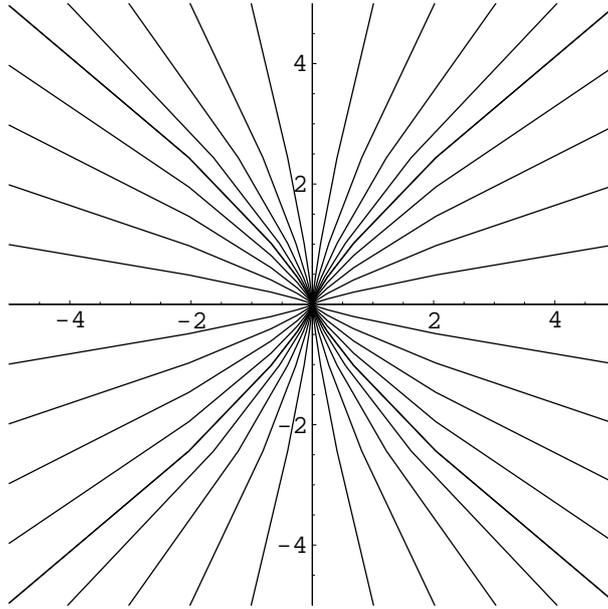


Figura 2.1: Traiettorie del sistema (2.13) per $\rho = -2.5$ e $\sigma = -2$.

le traiettorie sono orientate verso l'origine e tendono ad essa per $t \rightarrow +\infty$. Dunque l'origine forma un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Possiamo pensare dunque all'origine come ad un *pozzo* in cui vanno a finire tutte le traiettorie del sistema.

Più in generale vale la seguente

Proposizione 2.4.1 *Dato un sistema $\dot{x} = f(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) avente un punto di equilibrio x_E , se lo jacobiano $Df(x_E)$ di f calcolato in x_E ha solo autovalori a parte reale negativa, allora x_E è un punto di equilibrio (localmente) asintoticamente stabile per il sistema considerato. In tal caso x_E prende il nome di pozzo (iperbolico).*

Al fine della dimostrazione si ricordi che in un intorno di x_E le traiettorie del sistema non lineare sono approssimate, stanti le ipotesi fatte, da quelle

del sistema linearizzato dato da $\dot{x} = [Df(x_E)](x - x_E)$. Le traiettorie di tale ultimo sistema saranno la traslazione attorno ad x_E delle traiettorie del sistema $\dot{x} = [Df(x_E)](x)$ che è caratterizzato dall'aver nell'origine un punto di equilibrio a.s. poichè il segno della parte reale degli autovalori della matrice $Df(x_E)$ è negativo per ipotesi. Si tengano presente peraltro le Proposizioni 2.2.1 e 2.3.2.

La Figura 2.1 potrebbe dunque approssimare l'andamento delle traiettorie di un opportuno sistema non lineare (bidimensionale) nell'intorno di un suo punto di equilibrio localmente a.s. Chiaramente, man mano che ci si allontana dal punto di equilibrio stesso, le traiettorie reali saranno sempre meno approssimabili da quelle del sistema linearizzato fino ad avere andamenti del tutto diversi (potranno esistere ulteriori punti di equilibrio, cicli limite, ecc.).

Consideriamo ora ancora il sistema (2.13), questa volta con $\rho < 0$ e $\sigma > 0$. È noto che ora l'origine forma un punto di equilibrio instabile: tuttavia per particolari condizioni iniziali si ha che lo stato evolverà verso l'origine, ossia che la traiettoria tenderà verso l'origine (anzichè divergere) per $t \rightarrow +\infty$.

In Figura 2.2 sono riportate le traiettorie del sistema per $\rho = -2.5$ e $\sigma = 2$. Sull'asse delle ascisse sono riportati i valori di x_1 , sull'asse delle ordinate vi sono i valori di x_2 . Chiaramente $x = (x_1, x_2)$. Invece in Figura 2.3 riportiamo l'andamento del campo vettoriale relativo al sistema (2.13) per i valori di ρ e σ considerati dal quale si ricava facilmente l'orientazione delle traiettorie. Come si vede le traiettorie relative ai punti sull'asse delle ascisse ($x_2 = 0$) convergono verso l'origine, mentre per ogni altra condizione iniziale (con $x_2 \neq 0$) le traiettorie sono divergenti e si allontanano dall'origine.

In questo caso l'origine si dice *punto di sella*.

Più in generale vale la seguente

Definizione 2.4.1 *Dato un generico sistema $\dot{x} = f(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) avente un punto di equilibrio x_E , si dice che x_E è un punto di sella (iperbolico) se $Df(x_E)$ ha alcuni autovalori a parte reale negativa ed altri a parte reale positiva, senza avere autovalori a parte reale nulla.*

Anche adesso la Figura 2.2, con l'orientazione indotta dalla Figura 2.3, potrà approssimare localmente l'andamento delle traiettorie di un opportuno sistema non lineare (bidimensionale) nell'intorno di un suo punto di equilibrio.

Peraltro, per vedere una rappresentazione non approssimata delle traiet-

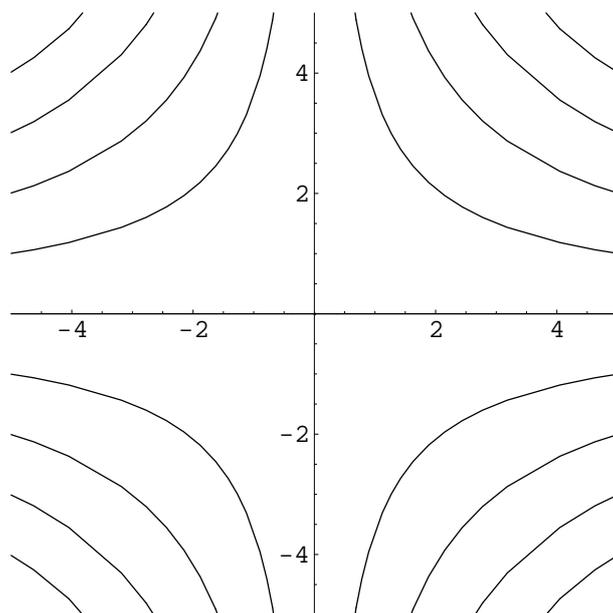


Figura 2.2: Un punto di sella

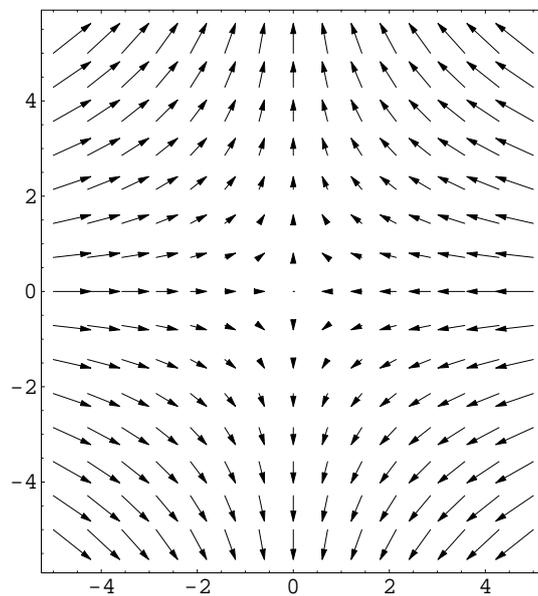


Figura 2.3: Il campo vettoriale del sistema (2.13) per $\rho = -2.5$ e $\sigma = 2$.

torie di un sistema non lineare avente un punto di sella si consideri per es. la Figura 3.4 a pagina 57 ed il relativo Esempio.

Mano a mano che ci si allontana dal punto di equilibrio le traiettorie reali risulteranno sempre più discordanti ed incurvate rispetto a quelle del sistema linearizzato. Ovviamente stiamo presentando solo degli esempi particolari (ed in modo qualitativo) di una vasta casistica.

Se infine per il sistema (2.13) si ha che sia ρ che σ sono positivi, allora l'origine è un punto di equilibrio instabile e per ogni condizione iniziale l'evoluzione diverge. Si ha cioè una *sorgente* di traiettorie.

Più in generale vale la seguente

Definizione 2.4.2 *Dato un generico sistema $\dot{x} = f(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) avente un punto di equilibrio x_E , si dice che x_E è una sorgente (iperbolica) se $Df(x_E)$ ha solo autovalori a parte reale positiva.*

Si osservi che nel caso di un punto di sella esisteranno in generale delle particolari condizioni iniziali per cui lo stato del sistema evolve verso il punto di sella stesso; invece per una sorgente nessuna traiettoria tende verso la sorgente stessa.

Proposizione 2.4.2 *Punti di sella e sorgenti sono punti di equilibrio instabile.*

Negli esempi fatti fino ad ora non abbiamo mai considerato esplicitamente matrici jacobiane con autovalori complessi. Tuttavia quanto detto vale in generale. Se gli autovalori sono complessi e coniugati (sempre a parte reale non nulla), per ogni coppia di tali autovalori complessi e coniugati, l'evoluzione del sistema presenterà un *termine* pseudoperiodico che si traduce in un andamento a *spirale*⁸.

Per esempio consideriamo il sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} x$$

La matrice che lo descrive⁹ presenta due autovalori complessi e coniugati a parte reale negativa. Una tipica traiettoria di tale sistema è rappresentata in Figura 2.4 ove, come al solito, sono riportate le componenti dello stato x_1 ed x_2 in ascissa ed in ordinata rispettivamente. Invece il campo vettoriale che definisce il sistema considerato è graficato in Figura 2.5. Come ci si aspettava

⁸andamento della traiettoria o meglio del contributo alla traiettoria relativo al *termine* pseudoperiodico della soluzione. . .

⁹e che è diagonalizzabile con diagonalizzazione complessa.

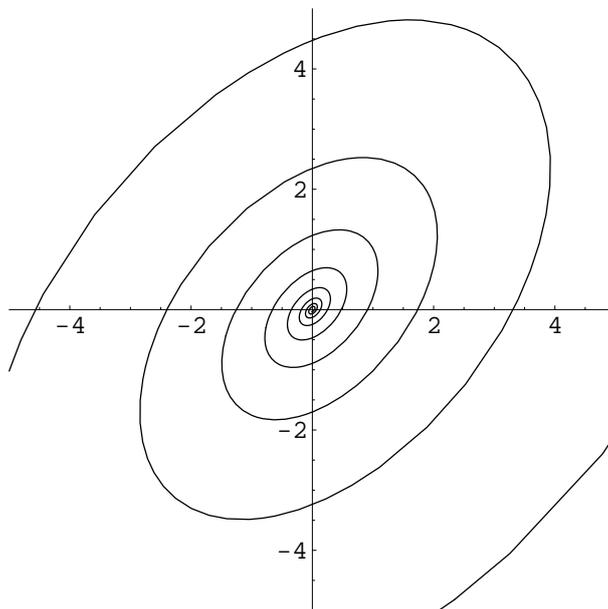


Figura 2.4: Tipica traiettoria a spirale.

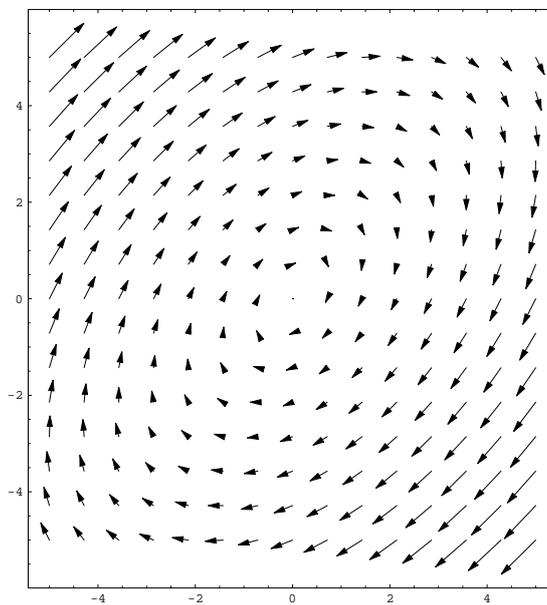


Figura 2.5: Campo vettoriale di un sistema lineare con evoluzioni pseudoperiodiche.

le traiettorie convergono verso l'origine, ma ora con un andamento a *spirale* corrispondente alle evoluzioni pseudoperiodiche note dallo studio dei Sistemi Lineari.

Si possono avere chiaramente anche *spirali* divergenti per coppie di autovalori complessi e coniugati a parte reale positiva.

Dunque potremo osservare comportamenti analoghi delle traiettorie localmente anche per sistemi non lineari (in un intorno di un punto di equilibrio chiaramente).

Alla luce di quanto detto e degli esempi visti, affermiamo dunque la seguente

Proposizione 2.4.3 *Dato un generico sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) con un punto di equilibrio x_E , allora se $Df(x_E)$ ha almeno un paio di autovalori complessi e coniugati con parte immaginaria non nulla (e se $Df(x_E)$ non ha autovalori a parte reale nulla), allora intorno al punto di equilibrio x_E vi saranno delle traiettorie a forma di spirale (non necessariamente planari, chiaramente). Queste potranno essere divergenti o convergenti a seconda del segno della parte reale degli autovalori di $Df(x_E)$. Supponiamo¹⁰ che $Df(x_E)$ sia diagonalizzabile.*

Per il calcolo esplicito delle soluzioni dei sistemi lineari considerati negli esempi fatti, occorre calcolare l'esponenziale di matrice, in conformità con la (2.7) e con la Teoria dei Sistemi Lineari.

Abbiamo fino ad ora considerato solo punti di equilibrio x_E tali che $Df(x_E)$ non ammetta autovalori a parte reale nulla. Introduciamo allora la seguente

Definizione 2.4.3 *Un punto di equilibrio x_E di un sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) si dice iperbolico se lo jacobiano $Df(x_E)$ di f calcolato in x_E (ossia la matrice del sistema linearizzato) non ha autovalori a parte reale nulla.*

Pertanto fino ad ora abbiamo considerato solo punti di equilibrio *iperbolici*.

Un punto di equilibrio non iperbolico x_E pertanto è caratterizzato dal fatto che $Df(x_E)$ presenta almeno un autovalore a parte reale nulla. Ossia

¹⁰come sempre in questa sezione.

esiste almeno un autovalore nullo o una coppia di autovalori complessi e coniugati puramente immaginari.

Dallo studio dei Sistemi Lineari è noto che, per il sistema $\dot{x} = Ax$, l'origine non può essere asintoticamente stabile se A ha almeno un autovalore a parte reale nulla. Vedremo tuttavia che un analogo risultato non esiste per lo studio degli equilibri dei sistemi non lineari mediante linearizzazione.

Consideriamo intanto il seguente esempio

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} x$$

La matrice¹¹ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ che definisce tale sistema lineare ha due autovalori complessi e coniugati a parte reale nulla. Il disegno delle traiettorie è riportato in Figura 2.6. In questo esempio l'origine è semplicemente stabile

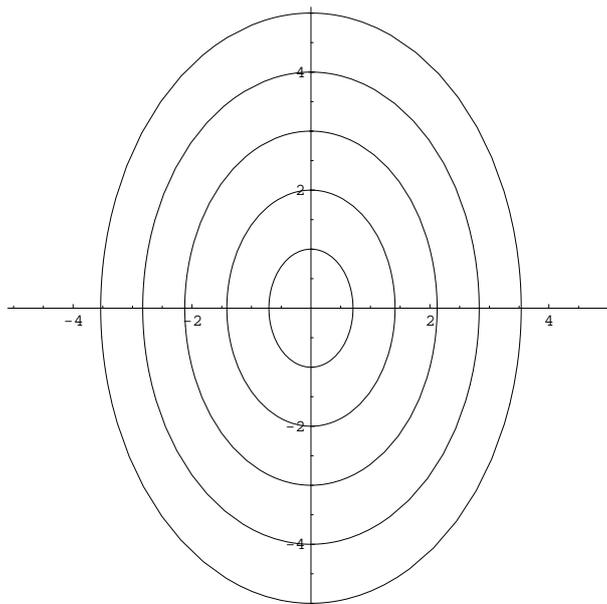


Figura 2.6: Un centro. Notare le traiettorie chiuse corrispondenti ad evoluzioni periodiche.

e prende il nome di *centro*. Infatti attorno all'origine si trovano traiettorie concentriche che corrispondono a soluzioni periodiche, come ci si aspettava in base ai risultati della Teoria dei Sistemi Lineari. Nella Figura 2.7 è graficato il campo vettoriale relativo al sistema considerato. Si osserva pertanto che

¹¹diagonalizzabile con diagonalizzazione complessa

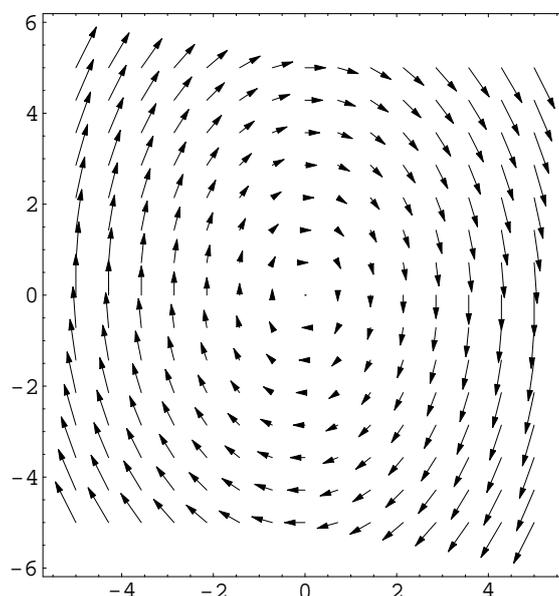


Figura 2.7: Il campo vettoriale $f(x) = Ax$ relativo al sistema le cui traiettorie chiuse sono riportate in Figura 2.6.

le traiettorie vengono percorse con verso orario¹².

Nel caso generale¹³ di una sistema lineare $\dot{x} = Ax$ con A matrice $n \times n$, ad ogni coppia di autovalori di A complessi e coniugati puramente immaginari (non nulli) corrisponderà un *contributo* all'evoluzione complessiva del sistema dato da modi periodici.

Per meglio visualizzare quanto detto, consideriamo il seguente esempio:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} x \quad (2.15)$$

La matrice¹⁴ $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ ammette gli autovalori $3i$, $-3i$ e -2 , con i unità immaginaria. Una tipica traiettoria di questo sistema è rappresentata in Figura 2.8. Come si vede la traiettoria si può pensare originata da due “componenti”: un modo che converge esponenzialmente verso l'origine

¹²relativamente a questo esempio particolare chiaramente.

¹³Purchè A sia diagonalizzabile

¹⁴diagonalizzabile con diagonalizzazione complessa.

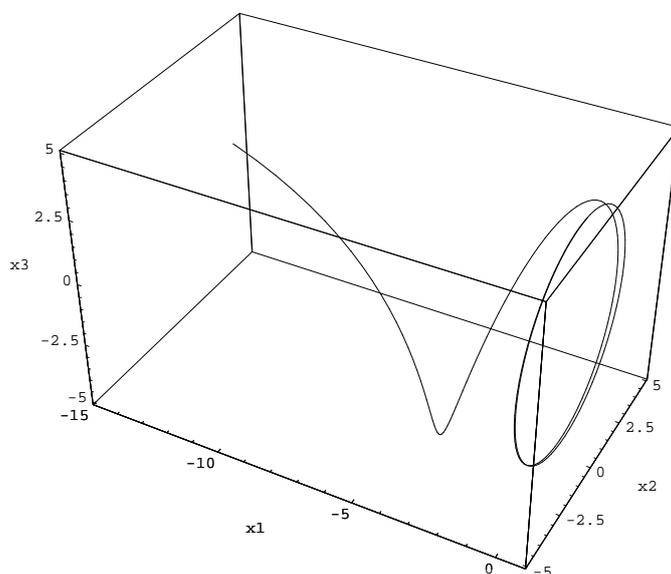


Figura 2.8: Una tipica traiettoria del sistema lineare (2.15).

relativo all'autovalore -2 della matrice A ed un modo periodico (tipo quelli che originano le traiettorie di Figura 2.6), relativo agli autovalori puramente immaginari e coniugati $\pm 3i$. La composizione di questi due modi spiega dunque la forma assunta dalla traiettoria, che, come si osserva, tenderà verso un ciclo limite e non verso l'origine. L'origine risulta semplicemente stabile in questo esempio. Abbiamo così illustrato mediante esempi i risultati noti dallo studio dei Sistemi Lineari. Si noti esplicitamente che se si parte da una condizione iniziale con $x_2 = 0$ ed $x_3 = 0$ (ossia sull'asse x_1) allora la traiettoria tende proprio verso l'origine. Chiaramente lo stato è dato da $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Nel caso tuttavia di un punto di equilibrio non iperbolico di un sistema non lineare (cioè nel caso di un punto di equilibrio x_E t.c. $Df(x_E)$ ha anche autovalori a parte reale pari a zero) nulla si può dire a priori circa la stabilità del punto di equilibrio stesso mediante la sola analisi del sistema linearizzato¹⁵. Si può solo affermare che il punto di equilibrio x_E in questione è sicuramente instabile se esiste almeno un autovalore di $Df(x_E)$ che è a parte reale positiva.

Intuitivamente ciò si giustifica osservando che il sistema linearizzato è ca-

¹⁵se non vi sono autovalori di $Df(x_E)$ a parte reale positiva.

pace solo di dare un “quadro approssimato” delle reali traiettorie del sistema non lineare. Se dunque, per es., le traiettorie del sistema linearizzato sono formate da ellissi concentriche (o hanno delle componenti riconducibili a tali ellissi come negli esempi visti) per effetto di autovalori immaginari puri, ciò non vuol dire che anche il sistema non lineare avrà traiettorie chiuse e concentriche in un opportuno intorno del punto di equilibrio considerato. Infatti per effetto delle non linearità le traiettorie chiuse potrebbero essere perturbate (in ogni intorno del punto di equilibrio considerato) quel tanto che basta a fare sì che esse “si aprano” e diano origine a traiettorie che convergono verso il punto di equilibrio o divergono.

Del resto in presenza di autovalori a parte reale nulla dello jacobiano *non* vale la Proposizione 2.2.1.

Affermiamo dunque la seguente

Proposizione 2.4.4 *Non si può in generale stabilire mediante linearizzazione se un punto di equilibrio non iperbolico x_E di un sistema non lineare sia stabile (s.s. o a.s.) o meno. Si può solo affermare che il punto di equilibrio x_E in questione è sicuramente instabile se esiste almeno un autovalore di $Df(x_E)$ a parte reale positiva.*

Per una dimostrazione della prima parte della precedente Proposizione basta fare un controesempio opportuno.

Tuttavia andamenti delle traiettorie del tipo di quelli di Figura 2.6 (o di Figura 2.8 o simili) sono chiaramente possibili anche per sistemi non lineari. Si parla talvolta di *centro* nonlineare in tali situazioni. Per osservare un *centro* di un sistema non lineare si consideri la Figura 3.2 a pagina 47 relativa alle traiettorie del pendolo semplice: l’origine (per il pendolo matematico semplice) è un *centro*.

Vogliamo considerare infine, per completezza, l’andamento delle traiettorie del seguente sistema (lineare), descritto da una matrice avente un autovalore nullo:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \quad (2.16)$$

Si osservi che la matrice che definisce il sistema ha autovalori 3 e 0 e che tutti i punti aventi $x_1 = 0$ sono punti di equilibrio per il sistema considerato. La funzione vettoriale $f(x) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$ è riportata in Figura 2.9, di ovvia interpretazione. Pertanto tutte le traiettorie con punto iniziale (in \mathbb{R}^2 chiaramente) non sull’asse delle ordinate saranno parallele all’asse delle ascisse e

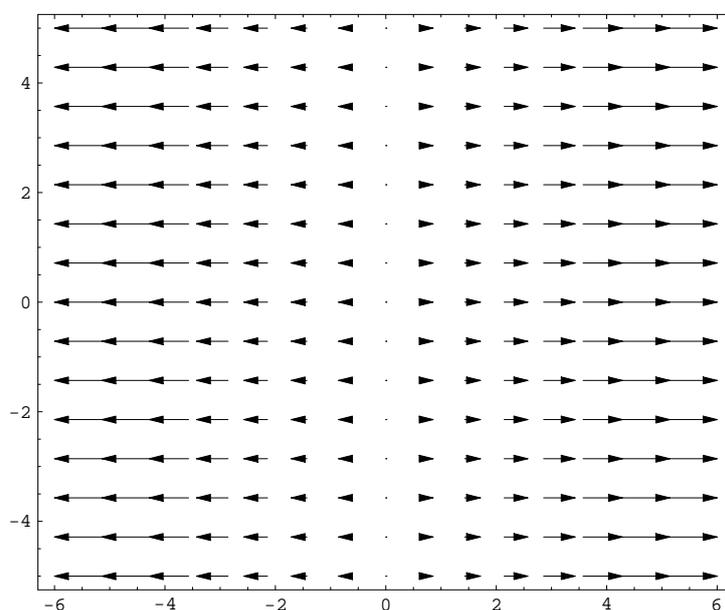


Figura 2.9: Il campo vettoriale che definisce il sistema (2.16).

divergenti. L'asse delle ordinate è tutto costituito da punti di equilibrio (instabili).

Anche per sistemi non lineari si possono, chiaramente, avere situazioni di questo tipo. Ossia possono esistere insiemi connessi (segmenti, superfici, volumi, etc. . .) in cui la funzione f che definisce il sistema si annulla identicamente e dai quali si “dipartono” delle traiettorie.

Abbiamo presentato in questa sezione una classificazione dei principali tipi di punti di equilibrio. In particolare abbiamo definito cosa sia un punto di equilibrio *iperbolico*, cosa è un *pozzo*, una *sorgente*, un *punto di sella*. Abbiamo parlato delle *spirali* ed abbiamo accennato ai *centri* (in sistemi lineari e non lineari). Nonchè abbiamo accennato al comportamento delle traiettorie di un sistema per punti di equilibrio *non iperbolici*. Sono stati presentati brevemente anche alcuni risultati di Teoria della Stabilità mediante *linearizzazione* in un intorno di un punto di equilibrio.

2.5 Classificazione delle traiettorie. Traiettorie omocline ed eterocline.

Introduciamo di seguito alcune definizioni a proposito delle traiettorie di un sistema dinamico.

Definizione 2.5.1 *Sia dato un punto di equilibrio x_E di un sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ ($x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$): se esiste una soluzione $\phi(t; \xi)$ (per qualche ξ) del sistema considerato tale che*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t; \xi) = x_E \quad (2.17)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t; \xi) = x_E \quad (2.18)$$

allora la traiettoria relativa a $\phi(t; \xi)$ prende il nome di *traiettoria omoclina* (relativamente al punto di equilibrio x_E).

In altre parole una *traiettoria omoclina* tende allo stesso punto di equilibrio x_E sia per $t \rightarrow +\infty$ che per $t \rightarrow -\infty$.

È interessante notare che se x_E è un pozzo o una sorgente non vi potranno essere traiettorie omocline relativamente a x_E . Invece se x_E è un punto di sella potrebbero esistere delle traiettorie omocline.

Definizione 2.5.2 *Siano dati due punti di equilibrio distinti x_{E_1} ed x_{E_2} di un sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ ($x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$): se esiste una soluzione $\phi(t; \xi)$ (per qualche ξ) del sistema considerato tale che*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t; \xi) = x_{E_2} \quad (2.19)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t; \xi) = x_{E_1} \quad (2.20)$$

allora la traiettoria relativa a $\phi(t; \xi)$ prende il nome di *traiettoria eteroclina* (tra x_{E_1} e x_{E_2}).

In altre parole una *traiettoria eteroclina* tende a due punti di equilibrio distinti x_{E_1} ed x_{E_2} per $t \rightarrow -\infty$ e $t \rightarrow +\infty$ rispettivamente.

Altre traiettorie di particolare interesse sono chiaramente le *traiettorie chiuse* non contenenti punti di equilibrio (corrispondenti a *soluzioni periodiche* di sistemi dinamici autonomi).

Più in generale sono di interesse tutte quelle traiettorie che possono formare il cosiddetto ω -limit set di cui si parlerà nella Sezione 4.2 in cui saranno

trattati concetti di Teoria della Stabilità.

Accenniamo soltanto, per completezza, all'esistenza di *traiettorie caotiche* di sistemi autonomi, ossia all'esistenza di traiettorie non corrispondenti a soluzioni periodiche e non divergenti che non convergono verso alcun punto di equilibrio. Tali traiettorie caotiche non sono possibili in sistemi unidimensionali o planari¹⁶, ma sono possibili in sistemi con dimensione maggiore o uguale a 3, come dimostra il *teorema di Poincaré-Bendixon*. Il sistema dinamico più famoso con traiettorie a comportamento caotico è il sistema di *Lorenz*.

Il *caos deterministico* (così viene chiamato il fenomeno dell'esistenza di traiettorie apparentemente caotiche in sistemi dinamici deterministici) è un argomento complesso ed interessante che non è opportuno trattare in questa sede.

2.6 Considerazioni conclusive

Lo studioso di Teoria dei Sistemi si dovrà preoccupare di caratterizzare il più possibile lo spazio di stato di un sistema dinamico, trovando gli stati di equilibrio e stabilendo se questi sono stabili o meno e per quali condizioni iniziali le traiettorie tendano o meno verso tali stati di equilibrio¹⁷. Altresì è di interesse la individuazione di cicli limite periodici e la loro caratterizzazione oppure di insiemi limite caotici. Inoltre è di interesse la determinazione di eventuali traiettorie omocline o eterocline.

¹⁶di dimensione 2.

¹⁷o verso traiettorie chiuse o caotiche naturalmente.

Capitolo 3

Sistemi integrabili

3.1 Introduzione

Vogliamo presentare in questo capitolo alcuni risultati che permettono eventualmente di determinare in modo analitico (o comunque senza ricorrere a tecniche numeriche) l'insieme delle traiettorie di sistemi dinamici (planari). Pertanto considereremo integrabile un sistema dinamico se è possibile esprimere analiticamente l'insieme delle sue traiettorie, oppure mediante procedimenti rigorosi senza dover ricorrere al calcolo numerico (approssimato). Tipicamente le traiettorie di sistemi (planari) integrabili saranno esprimibili come curve di livello di un *integrale primo*. Tale definizione non è univoca nè rigorosa. È opportuno ricordare che per la maggior parte dei sistemi dinamici le traiettorie possono essere determinate soltanto con tecniche di calcolo numerico che, comunque, dovranno essere sempre sostenute da uno *studio qualitativo* rigoroso fatto con i metodi propri della Teoria dei Sistemi.

3.2 Sistemi planari autonomi

Considereremo in questa sezione sistemi planari autonomi, descritti dall'equazione:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (3.1)$$

Imponiamo inoltre le condizioni iniziali $x|_{t=0} = \xi$ e $y|_{t=0} = \eta$, con chiaro significato di simboli.

Costruiamo le due equazioni

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)} \quad y(\xi) = \eta \quad (3.2)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \quad x(\eta) = \xi \quad (3.3)$$

ove la prima viene considerata nei punti in cui $f(x, y) \neq 0$ e la seconda nei punti in cui $g(x, y) \neq 0$.

Vale la seguente

Proposizione 3.2.1 *Se $O(\xi, \eta)$ è la traiettoria in $D \subseteq \mathbb{R}^2$ relativa al sistema (3.1) ed alla condizione iniziale $(\xi, \eta) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$, allora se $f(x, y) \neq 0$ in D si ha che l'insieme di punti $O(\xi, \eta)$ coincide con la soluzione¹ del problema di Cauchy dato da (3.2). Si osservi però che tale equazione non descrive un sistema autonomo.*

Altresì se $g(x, y) \neq 0$ in D la traiettoria $O(\xi, \eta)$ è la soluzione del problema dato da (3.3).

Dimostrazione: sia $\phi(t; (\xi, \eta))$ il flusso relativo al sistema (3.1) che genera la traiettoria

$$O(\xi, \eta) = \{\phi(t; (\xi, \eta)) \in \mathbb{R}^2 : t \in I\}$$

ed indichiamo per semplicità con $\phi(t)$ tale flusso².

Essendo ϕ una funzione vettoriale, si avrà che $\phi = (\phi_1, \phi_2)$. Per definizione di soluzione e di flusso risulterà che

$$\begin{cases} \dot{\phi}_1(t) = f(\phi_1(t), \phi_2(t)) \\ \dot{\phi}_2(t) = g(\phi_1(t), \phi_2(t)) \end{cases} \quad (3.4)$$

e per la condizione iniziale si avrà:

$$\begin{cases} \phi_1(0) = \xi \\ \phi_2(0) = \eta \end{cases}$$

Per l'ipotesi che $f(x, y) \neq 0$ in D si avrà che

$$\dot{\phi}_1(t) = f(\phi_1(t), \phi_2(t)) \neq 0 \quad \forall t \in I$$

¹non con la traiettoria.

² I è al solito l'insieme di definizione della soluzione considerata.

e questo vuol dire che $\phi_1(t)$ è strettamente monotona (crescente o decrescente a seconda del segno di f) ed ammette pertanto l'inversa ϕ_1^{-1} . Si avrà che $\phi_1^{-1}(\xi) = 0$. Si può pertanto scrivere che:

$$\begin{aligned} O(\xi, \eta) &= \{(\phi_1(t), \phi_2(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in I\} \\ &= \{(\phi_1(\phi_1^{-1}(x)), \phi_2(\phi_1^{-1}(x))) \in \mathbb{R}^2 : x \in \phi_1(I)\} \\ &= \{(x, \phi_2(\phi_1^{-1}(x))) \in \mathbb{R}^2 : x \in \phi_1(I)\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dobbiamo mostrare ora che la funzione $\mu(x) = \phi_2(\phi_1^{-1}(x))$ costituisce la soluzione (massima) del problema di Cauchy (3.2).

A tal fine osserviamo che:

$$\frac{d\mu}{dx}(x) = \frac{\dot{\phi}_2(\phi_1^{-1}(x))}{\dot{\phi}_1(\phi_1^{-1}(x))} = \frac{g(\phi_1(\phi_1^{-1}(x)), \phi_2(\phi_1^{-1}(x)))}{f(\phi_1(\phi_1^{-1}(x)), \phi_2(\phi_1^{-1}(x)))} = \frac{g(x, \mu(x))}{f(x, \mu(x))} \quad (3.6)$$

dove abbiamo usato la (3.4).

Sfruttando poi le condizioni iniziali ed il fatto che $\phi_1^{-1}(\xi) = 0$ si ottiene

$$\mu(\xi) = \phi_2(\phi_1^{-1}(\xi)) = \phi_2(0) = \eta \quad (3.7)$$

Dunque $\mu(x)$ è soluzione del problema di Cauchy (3.2). Non è difficile dimostrare inoltre che μ è la soluzione massima in D , in quanto si estende da bordo a bordo.

Da ciò la tesi. \square

3.2.1 Sistemi hamiltoniani

Parleremo ora di una importante classe di sistemi, introducendo la seguente

Definizione 3.2.1 *Un sistema tipo (3.1) (supposto sempre Lipschitziano) si chiama sistema hamiltoniano se esiste una funzione $H(x, y)$ tale che:*

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = -g(x, y) \quad \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = f(x, y) \quad (3.8)$$

La funzione H si chiama funzione di Hamilton del sistema considerato.

Proposizione 3.2.2 *Se $H(x, y)$ è una funzione di Hamilton relativa al sistema (3.1), allora la funzione H è costante lungo una (qualsiasi) traiettoria del sistema.*

Dimostrazione: indichiamo con $\phi(t) = (\phi_1, \phi_2)$ la traiettoria del sistema relativa alla (generica) condizione iniziale (ξ, η) . Osserviamo che risulta:

$$\dot{\phi} = (\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2) = (f(\phi(t)), g(\phi(t)))$$

in virtù della definizione di flusso e di quanto posto. Osserviamo che vale la seguente identità:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(\phi(t)) &= \frac{\partial H}{\partial x}(\phi(t)) \dot{\phi}_1 + \frac{\partial H}{\partial y}(\phi(t)) \dot{\phi}_2 = \\ &= \frac{\partial H}{\partial x}(\phi(t)) f(\phi(t)) + \frac{\partial H}{\partial y}(\phi(t)) g(\phi(t)) = \\ &= -g(\phi(t)) f(\phi(t)) + f(\phi(t)) g(\phi(t)) = 0 \end{aligned}$$

in cui si è sfruttata la definizione di funzione di Hamilton. Ma allora $H(\phi(t))$ è costante nel tempo. E questo implica che H assume valore costante in tutti i punti $\phi(t)$, al variare di t , ossia che è costante lungo la traiettoria. Si ha così la tesi. \square

Vediamo ora come trovare una funzione di Hamilton per un sistema del tipo (3.1).

Ci poniamo inoltre nella ipotesi che il dominio D non abbia buchi, che sia cioè a connessione lineare semplice.

Vale allora la seguente

Proposizione 3.2.3 *Il sistema (3.1), studiato in un dominio D supposto per ipotesi senza buchi, ossia a connessione lineare semplice, è hamiltoniano se e solo se (in D) vale:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \quad (3.9)$$

ed in tal caso, in $R \subseteq D$ con R rettangolare, la funzione

$$H_0(x, y) := \int_{y_0}^y f(x, v)dv - \int_{x_0}^x g(w, y_0)dw \quad (3.10)$$

è una funzione di Hamilton per il sistema considerato. (x_0, y_0) è un punto arbitrario di D .

Dimostrazione: omettiamo la dimostrazione del fatto che la (3.9) segue necessariamente dalla proprietà del sistema di essere hamiltoniano³ e mostriamo solo che viceversa, se vale la (3.9) allora il sistema è hamiltoniano ed ammette come funzione di Hamilton la (3.10).

³tale dimostrazione fa uso del Teorema di Schwartz.

A tal fine deriviamo la (3.10) ed otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_0}{\partial x} &= \int_{y_0}^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, v)dv - g(x, y_0) = - \int_{y_0}^y \frac{\partial g}{\partial v}(x, v)dv - g(x, y_0) = \\ &= -g(x, y) + g(x, y_0) - g(x, y_0) = -g(x, y) \end{aligned} \quad (3.11)$$

in cui si è usata la (3.9), vera per ipotesi, ed alcuni teoremi di Analisi.

Inoltre risulta

$$\frac{\partial H_0}{\partial y} = f(x, y) \quad (3.12)$$

Ricordando la Definizione 3.2.1 si conclude che H_0 è effettivamente una funzione di Hamilton⁴ per il sistema (3.1) nelle ipotesi fatte. \square

Si osservi che la funzione H_0 si annulla proprio nel punto (x_0, y_0) .

Notiamo che H_0 , essendo una funzione di Hamilton, deve essere costante lungo una data traiettoria del sistema e da questo segue che le curve date da

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H_0(x, y) = H_0(\xi, \eta)\}$$

contengono traiettorie del sistema considerato (ossia del tipo (3.1)).

In particolare si ha che

Proposizione 3.2.4 *Il luogo dei punti definito da*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H_0(x, y) = H_0(\xi, \eta)\} \quad (3.13)$$

contiene la traiettoria $O(\xi, \eta)$ relativa al punto iniziale $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$.

Dimostrazione: per assurdo, se così non fosse, esisterebbe un punto della traiettoria in cui la funzione di Hamilton non assume il valore $H_0(\xi, \eta)$. Ma allora esistono due punti di una (stessa) traiettoria in cui la funzione di Hamilton assume due valori distinti⁵. Ma questo è assurdo in base alla Proposizione 3.2.2. Si ha dunque la tesi. \square

Chiaramente l'utilità della precedente Proposizione stà nel fatto che per la ricerca delle traiettorie basterà considerare le curve di livello della funzione H_0 .

⁴che risulta definita in R .

⁵chiaramente (ξ, η) appartiene alla traiettoria.

3.2.2 Il pendolo non dissipativo

Siamo ora in grado di calcolare analiticamente le traiettorie di alcuni sistemi planari, tra cui quelle del pendolo non lineare senza attrito.

Esempio 3.2.1 Consideriamo un pendolo di massa m , lunghezza l , in presenza di una accelerazione di gravità g e posto in un mezzo viscoso con costante di attrito viscoso k .

Sia inoltre ϕ l'angolo che il pendolo forma con la verticale⁶, in modo tale che se il pendolo si trova nella sua posizione di riposo, fermo in basso, sia $\phi = 0$.

Si faccia riferimento alla Figura 3.1.

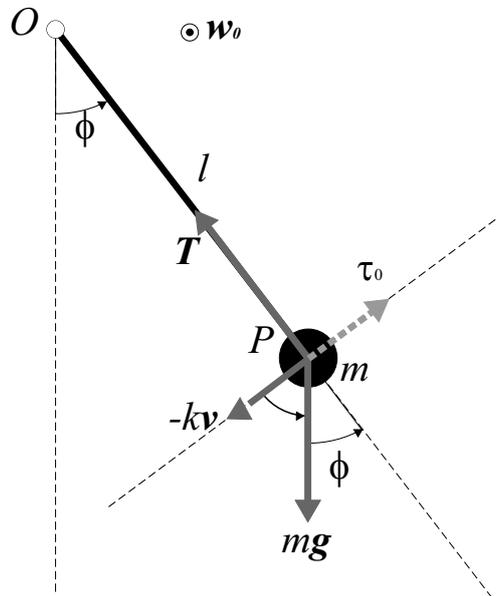


Figura 3.1: Il pendolo semplice.

Sappiamo dalla Fisica che il momento delle forze applicate (che calcoleremo rispetto al perno O del pendolo) è pari alla derivata rispetto al tempo del momento della quantità di moto⁷.

Vale dunque la relazione vettoriale:

$$\overrightarrow{OP} \times (\overrightarrow{T} + m\vec{g} - k\vec{v}) = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OP} \times m\vec{v}) \quad (3.14)$$

⁶crescente per una rotazione antioraria del pendolo stesso.

⁷della massa m , chiaramente.

ove: \overrightarrow{OP} è il vettore posizione del pendolo con O perno del pendolo e P punto in cui è situata la massa m ; \overrightarrow{T} è la tensione dell'asta (supposta priva di massa e non elastica) che regge la massa m ; \vec{g} è l'accelerazione di gravità⁸; \vec{v} è la velocità con cui si muove la massa m .

\overrightarrow{T} ha momento nullo rispetto ad O essendo diretto lungo \overrightarrow{OP} .

Il momento della forza peso sarà diretto perpendicolarmente al piano in cui oscilla il pendolo e avrà verso che si allontana (per $\phi \in]0, \pi[$) da un osservatore che guardi il piano di oscillazione in modo tale che ad un incremento di ϕ corrisponda una rotazione antioraria.

Consideriamo poi che $\vec{v} = l\dot{\phi}\vec{\tau}_0$ con $\vec{\tau}_0$ versore diretto ovunque tangenzialmente alla traiettoria circolare di m , nel verso crescente delle ϕ .

Pertanto:

$$\overrightarrow{OP} \times (\overrightarrow{T} + m\vec{g} - k\vec{v}) = -lmg \sin \phi \vec{w}_0 - kl^2 \dot{\phi} \vec{w}_0$$

con l modulo di \overrightarrow{OP} e \vec{w}_0 versore *perpendicolare al piano di oscillazione e diretto verso l'osservatore di cui si è parlato sopra*. Si noti che la precedente relazione vale sempre (per ogni ϕ).

Si è sfruttato inoltre il fatto che \vec{v} è sempre perpendicolare ad \overrightarrow{OP} . Inoltre, come è facile vedere:

$$\frac{d}{dt} (\overrightarrow{OP} \times m\vec{v}) = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OP} \times ml\dot{\phi}\vec{\tau}_0) = \frac{d}{dt} (ml^2\dot{\phi}\vec{w}_0) = ml^2\ddot{\phi}\vec{w}_0$$

Allora, sostituendo i risultati ottenuti nella (3.14):

$$-lmg \sin \phi \vec{w}_0 - kl^2 \dot{\phi} \vec{w}_0 = ml^2 \ddot{\phi} \vec{w}_0 \quad (3.15)$$

Dividendo per l e semplificando il versore \vec{w}_0 , si ottiene infine:

$$-mg \sin \phi - kl\dot{\phi} = ml\ddot{\phi} \quad (3.16)$$

e quindi:

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l} \sin \phi - \frac{k}{m} \dot{\phi} \quad (3.17)$$

Tale equazione definisce il moto del pendolo. Per semplicità considereremo che $\frac{g}{l} = 1$ e cominceremo con lo studiare il caso *non dissipativo*, ossia con $k = 0$.

Dovremo pertanto studiare l'equazione differenziale non lineare

$$\ddot{\phi} = -\sin \phi \quad (3.18)$$

⁸ \vec{g} vale chiaramente g in modulo ed è diretta verso il basso.

Facendo uso della Proposizione 1.3.1, dopo aver posto:

$$x = \phi \quad y = \dot{\phi} \quad (3.19)$$

costruiamo il sistema bidimensionale (autonomo) equivalente:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases} \quad (3.20)$$

Chiameremo tale sistema “pendolo matematico” ed in base alla Proposizione 1.3.1 possiamo dire che, trovata una soluzione $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ del sistema (3.20), la funzione $x(t) = \phi(t)$ descriverà il moto del pendolo (fisico). Chiaramente, in generale, dovremo studiare il comportamento del pendolo al variare della posizione e della velocità iniziali, fissando le relative condizioni iniziali e procedendo in conformità a quanto afferma la Proposizione 1.3.1.

Cerchiamo ora di trovare esplicitamente le traiettorie del sistema (3.20).

Osserviamo innanzitutto che il sistema è definito in tutto \mathbb{R}^2 e dunque l’insieme di definizione è a connessione lineare semplice, inoltre sono vere le ipotesi della Proposizione 3.2.3. Infatti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial(-\sin x)}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Come evidenzieremo meglio in seguito, un ragionamento del tutto analogo vale per sistemi descritti da equazioni differenziali del tipo $\ddot{x} = g(x)$ che danno luogo a sistemi autonomi non lineari del tipo $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = g(x) \end{cases}$.

Pertanto, in base alla Proposizione 3.2.3, il sistema ammette la funzione di Hamilton data da (3.10), ossia, effettuando i semplici conti:

$$H_0 = \frac{1}{2}(y^2 - y_0^2) - \int_{x_0}^x g(w)dw = \frac{1}{2}(y^2 - y_0^2) - \cos x + \cos x_0 \quad (3.22)$$

Tale funzione si annullerà nel punto (x_0, y_0) .

Scegliamo $(x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ed otteniamo la funzione di Hamilton particolarmente semplice:

$$H_0(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x \quad (3.23)$$

In virtù della Proposizione 3.2.4 possiamo ora investigare le traiettorie del pendolo non lineare privo di attrito.

Infatti le curve di livello della funzione H_0 contengono le traiettorie. Pertanto cerchiamo di individuare la famiglia di tali curve di livello della funzione di Hamilton. Inoltre ogni traiettoria è contenuta in una opportuna curva di livello di H_0 : se per assurdo, infatti, esistesse una traiettoria non contenuta in una curva di livello di H_0 , ciò implicherebbe che H_0 non è costante lungo la traiettoria considerata. Ma ciò è assurdo per la Proposizione 3.2.2.

Dobbiamo dunque disegnare le curve

$$N_c = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} y^2 - \cos x = c \right\} \quad (3.24)$$

al variare di c in \mathbb{R} . Risulta:

$$\begin{aligned} N_c &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 2 \cos x = 2c\} \\ &= \{(x, \pm \sqrt{2 \cos x + 2c}) \in \mathbb{R}^2 : 2 \cos x + 2c \geq 0\}, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.25)$$

come si verifica facilmente con il principio di doppia inclusione.

Per $c < -1$ le curve di livello sono formate dall'insieme vuoto. Per $|c| \leq 1$ si ha che le curve di livello sono contenute nella striscia $|x| \leq \arccos(-c)$ mentre per $c > 1$ le curve sono sempre definite per ogni x .

L'insieme delle curve di livello della funzione hamiltoniana considerata sono riportate in Figura 3.2.

Per determinare quali punti di una data curva di livello (continua) formano una traiettoria, osserviamo che se lungo la curva di livello in questione non vi sono punti di equilibrio del sistema dinamico, allora tutta la curva individua una traiettoria.

Consideriamo infatti un punto (ξ, η) appartenente ad una data curva di livello (continua) N della funzione hamiltoniana H_0 (calcolata in precedenza), allora la traiettoria $O(\xi, \eta)$, non può “abbandonare” N , per non contraddire la Proposizione 3.2.4. Inoltre il flusso $\psi(t)$ che genera la traiettoria, continuerà a “muoversi” lungo N , fintantochè la sua velocità non si annulla. Pertanto il punto $\psi(t)$ descriverà quella porzione della curva di livello N che intercorre tra (ξ, η) ed il primo punto di equilibrio che si incontra lungo la curva N stessa.

In base a quanto detto, ed osservando che i punti di equilibrio nel dominio considerato sono il punto $(0, 0)$ ed i punti $(\pi, 0)$ e $(-\pi, 0)$, si può facilmente dedurre che all'interno della regione delimitata con un tratto più spesso in Figura 3.2 (regione data dalle curve di livello per $|c| < 1$) si hanno traiettorie

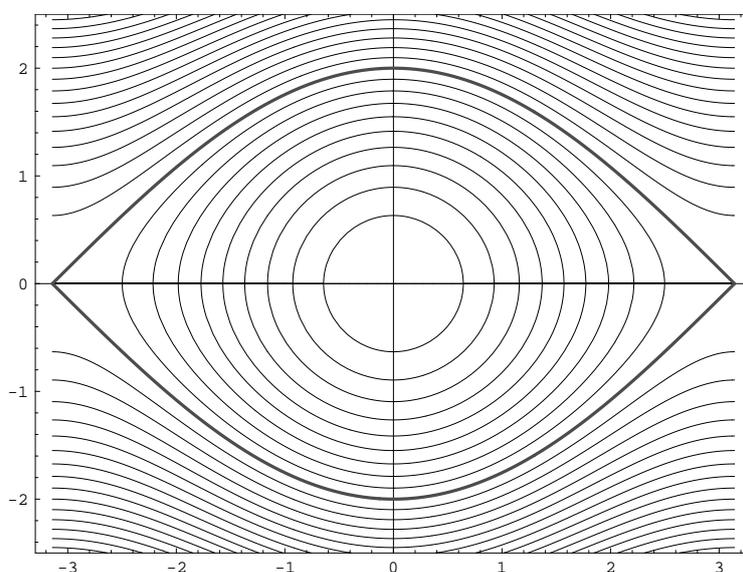


Figura 3.2: Curve di livello della funzione di Hamilton per il pendolo non dissipativo.

chiuse percorse in senso orario (come giustificheremo più avanti), che corrispondono ad oscillazioni periodiche del pendolo. Tutta la curva di livello individua una traiettoria in tale regione. Al di fuori di tale regione ($c > 1$) si hanno traiettorie che procedono dal bordo sinistro al bordo destro del dominio considerato⁹, che corrispondono a rotazioni complete del pendolo. Ogni curva continua che compone una data curva di livello¹⁰ individua anche in questa regione una traiettoria.

Invece la curva di livello disegnata con un tratto più spesso in Figura 3.2 (relativa a $c = 1$) contiene due traiettorie distinte (essa contiene due punti di equilibrio) più i punti di equilibrio stessi¹¹. Ciascuna di tale due traiettorie tende ad un punto di equilibrio per $t \rightarrow +\infty$, ed all'altro per $t \rightarrow -\infty$. La traiettoria nel semipiano delle y positive viene percorsa da sinistra verso destra¹², la traiettoria nel semipiano delle y negative viene percorsa in

⁹e che vengono percorse in tale senso, come giustificheremo più avanti.

¹⁰ossia ogni sottoinsieme di punti di una curva di livello N_c che costituisce una curva continua.

¹¹A rigore un punto di equilibrio è una traiettoria e quindi sarebbe più corretto dire che la curva di livello congloba quattro traiettorie, ma noi ci riferiamo solo alle traiettorie non costituite dai punti di equilibrio

¹²ossia concordemente al verso positivo dell'asse delle ascisse.

senso opposto¹³. L'insieme di tali due traiettorie “separa” lo spazio di stato in regioni caratterizzate da differenti proprietà: all'interno infatti della regione del piano delimitata dalla curva spessa di Figura 3.2 abbiamo, come già accennato, traiettorie periodiche nell'intorno del punto di equilibrio semplicemente stabile $(0, 0)$, al di fuori abbiamo un comportamento instabile, corrispondente a rotazioni del pendolo fisico.

Osserviamo peraltro che, per la periodicità dell'angolo ϕ che individua la posizione del pendolo fisico, in realtà, un punto (π, y) , $y \in \mathbb{R}$ va identificato con il punto $(-\pi, y)$ della Figura 3.2 e dunque, a rigore, vi sono solo due punti di equilibrio distinti: l'origine ed il punto $(\pi, 0)$. L'origine è un *centro*, mentre il punto $(\pi, 0)$ è un *punto di sella*. Inoltre si dimostra facilmente che, dato un flusso $\psi(t)$ che genera una traiettoria O che contiene il punto (π, y) , allora, continuando nel tempo il flusso ψ , esso ripercorrerà (periodicamente) i punti relativi alla traiettoria $O(-\pi, y)$, tenendo conto del fatto che un punto (x, y) si identifica con il punto $(x + 2\pi, y)$ proprio per la periodicità dell'angolo ϕ . Dunque sarebbe più corretto immaginare la Figura 3.2 disegnata sulla superficie di un cilindro in modo tale che le rette (π, y) e $(-\pi, y)$ vengano a coincidere.

Identificando i due punti di equilibrio $(\pi, 0)$ e $(-\pi, 0)$, si osservi che ciascuna delle due traiettorie¹⁴ relative alla curva di livello per $c = 1$ (curva disegnata con tratto spesso nella Figura 3.2) forma una traiettoria *omocli-
na*¹⁵.

Si osservi che per la determinazione del verso delle traiettorie relative alle curve di Figura 3.2 è sufficiente considerare (noti anche i punti di equilibrio) l'orientamento del campo vettoriale relativo al sistema autonomo del pendolo matematico, sapendo che tale campo vettoriale è in ogni punto tangente alle traiettorie, in base alla Proposizione 1.4.3.

In base a ciò si giustificano facilmente le affermazioni fatte in precedenza circa il verso con cui le traiettorie vengono percorse, anche senza calcolare esplicitamente il flusso che genera tali traiettorie.

Riportiamo il campo vettoriale del pendolo matematico (non dissipativo) in Figura 3.3.

Il pendolo non dissipativo è un esempio classico di un sistema planare hamiltoniano. □

¹³come vedremo in seguito, considerando la funzione vettoriale del pendolo matematico.

¹⁴quella che giace nel semipiano $y > 0$ e quella che giace nel semipiano $y < 0$

¹⁵relativa al punto di sella $(\pi, 0)$.

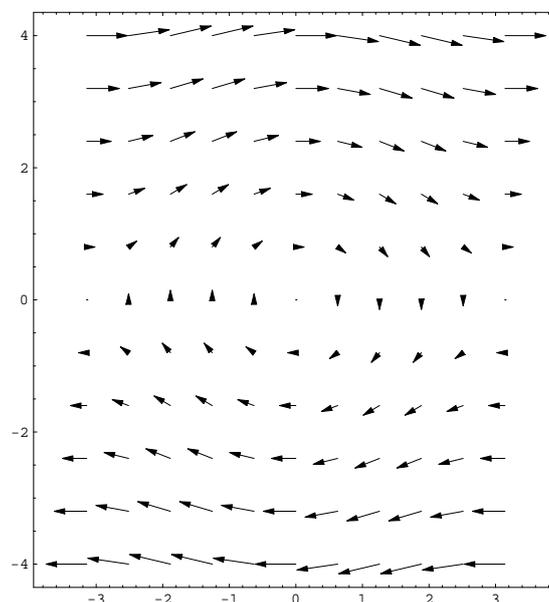


Figura 3.3: Campo vettoriale del pendolo matematico non dissipativo.

Abbiamo intuito come le funzioni di Hamilton siano anche utili per la individuazione di traiettorie omocline ed eterocline nonché di traiettorie chiuse¹⁶ che corrispondono a soluzioni periodiche.

Il precedente Esempio 3.2.1 ci ha mostrato come trovare le traiettorie di un sistema (il pendolo) descritto da una equazione differenziale del tipo

$$\ddot{x} = -\sin x$$

3.2.3 EquaDiff del tipo $\ddot{x} = h(x)$

In realtà, in modo del tutto analogo a come fatto per il pendolo, è possibile individuare le traiettorie di un sistema descritto da una equazione differenziale del tipo

$$\ddot{x} = h(x)$$

Proposizione 3.2.5 *Sia data una equazione differenziale*

$$\ddot{x} = h(x) \tag{3.26}$$

¹⁶di alcune classi di sistemi planari.

In base alla *Proposizione 1.3.1* tale sistema è equivalente al sistema planare:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = h(x) \end{cases} \quad (3.27)$$

Tale sistema autonomo planare è hamiltoniano, con funzione di Hamilton data da

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(y^2 - y_0^2) - \int_{x_0}^x h(w)dw \quad (3.28)$$

ove (x_0, y_0) è un punto del dominio. Le curve di livello di H contengono le traiettorie del sistema.

Dimostrazione: basta applicare le *Proposizioni 3.2.3* e *3.2.4*. □

Valgono inoltre considerazioni del tutto simili a quelle fatte nello studio del pendolo non lineare.

3.2.4 Integrali primi

Consideriamo al solito un sistema autonomo planare dato da

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (3.29)$$

Se tale sistema è hamiltoniano, vale quanto detto in precedenza, tuttavia se il sistema non è hamiltoniano, ossia se non vale la (3.9), è ancora possibile trovare le traiettorie mediante lo studio di un integrale primo del sistema (3.29).

Definizione 3.2.2 *La funzione $F(x, y)$ si dice integrale primo del sistema (3.29) se e solo se*

$$\frac{\partial F}{\partial x} f + \frac{\partial F}{\partial y} g = 0 \quad \forall (x, y) \in D \quad (3.30)$$

Si osservi che ogni funzione di Hamilton è un integrale primo, come si verifica facilmente partendo dalla definizione di funzione di Hamilton e che, naturalmente, non vale il vice versa.

L'utilità di un integrale primo è la stessa di quella di una funzione di Hamilton, come si evince dalla seguente

Proposizione 3.2.6 *Se $F(x, y)$ è un integrale primo del sistema (3.29), allora F è costante lungo le traiettorie del sistema in questione, cioè risulta, per ogni punto (ξ, η) del dominio:*

$$F(\phi(t; (\xi, \eta))) = F(\xi, \eta) \quad (3.31)$$

Dimostrazione: si osservi che, indicando $\phi(t; (\xi, \eta))$ per semplicità con la scrittura $\phi(t)$, risulta:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(\phi(t)) &= \frac{\partial F}{\partial x}(\phi(t))\dot{\phi}_1(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\phi(t))\dot{\phi}_2(t) = \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(\phi(t))f(\phi(t)) + \frac{\partial F}{\partial y}(\phi(t))g(\phi(t)) = 0 \end{aligned}$$

avendo considerato che ϕ è soluzione del sistema autonome e la definizione di integrale primo.

Ma quanto scritto implica proprio che F è costante lungo una generica traiettoria e si ha dunque la tesi. \square

Il problema ora è chiaramente quello della determinazione di un integrale primo di un sistema.

A tal fine si cerca di costruire un sistema hamiltoniano a partire dal sistema originario (3.29).

Definizione 3.2.3 *La funzione $m(x, y)$ si chiama fattore integrante del sistema (3.29) se e solo se il sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = m(x, y)f(x, y) \\ \dot{y} = m(x, y)g(x, y) \end{cases} \quad (3.32)$$

è un sistema Hamiltoniano.

Vale allora (e questo è un risultato importante) la seguente

Proposizione 3.2.7 *Se $S(x, y)$ è una funzione di Hamilton¹⁷ del sistema (3.32), allora S è un integrale primo¹⁸ del sistema (3.29).*

Dimostrazione: in base alla definizione (3.2.1), sappiamo che se S è una funzione di Hamilton per il sistema (3.32) deve valere

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -m g \quad \frac{\partial S}{\partial y} = m f$$

¹⁷determinabile con i metodi visti in precedenza.

¹⁸e lo studio delle curve di livello di S permetterà pertanto l'individuazione delle traiettorie del sistema (3.29)

Risulta allora che:

$$\frac{\partial S}{\partial x}f + \frac{\partial S}{\partial y}g = -m g f + m f g = 0$$

e quindi in base alla Definizione 3.2.2 si conclude che S è un integrale primo di (3.29). \square

Si noti che abbiamo solo spostato il problema dalla ricerca di un integrale primo vero e proprio alla ricerca di un fattore integrante.

Noto un integrale primo, chiaramente, risulta facile l'individuazione delle traiettorie del sistema di partenza, procedendo in modo analogo a quanto fatto per il pendolo matematico nell'Esempio 3.2.1.

Studiamo allora come trovare un fattore integrante, visto che dalla conoscenza di un fattore integrante del sistema (3.29) si perviene alla determinazione di un integrale primo di tale sistema.

A partire dalla definizione di fattore integrante e tenendo conto della Proposizione 3.2.3 si conclude che m è fattore integrante del sistema (3.29) se e solo se

$$\frac{\partial(mf)}{\partial x} + \frac{\partial(mg)}{\partial y} = 0 \quad (3.33)$$

ossia se e solo se

$$\frac{\partial m}{\partial x} f + m \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} g + m \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

ossia se e solo se

$$f \frac{\partial m}{\partial x} + g \frac{\partial m}{\partial y} = -m \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right]$$

e supponendo $f \neq 0$ si ha che

Proposizione 3.2.8 *Se $f \neq 0$ nel dominio D , allora m è fattore integrante di (3.29) se e solo se*

$$\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{g}{f} \frac{\partial m}{\partial y} = -m \frac{1}{f} \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right] \quad (3.34)$$

La verità di tale Proposizione discende da quanto appena detto in precedenza.

La equazione differenziale alle derivate parziali (3.34) non può essere risolta in generale. Prenderemo in considerazione, tuttavia, alcuni casi particolari di interesse.

Proposizione 3.2.9 *Se vale $f \neq 0$ e se risulta che*

$$\frac{1}{f} \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right] = p(x) \quad (3.35)$$

ossia se il primo membro della precedente espressione dipende solo da x e non anche da y , allora indicando con $P(x)$ una primitiva di $p(x)$ si ha che la funzione

$$\tilde{p}(x) = e^{-P(x)} \quad (3.36)$$

è un integrale primo del sistema (3.29).

Dimostrazione: basta applicare la Proposizione 3.2.8 per $m = \tilde{p}$ e tenere conto della definizione di $p(x)$.

Infatti:

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = -e^{-P(x)} p(x) \quad \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} = 0$$

e tenendo conto del significato di p e di \tilde{p} si deduce, applicando la Proposizione a cui si fa riferimento, la tesi. \square

3.2.5 Risoluzione di una EquaDiff del primo ordine, lineare ed a coefficienti non costanti

Vogliamo a questo punto fare un istruttivo esempio mostrando come, in base a quanto appreso fino ad ora, sia possibile risolvere una equazione differenziale del primo ordine, lineare ed a coefficienti non costanti. Ritroveremo un risultato noto dall'Analisi Matematica.

Esempio 3.2.2 (Risoluzione di un'equazione differenziale lineare a coefficienti non costanti) Sia data la equazione differenziale

$$\dot{x} = a(t)x + b(t) \quad (3.37)$$

In conseguenza della Proposizione 1.4.1 studiamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = a(x)y + b(x) \end{cases} \quad (3.38)$$

In accordo con la Proposizione 3.2.9 notiamo che

$$\frac{1}{f} \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \right] = a(x) \quad (3.39)$$

dipende effettivamente solo da x . Ed allora la funzione

$$\tilde{p}(x) = e^{-A(x)} = e^{-\int_{\xi}^x a(s)ds} \quad (3.40)$$

è fattore integrante del sistema (3.38).

Pertanto il seguente sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{-\int_{\xi}^x a(s)ds} \\ \dot{y} = e^{-\int_{\xi}^x a(s)ds} [a(x)y + b(x)] \end{cases} \quad (3.41)$$

è hamiltoniano ed una funzione di Hamilton di tale sistema sarà un integrale primo del sistema (3.38) e ci permetterà di individuare le traiettorie di tale ultimo sistema (essendo queste contenute nelle curve di livello dell'integrale primo stesso). Da tali traiettorie, infine, risaliremo alla soluzione generale della nostra equazione differenziale di partenza. ξ è un numero reale.

Calcoliamo ora la funzione di Hamilton del sistema (3.41), servendoci della Proposizione 3.2.3.

Pertanto, abbiamo che:

$$H_0(x, y) = \int_{\eta}^y e^{-\int_{\xi}^x a(s)ds} dv - \int_{\xi}^x e^{-\int_{\xi}^w a(s)ds} [a(w)\eta + b(w)] dw \quad (3.42)$$

esplicitando

$$H_0 = e^{-\int_{\xi}^x a(s)ds} [y - \eta] - \int_{\xi}^x e^{-\int_{\xi}^w a(s)ds} [a(w)\eta + b(w)] dw \quad (3.43)$$

Dunque H_0 sarà anche integrale primo del sistema (3.38).

$(\xi, \eta) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ individua (come vedremo meglio in seguito) la generica condizione iniziale.

Troviamo ora la generica curva di livello della funzione H_0 passante per (ξ, η) e definita da:

$$H_0(x, y) - H_0(\xi, \eta) = 0$$

con (ξ, η) generico punto del dominio.

Poichè $H_0(\xi, \eta) = 0$ si ha che (x, y) appartiene a tale curva se e solo se

$$e^{-\int_{\xi}^x a(s)ds} [y - \eta] - \int_{\xi}^x e^{-\int_{\xi}^w a(s)ds} [a(w)\eta + b(w)] dw = 0$$

ossia se e solo se

$$e^{-\int_{\xi}^x a(s)ds} [y - \eta] - [-\eta e^{-\int_{\xi}^x a(s)ds} + \eta] - \int_{\xi}^x e^{-\int_{\xi}^w a(s)ds} b(w)dw = 0$$

ossia se e solo se

$$e^{-\int_{\xi}^x a(s)ds} y - \eta - \int_{\xi}^x e^{-\int_{\xi}^w a(s)ds} b(w)dw = 0$$

Esplicitando y in funzione di x , otteniamo che la precedente espressione è equivalente a:

$$\begin{aligned} y &= \left[\int_{\xi}^x e^{-\int_{\xi}^w a(s)ds} b(w)dw + \eta \right] e^{\int_{\xi}^x a(s)ds} = \\ &= y = \int_{\xi}^x e^{\int_{\xi}^w a(s)ds} b(w)dw + \eta e^{\int_{\xi}^x a(s)ds} \end{aligned} \quad (3.44)$$

La precedente equazione permette dunque di trovare le curve di livello di H_0 e pertanto anche le traiettorie del sistema (3.38), in base a quanto detto ed in base a quanto visto nell'esempio sul pendolo matematico non dissipativo.

Si verifica facilmente che

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \int_{\xi}^t e^{\int_{\xi}^s a(s)ds} b(w)dw + \eta e^{\int_{\xi}^t a(s)ds} \end{cases} \quad (3.45)$$

è una soluzione di (3.38). Precisamente tale soluzione genera la traiettoria ricavata con la (3.44). Se così non fosse, infatti, esisterebbe almeno un valore \bar{t} in cui $(x(\bar{t}), y(\bar{t}))$ non soddisfa la equazione ricavata in precedenza per la traiettoria. Ma se si sostituiscono le espressioni trovate si vede subito che questo conduce ad un assurdo¹⁹.

In base allora alla Proposizione 1.4.1 sappiamo che

$$\lambda(t; \xi, \eta) = \int_{\xi}^t e^{\int_{\xi}^s a(s)ds} b(w)dw + \eta e^{\int_{\xi}^t a(s)ds} \quad (3.46)$$

è la soluzione generale cercata della equazione differenziale lineare a coefficienti non costanti (3.37). \square

Ci proponiamo ora di considerare una applicazione dei risultati ottenuti mediante alcuni esempi.

¹⁹del tipo $a \neq a$

3.2.6 Esempi ulteriori

Esempio 3.2.3 Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases} \quad (3.47)$$

Applichiamo la proposizione (3.2.1) e studiamo la equazione

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} + x \quad (3.48)$$

ed osserviamo che tale equazione è una equazione differenziale lineare a coefficienti non costanti.

In base a quanto stabilito nell'Esempio 3.2.2 possiamo affermare dunque che la soluzione generale è:

$$\lambda(x; \xi, \eta) = \int_{\xi}^x e^{\int_w^x a(s)ds} b(w)dw + \eta e^{\int_{\xi}^x a(s)ds}$$

ossia

$$\begin{aligned} \lambda(x; \xi, \eta) &= \int_{\xi}^x e^{-\int_w^x \frac{1}{s} ds} w dw + \eta e^{-\int_{\xi}^x \frac{1}{s} ds} = \\ &= \int_{\xi}^x e^{\log(w/x)} w dw + \eta e^{\log(\xi/x)} = \int_{\xi}^x \frac{w^2}{x} dw + \frac{\eta \xi}{x} = \\ &= \frac{1}{x} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{\xi^3}{3} \right] + \frac{\eta \xi}{x} = \frac{x^2}{3} + \frac{1}{x} \left[\frac{-\xi^3}{3} + \eta \xi \right] \end{aligned} \quad (3.49)$$

Tenendo conto della Proposizione 3.2.1 possiamo affermare che la precedente espressione descrive le traiettorie del sistema planare (3.47) che stiamo considerando in questo esempio.

Più precisamente scriviamo

$$O(\xi, \eta) = \{(x, \lambda(x; \xi, \eta)) : x \in D\} \quad (3.50)$$

ove O indica la traiettoria del sistema (3.47) passante per (ξ, η) , λ è dato dalla espressione trovata in precedenza e D è il dominio in cui è definita la soluzione λ .

Tenendo anche conto del (verso del) campo vettoriale definito dai secondi membri della (3.47) siamo ora in grado di disegnare l'insieme delle traiettorie del nostro sistema (3.47).

Tali traiettorie sono riportate in Figura 3.4.

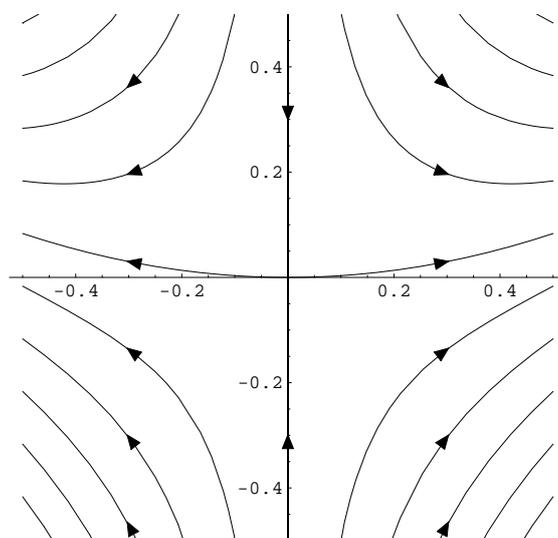


Figura 3.4: Le traiettorie del sistema (3.47). Notare il punto di sella.

Notare la presenza del punto di sella.

Inoltre si osservi l'incurvarsi delle traiettorie che tendono, allontanandosi dal punto di equilibrio, ad assumere andamenti completamente differenti da quelle del sistema linearizzato. \square

3.2.7 Cenni alla meccanica lagrangiana

Richiamiamo ora alcuni concetti di Meccanica, rimandando comunque ad un testo di Meccanica Razionale per una trattazione completa e rigorosa.

Sappiamo che vale la legge di Newton

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (3.51)$$

In un sistema di riferimento cartesiano, possiamo proiettare la equazione precedente lungo i tre versori (costanti) del sistema stesso, per ottenere le tre equazioni scalari

$$F_\alpha = m\ddot{x}_\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3$$

ove chiaramente $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ sono le coordinate cartesiane del punto P in cui si trova la massa m al tempo t .

Ammettiamo che le forze \vec{F} siano conservative, si potrà scrivere pertanto che:

$$\frac{d}{dt}(m \dot{x}_\alpha) = -\frac{\partial V}{\partial x_\alpha} \quad (3.52)$$

con V energia potenziale nel punto P .

Se indichiamo con T l'energia cinetica della massa m , abbiamo:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$$

pertanto:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\alpha} = m\dot{x}_\alpha \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (3.53)$$

ed allora la (3.52) diventa:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (3.54)$$

Se interpretiamo la funzione T come $T = T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ e l'energia potenziale V come $V = V(x_1, x_2, x_3)$ allora ponendo per definizione:

$$L(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = T - V \quad (3.55)$$

si osserva che L , note posizione e velocità della massa m , fornisce la differenza tra l'energia cinetica e l'energia potenziale della massa stessa. Inoltre:

$$\frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial V}{\partial x_\alpha} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\alpha}$$

per $\alpha = 1, 2, 3$.

Allora la (3.54) si può scrivere come

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (3.56)$$

con chiaro significato dei simboli²⁰.

Un risultato interessante è che la (3.56), che prende il nome di equazione di Lagrange (con L definita in (3.55) detta funzione di Lagrange) vale in realtà più in generale.

²⁰ $\frac{\partial}{\partial \dot{x}_\alpha}$ indica solo che si deve derivare rispetto alla variabile (\dot{x}_α). Si consulti un testo di Meccanica Razionale per una trattazione più approfondita.

A tal fine ricordiamo che con il termine *coordinate generalizzate* si intende il minor numero di variabili necessarie a descrivere la *configurazione* di un dato sistema meccanico. In altre parole le coordinate generalizzate individuano il minor numero di grandezze²¹ che è necessario conoscere per fissare univocamente la configurazione del sistema meccanico, ossia la posizione di tutti i punti materiali che compongono il sistema stesso. Le coordinate generalizzate sono tipicamente delle lunghezze o degli angoli in opportuni sistemi di riferimento e si indicano con q_1, q_2, \dots, q_m . Ovviamente le coordinate cartesiane, sferiche e cilindriche, usate per descrivere il moto di una massa puntiforme, sono casi molto particolari di coordinate generalizzate.

In Meccanica Razionale si dimostra la seguente

Proposizione 3.2.10 *Sia dato un sistema conservativo con coordinate generalizzate q_i , $i = 1, \dots, m$, energia cinetica espressa dalla funzione $T = T(q_i, \dot{q}_i, t)$ ed energia potenziale data dalla funzione $V = V(q_i, t)$ (con $i = 1, \dots, m$), possiamo scrivere*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i, i = 1, \dots, m \quad (3.57)$$

con $L = T - V$ detta *funzione di Lagrange del sistema*. La precedente equazione è detta *equazione di Lagrange*.

La precedente espressione vale anche in caso di presenza di reazioni vincolari (che non compiono lavoro).

Nel caso più generale, in cui sono presenti anche forze non conservative, l'equazione di Lagrange diventa ($\forall i, i = 1, \dots, m$):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^p \left(F_{x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + F_{y_j} \frac{\partial y_j}{\partial q_i} + F_{z_j} \frac{\partial z_j}{\partial q_i} \right) \quad (3.58)$$

ove p indica il numero di punti materiali (di masse) su cui agiscono le forze non conservative. La risultante delle forze non conservative che agiscono sulla massa j -esima ha componenti cartesiane date da $(F_{x_j}, F_{y_j}, F_{z_j})$. Inoltre la massa j -esima ha posizione, in un riferimento cartesiano, data da (x_j, y_j, z_j) . La posizione dipenderà in generale dalle coordinate generalizzate e dal tempo, le forze agenti potranno dipendere inoltre anche dai termini \dot{q}_k , con chiaro significato dei simboli. Si consulti un testo di Meccanica per una esposizione rigorosa.

²¹sia m il numero di tali grandezze.

Il secondo membro della equazione precedente viene chiamato *forza generalizzata* e si indica con la scrittura Q_{q_i} .

L'indice i varia tra 1 ed m . Si noti che con m abbiamo indicato il numero minimo di grandezze che è necessario specificare per definire univocamente la configurazione del sistema meccanico sotto osservazione.

Per un punto materiale che si muove liberamente nello spazio si avrà $m = 3$ e $p = 1$.

3.2.8 Massa vincolata a muoversi su una curva nel piano verticale

Premesso questo possiamo considerare il seguente

Esempio 3.2.4 Una massa m sia vincolata a muoversi su una curva $z = f(x)$ del piano verticale in presenza della attrazione di gravità g . Allora, avendo fissato un riferimento cartesiano, si osserva subito che:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m \left(\dot{x}^2 + \left(\frac{df}{dx} \dot{x} \right)^2 \right)$$

e

$$V = mgz = mgf(x)$$

pertanto:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m \left(\dot{x}^2 + \left(\frac{df}{dx} \dot{x} \right)^2 \right) - mgf(x) = \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \left(1 + \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \right) - mgf(x) \end{aligned} \quad (3.59)$$

come si vede T dipende solo da x ed \dot{x} , mentre V dipende solo da x , come ci si aspettava per la presenza del vincolo. Si osservi che $\frac{df}{dx}$, ossia la derivata di f rispetto ad x , dipende da x .

Passando a calcolare le derivate:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \left(1 + \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \right) \quad (3.60)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial x} = m\dot{x}^2 \left(\frac{df}{dx} \frac{d^2f}{dx^2} \right) - mg \frac{df}{dx} \quad (3.61)$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{d}{dt} \left[m\dot{x} \left(1 + \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \right) \right] = \\
 &= m\ddot{x} \left(1 + \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \right) + m\dot{x} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{df}{dx} \right)^2 \right] = \\
 &= m\ddot{x} \left(1 + \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \right) + 2m\dot{x}^2 \left(\frac{df}{dx} \frac{d^2f}{dx^2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

possiamo a questo punto finalmente scrivere la equazione di Lagrange:

$$m\ddot{x} \left(1 + \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \right) + m\dot{x}^2 \left(\frac{df}{dx} \frac{d^2f}{dx^2} \right) + mg \frac{df}{dx} = 0 \tag{3.63}$$

Tale equazione differenziale si può chiaramente riscrivere nella seguente forma:

$$\ddot{x} = \frac{-\dot{x}^2 \left(\frac{df}{dx} \frac{d^2f}{dx^2} \right) - g \frac{df}{dx}}{1 + \left(\frac{df}{dx} \right)^2} \tag{3.64}$$

Possiamo ridurre la precedente equazione differenziale del secondo ordine ad una sistema planare del primo ordine, per la Proposizione (1.3.1).

Ossia ponendo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$ si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \frac{-y^2 \left(\frac{df}{dx} \frac{d^2f}{dx^2} \right) - g \frac{df}{dx}}{1 + \left(\frac{df}{dx} \right)^2} \end{cases} \tag{3.65}$$

In realtà è facile ottenere le traiettorie del precedente sistema. Infatti poichè stiamo studiando un sistema fisico non dissipativo, l'energia resterà costante durante l'evoluzione del sistema stesso. Ci viene dunque il naturale "sospetto" che l'energia sia un integrale primo per il sistema considerato.

Per verificare analiticamente ciò consideriamo l'espressione dell'energia:

$$E = T + V = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 \left(1 + \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \right) + mgf(x) \tag{3.66}$$

che riscriviamo come:

$$E(x, y) = \frac{1}{2}my^2 \left(1 + \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \right) + mgf(x) \quad (3.67)$$

ove chiaramente la derivata di f rispetto ad x è funzione del punto x .

Si verifica facilmente che la (3.67) verifica la Definizione 3.2.2 di integrale primo.

A questo punto non è difficile individuare le traiettorie del sistema considerato studiando le curve di livello di $E(x, y)$.

Osservando il sistema (3.65), si nota che il punto (x_0, y_0) è un punto di equilibrio se e solo se

$$y_0 = 0 \quad \frac{df}{dx}(x_0) = 0 \quad (3.68)$$

Se la massa m si trova ferma in un tratto ove la f ammette tangente orizzontale, allora la massa m non varierà la sua posizione. Infatti a tale situazione fisica corrisponde proprio lo stato $(x_0, y_0) = (x_0, 0)$ che è un punto di equilibrio per il sistema (3.65), essendo $\frac{df}{dx}(x_0) = 0$.

Del resto una tale situazione fisica è ben nota all'esperienza comune.

Da quanto detto appare che, nello spazio di fase, i punti di equilibrio giacciono tutti sull'asse delle x , essendo $y_0 = 0$ per il generico punto di equilibrio (x_0, y_0) del sistema considerato. Pertanto il generico punto di equilibrio si può identificare con il solo valore x_0 in quanto, appunto, $(x_0, y_0) = (x_0, 0)$.

Nel seguito prenderemo in considerazione solo punti di equilibrio $(x_0, 0)$ t.c.

$$\frac{df}{dx} \neq 0 \quad \text{per } x \neq x_0 \quad x \in]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$$

con $\epsilon \in \mathbb{R}$.

Escluderemo quindi il caso in cui la derivata si annulli su tutto un intervallo. Inoltre considereremo la f definita su tutto \mathbb{R} , anche se non cambia nulla considerando f definita in $(a, b) \in \mathbb{R}$.

Cominciamo con il considerare la Figura 3.5.

Sia x_0 un punto per cui la f abbia un minimo assoluto, nel senso che per ogni x con $x \neq x_0$ si abbia $f(x) > f(x_0)$, ove la disuguaglianza deve valere strettamente.

Dall'Analisi Matematica sappiamo allora che $\frac{df}{dx}(x_0) = 0$ e quindi il punto $(x_0, 0)$ nello spazio di stato è un punto di equilibrio del sistema (3.65).

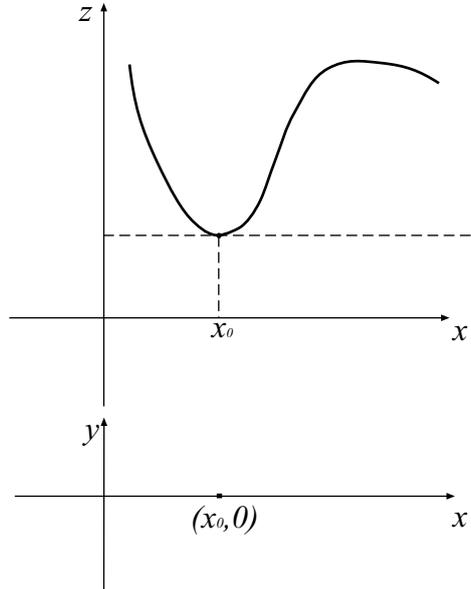


Figura 3.5: Funzione $z = f(x)$ e curva di livello dell'energia contenente $(x_0, 0)$.

Andiamo a considerare la curva di livello dell'energia $E(x, y)$ passante per $(x_0, 0)$ data dall'insieme di punti

$$N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : E(x, y) = E(x_0, 0)\} \quad (3.69)$$

ossia, in virtù della (3.67) e della (3.68) da

$$N_c = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}my^2 \left(1 + \left(\frac{df}{dx}(x) \right)^2 \right) + mgf(x) = mgf(x_0) \right\} \quad (3.70)$$

Notiamo che tale insieme è composto dall'unico punto $(x_0, 0)$. Infatti qualsiasi altro punto $(\xi, \eta) \neq (x_0, 0)$ non può appartenere ad N_c essendo, in conseguenza delle ipotesi fatte, $f(\xi) > f(x_0)$ e pertanto

$$\frac{1}{2}m\eta^2 \left(1 + \left(\frac{df}{dx}(\xi) \right)^2 \right) + mgf(\xi) > mgf(x_0)$$

in quanto il primo termine della somma è sempre positivo o nullo.

Pertanto la curva di livello si riduce all'unico punto $(x_0, 0)$. (C.V.D.)

Questo implica alcuni risultati importanti.

In primo luogo non potranno esistere traiettorie aventi come limite il punto di equilibrio $(x_0, 0)$ se la f ha in x_0 un minimo assoluto (o anche relativo, come preciseremo). Infatti se per assurdo una tale traiettoria esistesse, essa costituirebbe una curva²² formata da punti ad energia E costante e pari a $E(x_0, 0)$ (si veda l'Esempio 3.2.1 sul pendolo). Ma questo è impossibile proprio in conseguenza del fatto che l'unico punto ad avere energia pari a $E(x_0, 0)$ è proprio $(x_0, 0)$.

Non esisteranno dunque neppure traiettorie eterocline o omocline collegate con un punto di equilibrio del tipo specificato.

Inoltre un tale punto di equilibrio $(x_0, 0)$ è stabile. Una traiettoria che passi in un punto (x_ξ, y_ξ) appartenente ad un intorno *sufficientemente piccolo* di $(x_0, 0)$, infatti, non si allontanerà mai oltre una certa distanza fissata dal punto di equilibrio stesso.

Per dimostrare ciò si osservi, per cominciare, che la traiettoria $O(x_\xi, y_\xi)$ passante per un punto (x_ξ, y_ξ) vicino a $(x_0, 0)$ sarà data solo da punti aventi energia paria a $E(x_\xi, y_\xi) \simeq E(x_0, 0)$ essendo l'energia un integrale primo del sistema (conservativo) ed essendo E una funzione continua.

Per punti (x_ξ, y_ξ) sufficientemente vicini a $(x_0, 0)$ l'energia $E(x_\xi, y_\xi)$ dovrà necessariamente essere maggiore di $E(x_0, 0)$, come si dimostra facilmente a partire dalla espressione dell'energia e sfruttando il fatto che la f presenta un minimo in x_0 .

Sia dunque $E(x_\xi, y_\xi) = E(x_0, 0) + \epsilon$, con $\epsilon \geq 0$ ed $\epsilon \ll 1$. La non negatività di ϵ vale in conseguenza di quanto detto²³.

L'equazione, da cui si ricava la traiettoria $O(x_\xi, y_\xi)$, è:

$$\frac{1}{2}my^2 \left(1 + \left(\frac{df}{dx}(x) \right)^2 \right) + mgf(x) = E(x_\xi, y_\xi) = mgf(x_0) + \epsilon \quad (3.71)$$

Tale equazione non potrà essere soddisfatta da quei punti (x, y) per cui

$$mg[f(x) - f(x_0)] > \epsilon \quad (3.72)$$

pertanto la traiettoria $O(x_\xi, y_\xi)$ che si considera non potrà comprendere punti con ascissa x che soddisfano la precedente disequazione. Fissato il vincolo $x \in]a, b[$ con $a < x_0 < b$, esistono certamente due valori reali a' e b' , con $a' < x_0$ ed $b' > x_0$ e $a', b' \in]a, b[$ tali che $f(a') > f(x_0)$ ed $f(b') > f(x_0)$, per il

²²di misura non nulla.

²³Stiamo considerando punti (x_ξ, y_ξ) sufficientemente vicini al punti di equilibrio considerato.

fatto che f ha in x_0 un minimo²⁴. Se a' e b' sono soluzioni della disequazione (3.72) allora la traiettoria $O(x_\xi, y_\xi)$ non assumerà certamente (mai) valori²⁵ per cui l'ascissa x cada fuori dall'intervallo $]a, b[$. Per fare sì che questo sia certamente vero basta scegliere (x_ξ, y_ξ) sufficientemente vicino a $(x_0, 0)$. Per la continuità dell'energia $E(x, y)$, infatti, ciò rende ϵ piccolo a piacere e tale da rendere vera la (3.72) per $x = a'$ e $x = b'$, come si può vedere facilmente. Allora fissato il vincolo $x \in]a, b[$ è certamente possibile trovare un intorno J di $(x_0, 0)$ tale che $(x_\xi, y_\xi) \in J \Rightarrow O(x_\xi, y_\xi) \in]a, b[\times \mathbb{R}$. Sia infine detto esplicitamente, per completezza, che $f(a') - f(x_0) > 0$, $f(b') - f(x_0) > 0$.

Inoltre se si vuole anche che la traiettoria sia tale che y sia contenuto in $] - \alpha, +\alpha[$, basterà che la differenza di energia ϵ sia resa sufficientemente piccola. Ometteremo una dimostrazione rigorosa di ciò, ma si osservi che se x è limitato anche y deve essere limitato. Più la evoluzione dell'ascissa x è limitata attorno ad x_0 e più piccola sarà la velocità massima raggiunta.

Da tutto ciò si deduce la semplice stabilità del punto $(x_0, 0)$ nelle ipotesi fatte. Si noti inoltre che il discorso svolto si estende al caso in cui il minimo di f sia solo relativo.

Consideriamo adesso la Figura 3.6.

Il punto x_0 è un minimo relativo, nel senso che $f(x) > f(x_0)$ se $x \neq x_0$ per x che appartiene ad un opportuno intorno di misura non nulla $I_{x_0} =]a, b[$ di x_0 .

La curva di livello N_c dell'energia E passante per $(x_0, 0)$ è sempre data dalla (3.70). Con ragionamento analogo a quello effettuato in precedenza si dimostra che tale curva di livello non può contenere punti (x, y) con ascissa $x \in I_{x_0}$ diversi da $(x_0, 0)$.

Per cui ritroviamo (localmente) i risultati precedenti, con ragionamento identico a quello svolto: $(x_0, 0)$ è punto di equilibrio stabile e non esistono nè traiettorie eterocline nè omocline per il punto di equilibrio $(x_0, 0)$ considerato.

Tuttavia ora N_c non è più composto dal solo punto $(x_0, 0)$. Infatti per quei punti x t.c. $f(x) \leq f(x_0)$ esiste almeno un valore di y t.c. la (3.70) sia soddisfatta²⁶. In particolare, fissato x , se $f(x) < f(x_0)$ esistono due valori

²⁴nel caso generale di minimo relativo non è detto che $f(a) > f(x_0)$ e $f(b) > f(x_0)$, tuttavia esisteranno comunque valori reali a' e b' t.c. $f(a') > f(x_0)$ e $f(b') > f(x_0)$ con $a', b' \in]a, b[$. Inoltre anche nel caso di minimo relativo di f , ϵ assumerà valori che possono essere resi piccoli quanto si vuole e che tenderanno a zero da destra al tendere di (x_ξ, y_ξ) a $(x_0, 0)$.

²⁵Si sfrutta anche il fatto che le traiettorie sono curve continue e dunque non possono "saltare" al di là di una retta $x = c$ senza intersecarla.

²⁶si deve risolvere una equazione di secondo grado in y che, ora, ammetterà soluzioni reali.

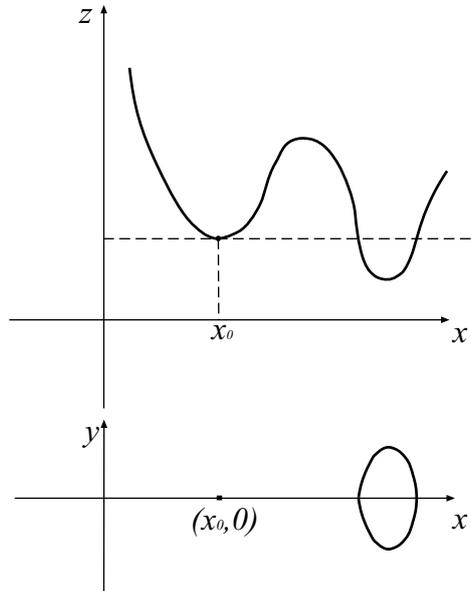


Figura 3.6: Funzione $z = f(x)$ e curva di livello dell'energia contenente $(x_0, 0)$.

distinti $y = \pm\eta \in \mathbb{R}$ che soddisfano la (3.70), mentre se $f(x) = f(x_0)$ l'unico valore di y ammesso è 0, come si vede facilmente con semplici considerazioni.

Dunque, fissato x , la curva di livello N_c conterrà il punto $(x, 0)$ quando si ha $f(x) = f(x_0)$, invece conterrà due punti simmetrici rispetto all'asse x , ossia $(x, \pm\eta)$ con $\eta \neq 0$, $\eta \in \mathbb{R}$ quando $f(x) < f(x_0)$. E non conterrà altri punti con l'ascissa x considerata.

Se infine $f(x) > f(x_0)$ allora N_c non contiene alcun punto con ascissa x .

Tutto questo risulta molto più chiaro se si osserva la Figura 3.6 ove è riportata la f e la curva di livello N_c nello spazio di fase.

Se si considera poi la (3.65) si nota che in (x, η) (se tale punto appartiene alla curva N_c con $\eta \neq 0$) la traiettoria contenuta in N_c e relativa a (x, η) viene percorsa in senso opposto rispetto al senso in cui viene percorsa la traiettoria relativa al punto $(x, -\eta)$ in tale punto stesso²⁷. Questo discende facilmente sostituendo i valori $(x, \pm\eta)$ all'interno della funzione vettoriale che definisce il sistema (3.65) e con semplici considerazioni.

Dai risultati fino ad ora ottenuti, appare chiaro che se la f ha in x_0

²⁷Si noti che $O(x, \eta)$ può coincidere o meno con $O(x, -\eta)$.

un punto di *massimo assoluto*, allora $\forall x$ esisterà almeno un punto (x, y) appartenente alla curva di livello N_c dell'energia E la quale²⁸ contiene $(x_0, 0)$.

In particolare se $f(x) < f(x_0)$ se $x \neq x_0$, allora la curva di livello di N_c si compone di quattro rami che si dipartono da $(x_0, 0)$, come visibile in Figura 3.7

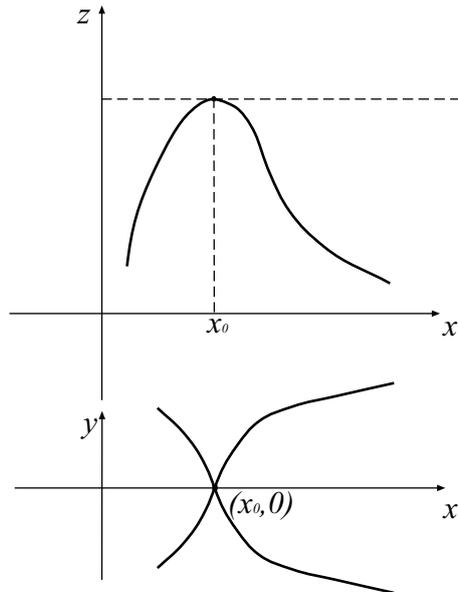


Figura 3.7: f con max assoluto in x_0 e curva di livello di E passante per $(x_0, 0)$

Se invece, per qualche valore ξ si ha $f(\xi) = f(x_0)$ allora la curva di livello conterrà il punto $(\xi, 0)$. Se $f(x) < f(\xi)$ per $x \neq \xi$ in un opportuno intorno locale di ξ , allora nei pressi di $(\xi, 0)$ si ha ancora un andamento della curva di livello di E come quello di Figura 3.7.

In questo caso esisteranno traiettorie eterocline tra $(x_0, 0)$ e $(\xi, 0)$, come si vede con considerazioni analoghe a quelle svolte nell'Esempio 3.2.1 del pendolo. I due rami che partono da $(x_0, 0)$ si reincontreranno in $(\xi, 0)$ e daranno luogo a due traiettorie eterocline, percorse in verso opposto, una al di sopra e l'altra al di sotto dell'asse x .

Se vi sono più punti di equilibrio del tipo di $(\xi, 0)$ l'andamento delle traiettorie si ripete (qualitativamente) più volte.

Consideriamo invece la Figura 3.8.

²⁸curva

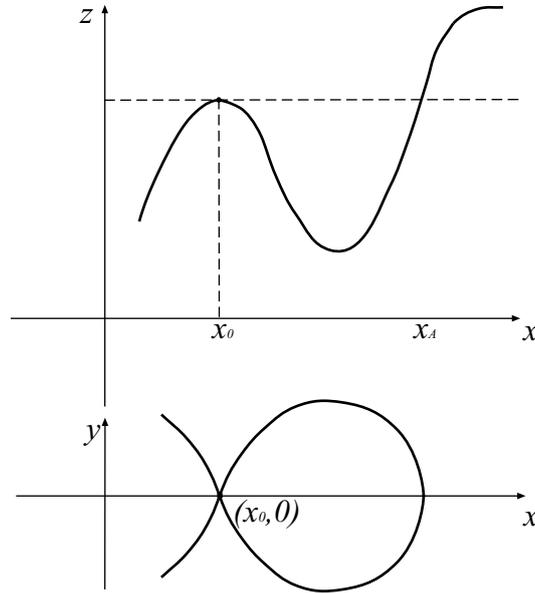


Figura 3.8: Esistenza di una traiettoria omoclina.

f abbia in x_0 un massimo relativo, nel senso che $f(x) < f(x_0)$ con $x \neq x_0$ per x in un opportuno intorno I di x_0 e sia $f(\xi) > f(x_0)$ per almeno un valore di ξ .

Sia inoltre x_A il punto più vicino ad x_0 e t.c. $f(x_0) = f(x_A)$, come indicato in Figura 3.8. Allora la solita curva di livello N_c conterrà due rami che si dipartono da x_0 e si reincontrano in x_A . Inoltre se $(x_A, 0)$ non è punto di equilibrio (come nel caso di figura) allora si forma una traiettoria omoclina, mentre se $(x_A, 0)$ è punto di equilibrio, allora si formano due traiettorie eterocline (percorse in verso opposto) tra i punti $(x_0, 0)$ ed $(x_A, 0)$ nello spazio di fase.

Un esempio di traiettorie eterocline è riportato in Figura 3.9.

Si noti che in x_F , f ha un flesso a tangente orizzontale e, pertanto, annullandosi la derivata, $(x_F, 0)$ è un punto di equilibrio (instabile, come si verifica facilmente). Pertanto, in conseguenza di quanto detto, con facili considerazioni, si hanno due traiettorie eterocline, simmetriche e percorse in verso opposto, che connettono $(x_0, 0)$ con $(x_F, 0)$. Tali traiettorie sono indicate in Figura con due colori differenti.

Si noti peraltro che quando la f ha un flesso a tangente orizzontale si ha sempre un punto di equilibrio instabile.

Se al posto del flesso vi fosse stato un massimo come in Figura 3.10, allora

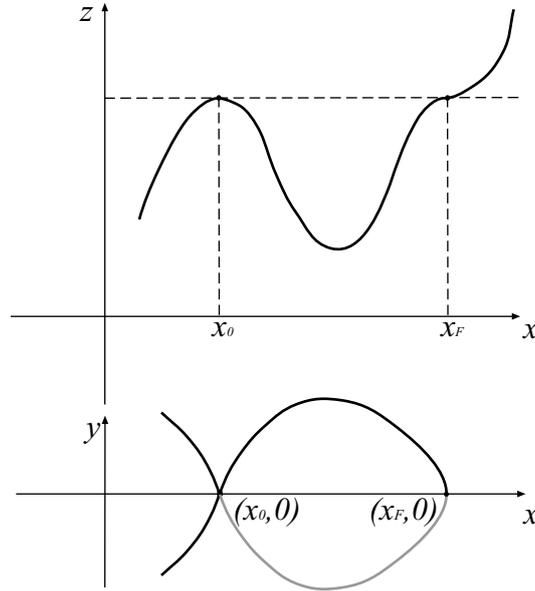


Figura 3.9: Esistenza di due traiettorie eterocline

la curva di livello sarebbe continuata, come visibile in Figura.

I due rami che partono dal punto $(x_M, 0)$ di figura, possono a loro volta divergere, reincontrarsi a formare una omoclina o una eteroclina, a seconda se il punto di ricongiungimento sia o no di equilibrio, in conformità con quanto detto.

Troviamo in conclusione i seguenti risultati:

Sia $(x_0, 0)$ un punto di equilibrio corrispondente ad un punto x_0 in cui la f assume un massimo relativo²⁹ o in cui f ha un flesso a tangente orizzontale³⁰, allora se esiste un intervallo $I =]x_0, \xi[$ tale che $\forall x \in I$ si ha $f(x) < f(x_0)$ e $f(x_0) = f(\xi)$ con $\xi > x_0$, allora

- *se $(\xi, 0)$ è un punto di equilibrio, si hanno due traiettorie eterocline (simmetriche) tra $(x_0, 0)$ e $(\xi, 0)$, percorse in verso opposto. In particolare quella per $y > 0$ viene percorsa nel senso crescente delle x .*
- *se $(\xi, 0)$ non è un punto di equilibrio, allora si ha una traiettoria omoclina relativamente a $(x_0, 0)$, percorsa in senso orario.*

²⁹nel senso che localmente $f(x) < f(x_0)$ per $x \neq x_0$

³⁰tale che la derivata si annulli localmente nel solo punto x_0 .

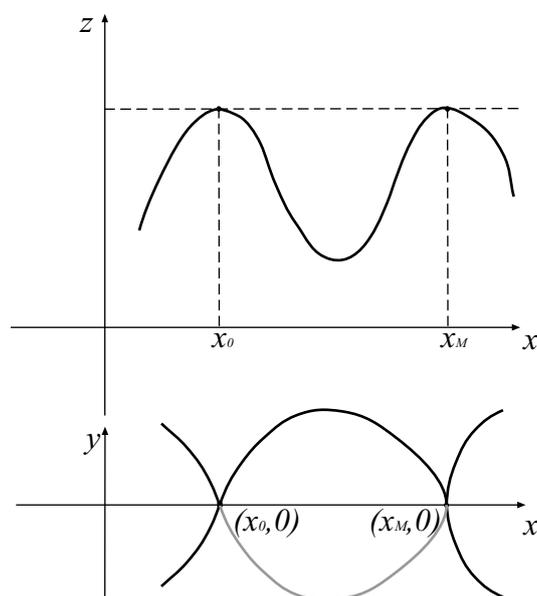


Figura 3.10:

Tali traiettorie eterocline o omocline giaceranno a destra della retta $x = x_0$

Dualmente se esiste un intervallo $J =]\xi, x_0[$ t.c. $\forall x \in I$ si ha $f(x) < f(x_0)$ e $f(x_0) = f(\xi)$ con $\xi < x_0$ numero reale, allora

- se $(\xi, 0)$ è un punto di equilibrio, si hanno due traiettorie eterocline (simmetriche) tra $(x_0, 0)$ e $(\xi, 0)$, percorse in verso opposto. In particolare quella per $y > 0$ viene percorsa nel senso crescente delle x .
- se $(\xi, 0)$ non è un punto di equilibrio, allora si ha una traiettoria omocline relativamente a $(x_0, 0)$, percorsa in senso orario.

Tali traiettorie eterocline o omocline giaceranno a sinistra della retta $x = x_0$.

Si comprende dunque come da un dato punto di equilibrio possano “partire” al massimo due traiettorie omocline o quattro eterocline. Chiaramente si possono avere anche combinazioni del tipo “una omocline e due eterocline”.

Da un punto di equilibrio relativo ad un massimo locale di f si “staccheranno” quattro rami (ogni coppia di rami potrà formare al più una omocline o due eterocline), da un flesso a tangente orizzontale si dipartiranno due rami (che possono formare al più una omocline o due eterocline).

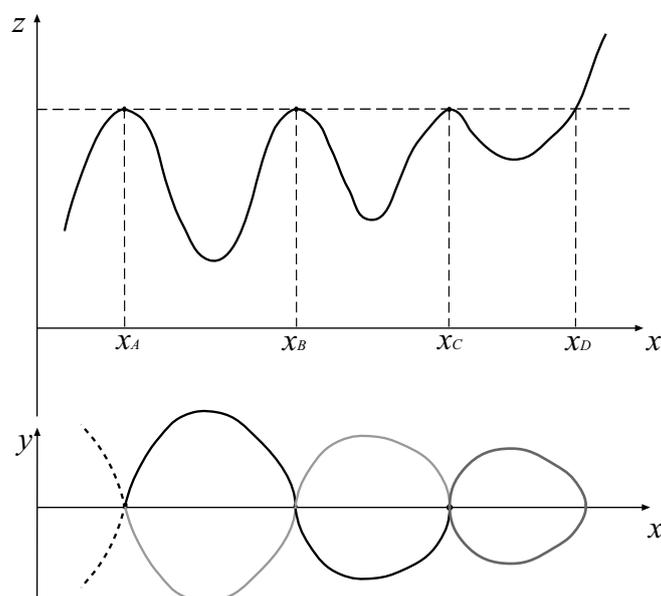


Figura 3.11: Esempi di possibili traiettorie omocline o eterocline.

Si noti che tali rami però potrebbero anche non incontrarsi e formare delle traiettorie non limitate.

Consideriamo la Figura 3.11.

Non è difficile vedere come tra $(x_A, 0)$, $(x_B, 0)$ ed $(x_C, 0)$ esistano traiettorie eterocline, mentre a destra di $(x_C, 0)$ troviamo una traiettoria omocline, non essendo $(x_D, 0)$ un punto di equilibrio. Se però in x_D la f avesse presentato un flesso a tangente orizzontale (conservando per il resto l'andamento di Figura), avremmo avuto ulteriori due traiettorie eterocline a destra di $x = x_C$ tra $(x_C, 0)$ e $(x_D, 0)$.

In base agli esempi fatti si possono facilmente considerare andamenti qualsiasi della funzione $f(x)$. A tale fine si osservino inoltre i seguenti risultati:

- Se f è definitivamente (strettamente) maggiore di $f(x_0)$ per $x > \beta$ e per $x < \alpha$, allora la curva di livello N_c dell'energia non conterrà punti aventi ascissa maggiore di β o minore di α . Può anche risultare (convenzionalmente) $\alpha = -\infty$ o $\beta = +\infty$, con semplici considerazioni. Per esempio in Figura 3.11 non si hanno punti della curva di livello N_c di E a destra di $x = x_D$.

- Se f è definitivamente (strettamente) minore di $f(x_0)$ per $x > \beta$ e $x < \alpha$, allora la curva di livello N_c dell'energia avrà a destra di $x = \beta$ ed a sinistra di $x = \alpha$ due bracci (da ciascuna parte) simmetrici rispetto all'asse delle ascisse che non si incontreranno mai (a destra di β o a sinistra di α , chiaramente). Anche qui possiamo porre eventualmente $\alpha = -\infty$ o $\beta = +\infty$. Così in Figura 3.11, a sinistra di $x = x_A$ avremo due bracci (disegnati con linea tratteggiata) che non si incontreranno più per $x < x_A$.

Per lo studio generale delle traiettorie del sistema (3.65), passanti per un punto (ξ, η) si fa un discorso analogo a quello fatto.

Ossia andiamo a considerare ancora la curva di livello N_c delle'energia E , formata dai punti (x, y) tali che $E(x, y) = E(\xi, \eta) = cost$.

Consideriamo poi la quota h_{max} raggiungibile dalla massa m per energia cinetica nulla, data da $h_{max} = \frac{E(\xi, \eta)}{mg}$ e conduciamo una linea parallela all'asse delle ascisse avente quota h_{max} .

Con ragionamento analogo a quello svolto in precedenza, avremo che

- Se per x fissato risulta $f(x) < h_{max}$, allora avremo due punti³¹ $(x, \pm\eta)$ che appartengono alla curva N_c , con $\eta > 0$.
- Se per x fissato risulta $f(x) = h_{max}$, allora $(x, 0)$ sarà l'unico punto di N_c con ascissa x .
- Se per x fissato risulta $f(x) > h_{max}$ non si avranno punti con ascissa x appartenenti alla curva di livello N_c dell'energia.

Dunque le curve di livello di N_c avranno ancora l'andamento a noi noto dagli esempi fatti e si ritrovano analoghe conclusioni a quelle ottenute, come si può facilmente verificare. Tuttavia occorre fare delle precisazioni aggiuntive, considerando anche possibilità in più.

Per esempio consideriamo la Figura 3.12.

La curva di livello considerata è una curva chiusa non contenente punti di equilibrio³².

Pertanto, nel sistema fisico, si avrà una evoluzione periodica.

Consideriamo ora la Figura 3.13.

Da quanto detto fino ad ora si comprende perchè l'andamento qualitativo della curva di livello di E sia quello riportato in Figura 3.13. Non essendoci

³¹con ascissa x , altri punto di N_c avranno ascissa diversa

³²Più precisamente la parte della curva di livello considerata in Figura 3.12 forma una traiettoria chiusa non contenente punti di equilibrio.

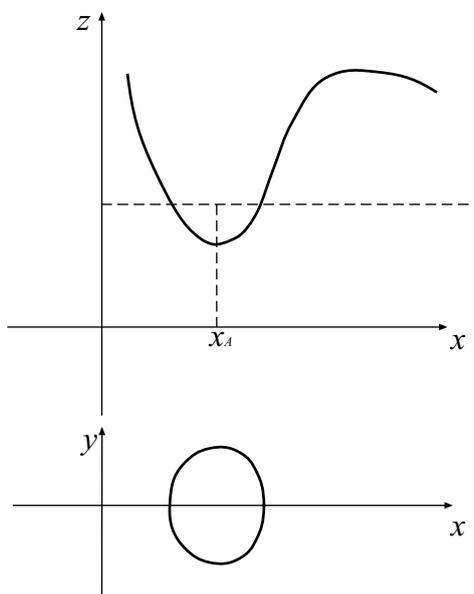


Figura 3.12: Traiettorie chiuse corrispondenti a soluzioni periodiche.

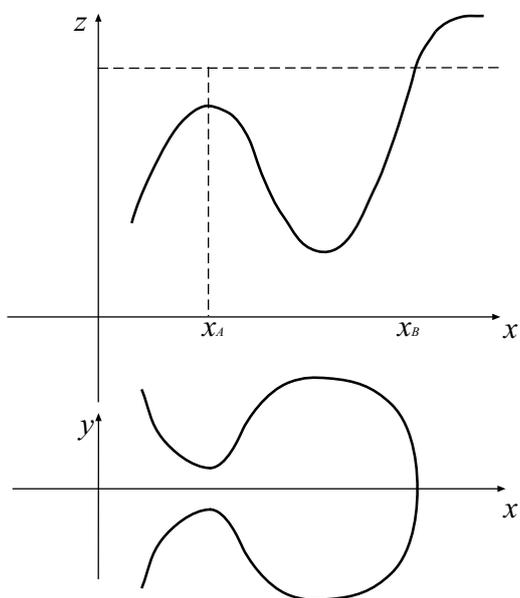


Figura 3.13: Una traiettoria non limitata.

punti di equilibrio appartenenti alla curva di livello stessa (ed essendo questa continua) si avrà una traiettoria illimitata non chiusa³³.

Pertanto vi possono essere i seguenti tipi di traiettorie:

- *punti di equilibrio,*
- *traiettorie chiuse corrispondenti ad evoluzioni periodiche (Figura 3.12),*
- *traiettorie omocline o eterocline,*
- *traiettorie illimitate ai cui estremi non vi sono punti di equilibrio³⁴: vedi Figura 3.13,*
- *traiettorie illimitate ai cui estremi vi è un punto di equilibrio³⁵. Tale tipo si traiettoria è considerata in Figura 3.11 e disegnata tratteggiata (a sinistra).*

Per quanto riguarda le traiettorie illimitate si deve considerare inoltre se esse divergono per $t \rightarrow \infty$ o per $t \rightarrow -\infty$ o per $t \rightarrow \pm\infty$, come accade in Figura 3.13.

Occorre inoltre ricordare esplicitamente che non tutti i punti che formano una curva di livello dell'energia sono, chiaramente, parte di una stessa traiettoria. A tale proposito si veda quanto detto nell'Esempio 3.2.1 sul pendolo.

Ricordiamo che un tratto continuo³⁶ di una curva di livello N_c di E (o più in generale di un integrale primo) non contenente punti di equilibrio appartiene ad una stessa traiettoria.

Dunque se una curva di livello è formata da due “pezzi” differenti, questi devono appartenere a traiettorie differenti.

Come pure i punti di equilibrio dividono le curve di livello di E in traiettorie distinte.

Il Lettore attento avrà sicuramente notato che, in questo esempio, abbiamo ritrovato i risultati noti dalla Fisica che possono essere così riassunti: una massa m che si trova in un pozzo di potenziale³⁷ non può salire oltre

³³Nell'ipotesi implicita che la f si mantenga definitivamente sotto h_{max} per $x < x_a$.

³⁴ossia, più precisamente, che hanno distanza non nulla da ciascun punto di equilibrio.

³⁵esse hanno distanza nulla da tale equilibrio.

³⁶e connesso

³⁷L'energia potenziale $V(x)$ è pari a $mgf(x) = mgz$.

una quota massima, corrispondente all'energia potenziale $V(x) = mgf(x)$ di valore pari al valore dell'energia totale della massa m .

Se così non fosse, infatti, sarebbe violato il principio di conservazione dell'energia.

Dunque ponendo la massa m in un punto³⁸ della curva $f(x)$, essa salirà fintanto che la sua "energia lo permette" per arrivare (a velocità nulla) alla massima quota che le è consentita (dal principio di conservazione dell'energia), oppure, a seconda dell'andamento di f , perderà quota aumentando di velocità.

Se, arrivando alla massima quota possibile, la massa m incontra (a tale quota) un punto di equilibrio, una volta fermatasi, resterà in equilibrio³⁹.

Altrimenti invertirà il suo cammino e tornerà indietro.

Inoltre una massa m , ferma, spostata di un infinitesimo da un punto di equilibrio instabile (in cima ad un monte) tenderà ad allontanarsi da questo, salvo poi eventualmente farvi ritorno (il sistema evolverà lungo una omoclina) a causa dell'andamento di f . Stiamo considerando cioè il caso di una massa che si allontana da una posizione di equilibrio instabile, scende aumentando di velocità, risale un pendio che però è troppo alto, non incontra un nuovo equilibrio nella posizione di massima quota, inverte il suo andamento e ritorna al punto di partenza⁴⁰.

Ritroviamo inoltre il risultato che un punto di flesso è un punto di equilibrio instabile.

Tenendo presente tutto questo è facile ritrovare, interpretare e ricordare tutti i risultati presentati in questo esempio, per cui non ci dilungheremo ulteriormente a discutere il comportamento fisico della massa m .

Osserviamo solo che quanto detto vale in generale per sistemi la cui energia potenziale è una funzione del tipo $V(x)$. Infatti la $f(x)$, altro non è che l'energia potenziale della massa m moltiplicata per una costante reale. \square

Esempio 3.2.5 Intendiamo ora studiare il moto di un punto materiale vincolato a muoversi nel piano verticale su una curva parabolica.

Ci riconduciamo pertanto all'Esempio precedente per $f(x) = cx^2$.

Chiaramente è $\frac{df}{dx} = 2cx$ e $\frac{d^2f}{dx^2} = 2c$ e la equazione di Lagrange diventa:

$$\ddot{x} = \frac{-\dot{x}^2(4c^2x) - 2gcx}{1 + 4c^2x^2}$$

³⁸non di equilibrio

³⁹Si noti che, a rigore, la massa m raggiunge l'equilibrio solo per $t \rightarrow \infty$.

⁴⁰a rigore dopo un tempo infinito

Costruendo il sistema planare equivalente alla precedente equazione differenziale, come visto nell'Esempio 3.2.4, si ottiene che un integrale primo è dato dall'energia:

$$E(x, y) = \frac{1}{2}my^2(1 + 4c^2x^2) + cmgx^2 \quad (3.73)$$

Non è difficile in questo caso lo studio delle curve di livello di E . □

3.2.9 Sistemi planari conservativi

Quanto visto nell'Esempio 3.2.4 è immediatamente estendibile al caso di un sistema planare conservativo in cui l'energia complessiva non varia nel tempo. Basta solo rifare analoghe considerazioni considerando al posto di $mgf(x) = mgz$ una generica funzione di *energia potenziale* $V(x)$, con semplici osservazioni⁴¹. Pertanto non richiameremo nel dettaglio tutti i risultati, essendo questi derivabili in modo veramente semplice a partire dalle considerazioni dell'Esempio 3.2.4.

3.2.10 Considerazioni finali sui sistemi planari e Teorema di Poincaré-Bendixon

È doveroso chiudere il discorso sui sistemi planari (conservativi o anche non conservativi) riportando il teorema di Poincaré-Bendixon

Proposizione 3.2.11 *Sia dato un generico sistema planare. Allora considerata una qualsiasi traiettoria del sistema, relativa al generico punto iniziale ξ , questa o converge verso un punto di equilibrio, o diverge, o tende verso una traiettoria periodica O_P per $t \rightarrow \infty$ (questa ultima affermazione significa che il limite per $t \rightarrow \infty$ della distanza tra $\phi(t, \xi)$ e la traiettoria periodica O_P è zero).*

Si veda [3] a tale proposito. Il teorema riportato esclude il *caos deterministico* nei sistemi planari (autonomi): tale *caos* si può invece presentare in sistemi con dimensione $n \geq 3$. Una traiettoria caotica è una traiettoria limitata, che non converge nè ad un punto di equilibrio e nè ad un ciclo limite (ossia una traiettoria periodica). Pertanto una soluzione che origina una traiettoria caotica assomiglia molto alla estrazione di un processo aleatorio, senza alcuna apparente regolarità e questo giustifica il nome di

⁴¹Per es. se $f(x)$ ha un massimo locale, anche $mgf(x)$ avrà un massimo locale e dunque, nel ragionamento da svolgere, si dovrà considerare il caso in cui $V(x)$ ha un massimo locale, etc...

caos deterministico: inoltre sistemi in cui sono presenti orbite caotiche sono caratterizzati da una grande sensibilità ad una variazione anche piccolissima delle condizioni iniziali, per cui variando anche solo di una quantità infinitesima le condizioni iniziali tipicamente le evoluzioni del sistema saranno molto differenti al crescere del tempo. Questo rende anche la simulazione numerica non adatta ad investigare il caos deterministico. L' ω -limit set (si veda il Capitolo 4) di una traiettoria caotica è tipicamente un insieme frattale.

In questo testo non ci preoccuperemo di sistemi caotici, rimandando ad altri testi, tra cui per es. a [3] o a [7]. Tipici esempi di sistemi caotici sono il sistema di Lorenz; inoltre anche un sistema come l'oscillatore di Colpitts o il doppio pendolo può esibire comportamenti caotici.

3.3 Sistemi integrabili di ordine superiore al secondo

I concetti introdotti in questo capitolo possono in parte essere estesi a sistemi in \mathbb{R}^n , con le opportune distinzioni. A tale proposito si veda ad esempio [5], Sezione 9.3.

Sia dato un sistema meccanico descritto da n coordinate generalizzate $(q_1, \dots, q_n) = q \in \mathbb{R}^n$, ossia ad n gradi di libertà e poniamo $v = \dot{q}$.

Sia $L(v, q)$ la funzione di Lagrange per tale sistema. Supponiamo inoltre che non vi siano forze conservative. Come sappiamo vale la equazione di Eulero Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = 0$$

Il momento è dato da

$$p(v, q) = \frac{\partial L}{\partial v}(v, q)$$

Se vale che⁴²

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} \neq 0 \tag{3.74}$$

allora consideriamo la *trasformazione di Legendre*

$$H(p, q) = pv - L(v, q) \quad \text{con } v = v(p, q) \tag{3.75}$$

ove p è il momento introdotto sopra.

⁴²Si ricordi che q e v sono dei vettori di \mathbb{R}^n . Si veda [5]

Allora il sistema dinamico associato al sistema meccanico in questione può essere scritto nella forma

$$\dot{q} = \frac{\partial H(p, q)}{\partial p} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H(p, q)}{\partial q} \quad (3.76)$$

Si dice allora che H è una funzione di Hamilton e che il sistema in questione è hamiltoniano. Si dimostra che H è costante lungo le traiettorie del sistema e che dunque una traiettoria è contenuta nel luogo dei punti

$$H(p, q) = \text{cost}$$

ove al solito p è il momento di cui si è parlato.

Una (opportuna) funzione costante lungo le traiettorie si dice anche in questo caso *integrale primo*. La funzione di Hamilton H è un integrale primo, ma non vale il viceversa.

Si consideri l'energia quale candidata per un integrale primo.

Se esiste un numero sufficiente di (opportune) funzioni che non variano lungo le traiettorie, allora il sistema considerato è *completamente integrabile* e si possono individuare pertanto le traiettorie di un tale sistema.

Se un sistema è hamiltoniano allora considerata una porzione⁴³ P dello spazio di stato di volume τ , se consideriamo $\phi(t, P)$, per t qualsiasi, otteniamo che tale insieme⁴⁴ è ancora di volume τ . Dunque si dice che un sistema hamiltoniano *conserva* i volumi nello spazio di stato.

Accenniamo infine soltanto all'esistenza di opportune trasformazioni di coordinate che rendono le (3.76) particolarmente semplici. A tale proposito si vedano [9] e [5].

⁴³un sottoinsieme dello spazio di stato $D \subseteq \mathbb{R}^n$

⁴⁴ossia l'immagine di P mediante la $\phi(t, \cdot)$ con t generico ma fissato

Capitolo 4

Teoria della stabilità

4.1 Introduzione

In questo capitolo saranno presentati alcuni risultati classici della Teoria dei Sistemi ed introdotte alcune definizioni importanti. Gli strumenti qui presentati saranno usati in maniera costruttiva nel Capitolo 5 per controllare il Pendubot, un sistema dinamico sottoattuato, come si vedrà nel seguito. Il Lettore consulti [1] e [10] per una trattazione completa.

4.2 Insiemi limite e funzioni di Lyapunov

Nel seguito considereremo sistemi dinamici autonomi $\dot{x} = f(x)$ definiti in $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Chiaramente lo stato sarà descritto da un vettore colonna $x \in \mathbb{R}^n$.

Introduciamo ora una serie di Proposizioni e Definizioni importanti al fine dello studio dei sistemi dinamici non lineari.

Definizione 4.2.1 *Un sottoinsieme M dell'insieme di definizione $D \subseteq \mathbb{R}^n$ di un sistema $\dot{x} = f(x)$ si dice positivamente invariante per il sistema dato, se per ogni $\xi \in M$ la semitraiettoria positiva $O^+(\xi)$ è tutta contenuta in M , ossia se si ha*

$$\xi \in M \quad \Rightarrow \quad \phi(t, \xi) \in M \quad \forall t \in [0, J^+(\xi)) \quad (4.1)$$

L'intervallo $[0, J^+(\xi))$ individua il massimo intervallo di esistenza di $\phi(t, \xi)$, con usuale simbologia. Tipicamente considereremo $J^+(\xi) = +\infty$.

Definizione 4.2.2 *Sia dato il sistema autonomo $\dot{x} = f(x)$ ed un punto ξ del suo insieme di definizione $D \subseteq \mathbb{R}^n$, allora un punto $x^* \in D$ si dice punto*

ω -limite del punto ξ , se esiste una successione $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a valori in $[0, \infty[$ e che tende a $+\infty$, per cui

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(t_k, \xi) \quad (4.2)$$

L'insieme di tutti i punti ω -limite per ξ si indica con $\omega(\xi)$ e si chiama insieme ω -limite del punto ξ

Si osservi che $\omega(\xi)$ è un sottoinsieme dello spazio di stato D .

Proposizione 4.2.1 *Sia dato il sistema $\dot{x} = f(x)$ ed un punto $\xi \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ con la proprietà che la soluzione $\phi(t, \xi)$ esiste per tutti i valori $t \geq 0$ e con la traiettoria $O^+(\xi) \subset D$. Si ha allora che*

- se la soluzione $\phi(t, \xi)$ è costante allora $\omega(\xi) = \{\xi\}$
- se $\phi(t, \xi)$ è periodica, allora $\omega(\xi) = O(\xi)$
- in ogni caso si ha che

$$\omega(\xi) = \bigcap_{\tau \in [0, \infty)} \overline{O^+(\phi(\tau, \xi))} \quad (4.3)$$

Si ricordi dall'Analisi che \bar{X} è l'insieme di tutti i punti aderenti all'insieme X .

Proposizione 4.2.2 *Sia dato il sistema $\dot{x} = f(x)$ ed un punto $\xi \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ con la proprietà che la semitraiettoria positiva $O^+(\xi)$ è limitata e contenuta in D . Allora l'insieme $\omega(\xi)$ è non vuoto e vale*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi(t, \xi), \omega(\xi)) = 0 \quad (4.4)$$

Definizione 4.2.3 *Una funzione continua e differenziabile $V : D \rightarrow \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^N$ si chiama funzione di Lyapunov per il sistema $\dot{x} = f(x)$, con $x \in \mathbb{R}^N$, se la funzione*

$$\dot{V}(x) := \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) f_i(x) \quad (4.5)$$

soddisfa alla seguente disequazione

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in D \quad (4.6)$$

Proposizione 4.2.3 *Sia V una funzione di Lyapunov per il sistema $\dot{x} = f(x)$ ($x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$) e sia $\mu(t)$ una soluzione del sistema considerato. Vale allora*

$$\frac{d}{dt}V(\mu(t)) = \text{grad } V(\mu(t)) \cdot \dot{\mu}(t) = \text{grad } V(\mu(t)) \cdot f(\mu(t)) = \dot{V}(\mu(t)) \quad (4.7)$$

con \dot{V} definito nella Definizione 4.2.3.

Poichè deve essere $\dot{V} \leq 0$ la precedente proposizione implica che V non può crescere lungo le traiettorie di un sistema dinamico, come si vede immediatamente. Si tenga sempre presente tale risultato.

Proposizione 4.2.4 *Sia dato un sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ con $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ che ammette una funzione di Lyapunov V . Essendo $\dot{V} \leq 0$ si ha che, se $\mu(t)$ è una generica soluzione del sistema considerato, allora $V(\mu(t))$ non può essere crescente (per t crescente). Pertanto una funzione di Lyapunov non cresce¹ se valutata lungo le traiettorie di un sistema dinamico.*

La Dimostrazione della Precedente proposizione è immediata alla luce dei risultati presentati.

Proposizione 4.2.5 *Sia V una funzione di Lyapunov per il sistema $\dot{x} = f(x)$, allora ciascuno degli insiemi*

$$N_c^+ := \{x \in D : V(x) \leq c\}, \quad c \in \mathbb{R} \quad (4.8)$$

al variare di c è positivamente invariante relativamente al sistema considerato.

Se N_c^+ è composto dall'unione di più parti non connesse (tra loro) ciascuna di queste parti forma un insieme positivamente invariante.

Si consideri la Figura 4.1: consideriamo per semplicità un sistema planare che ammette una funzione di Lyapunov semidefinita positiva e radialmente illimitata. Dovendo la funzione di Lyapunov essere non crescente lungo le traiettorie, queste dovranno ovviamente evolvere in modo tale da non far crescere la funzione di Lyapunov. Dunque dovranno evolvere in modo tale che il punto $(\phi_x, \phi_y, V(\phi))$ “cada” all’interno del cono disegnato in Figura, con chiaro significato di simboli. Tale punto non potrà assolutamente “risalire” le pareti del cono considerato ed al più la quota V si mantiene costante nel tempo.

Tali risultati sono facilmente comprensibili alla luce di quanto affermato nella presente sezione.

¹decesce strettamente o non strettamente o rimane costante

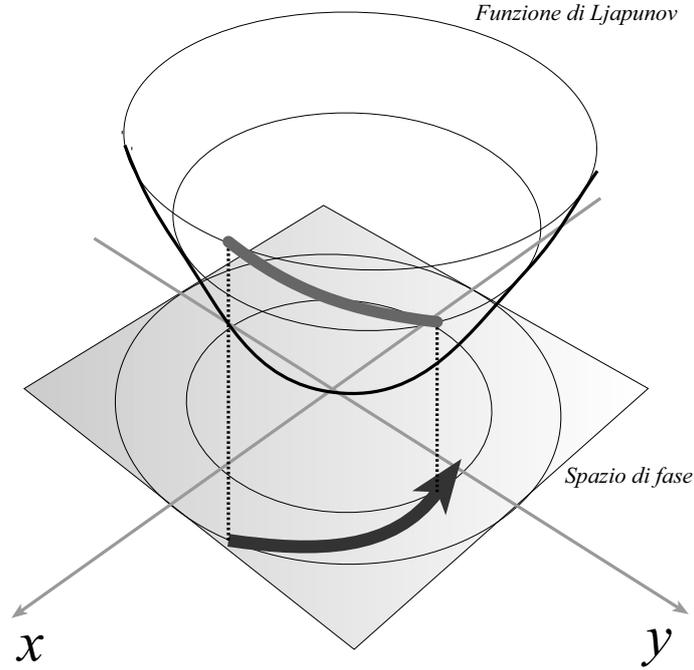


Figura 4.1: Una (particolare) funzione di Lyapunov valutata lungo una traiettoria di un (particolare) sistema.

Proposizione 4.2.6 *Sia dato il sistema $\dot{x} = f(x)$ con la funzione di Lyapunov V . Allora per ogni $\xi \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ l'insieme ω -limite $\omega(\xi)$ è contenuto nel luogo dei punti in cui $\dot{V}(x)$ si annulla, ossia*

$$\omega(\xi) \subseteq \{x \in D : \dot{V}(x) = 0\} \quad \forall \xi \in D \quad (4.9)$$

Proposizione 4.2.7 *Per ogni punto ξ del dominio D (con $D \subseteq \mathbb{R}^n$) di un sistema $\dot{x} = f(x)$, l'insieme di punti $\omega(\xi)$ (relativi al sistema considerato) forma (se è non vuoto) un insieme positivamente invariante. Cioè se risulta $\chi \in \omega(\xi)$ allora $O^+(\chi) \subseteq \omega(\xi)$, con chiaro significato di simboli.*

In conclusione riportiamo il principio di LaSalle:

Proposizione 4.2.8 *Sia dato un sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$ definito in \mathbb{R}^n ed avente una funzione di Lyapunov V . Sia inoltre $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c\}$ un insieme limitato, per qualche $c \in \mathbb{R}_+$. Definito l'insieme*

$$S = \{x \in \Omega_c : \dot{V}(x) = 0\} \quad (4.10)$$

abbiamo che una qualsiasi traiettoria $O^+(\xi)$ con $\xi \in \Omega_c$ tende al massimo insieme (positivamente) invariante tutto contenuto in S , che indicheremo con M . Inoltre $\omega(\xi)$ è contenuto nel massimo insieme invariante M tutto contenuto in S .

La precedente proposizione risulta intuitiva in base alle proposizioni precedenti. Chiaramente ogni traiettoria $O^+(\xi_m)$ con $\xi_m \in M$ resterà² in M (e dunque in S).

Se un punto ξ_m appartiene ad $M \subseteq S$ la traiettoria $O(\xi_m)$ non potrà dunque abbandonare S ed inoltre, poicè M è il massimo insieme invariante tutto contenuto in S non potrà esistere un punto $\zeta \in S$ e $\zeta \notin M$ e tale che $O^+(\zeta)$ sia tutto contenuto in S , in quanto necessariamente dovrà essere $O^+(\zeta) \subseteq M$.

Più semplicemente si pensi ad M come all'unione di tutti i possibili insiemi invarianti sottoinsiemi di S .

Esiste anche una versione globale del principio di LaSalle:

Proposizione 4.2.9 *Sia dato un sistema $\dot{x} = f(x)$ definito in \mathbb{R}^n e con una funzione di Lyapunov V . Se V è radialmente illimitata, allora ogni traiettoria del sistema $O^+(\xi)$ con $\xi \in \mathbb{R}^n$ tende all'insieme M , il massimo insieme (positivamente³) invariante tutto contenuto in S , con $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$. Inoltre $\omega(\xi)$ è contenuto nel massimo insieme invariante M tutto contenuto in S .*

Valgono inoltre osservazioni analoghe a quelle relative alla Proposizione 4.2.8.

Proposizione 4.2.10 *Se una semitraiettoria positiva $O^+(\xi)$ è limitata e se si ha $\overline{O^+(\xi)} \subset D$, allora l'insieme ω -limite $\omega(\xi)$ è contenuto nel massimo insieme invariante M contenuto in $\{x \in D : \dot{V}(x) = 0\}$ ed inoltre si ha*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi(t, \xi), M) = 0 \quad (4.11)$$

Definizione 4.2.4 *Sia dato un sistema dinamico $\dot{x} = f(x)$, $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia A un insieme invariante (anche solo positivamente) per tale sistema. Si ponga inoltre*

$$U_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, A) < \epsilon\} \quad (4.12)$$

Si dice allora che l'insieme A è

²per ogni $t \geq 0$, ovviamente

³nel seguito potremo omettere tale aggettivo.

- stabile, se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.c.

$$\xi \in U_\delta \Rightarrow \phi(t, \xi) \in U_\epsilon \quad \forall t \geq 0 \quad (4.13)$$

- stabile asintoticamente, se A è stabile e se inoltre δ può essere scelto in modo t.c.

$$\xi \in U_\delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi(t, \xi), A) = 0 \quad (4.14)$$

- instabile, se non è stabile.

Proposizione 4.2.11 Sia dato il sistema $\dot{x} = f(x)$, $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ con funzione di Lyapunov V e sia V semidefinita positiva⁴ in D . Sia inoltre $\dot{V} \leq 0$ in D . Poniamo

$$V_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = 0\} \quad (4.15)$$

Allora V_0 è un insieme (positivamente) invariante e stabile, nel senso precisato nella Proposizione 4.2.4.

Dimostrazione: l'invarianza di V_0 segue dalla Proposizione 4.2.5 considerando che $V_0 = N_0^+$.

E $\forall \epsilon > 0$ sia $r \in]0, \epsilon[$ t.c. risulti:

$$P_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, V_0) \leq r\} \subset D \quad (4.16)$$

Un tale r certamente esiste, essendo D aperto e $V_0 \in D$.

Sia

$$\alpha = \min_{x \in \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(\bar{x}, V_0) = r\}} V(x) \quad (4.17)$$

Allora $\alpha > 0$: infatti poiché $r > 0$ si vede facilmente che $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, V_0) = r\}$ non contiene punti di V_0 ed allora, essendo V semidefinita positiva, segue facilmente che $\alpha > 0$.

Consideriamo allora $\beta \in]0, \alpha[$ e sia

$$\Omega_\beta = \{x \in P_r : V(x) \leq \beta\} \quad (4.18)$$

allora $\Omega_\beta \subset P_r$. Se così non fosse, infatti, per assurdo, dovendo comunque essere $\Omega_\beta \subseteq P_r$ in virtù della definizione di Ω_β , esisterebbe un punto $p \in \Omega_\beta$ e t.c. $p \in \partial P_r$. Per tale punto p si avrebbe che $V(p) \geq \alpha > \beta$ come segue facilmente dalla definizione di α e dal fatto che

$$\partial P_r \subseteq \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(\bar{x}, V_0) = r\}$$

⁴e non identicamente nulla.

come si vede facilmente. Ma d'altra parte $\forall x \in \Omega_\beta, V(x) \leq \beta$ e dunque $V(p) \leq \beta$ e ciò porta ad un assurdo.

Pertanto $\Omega_\beta \subset P_r$.

Ogni traiettoria che parte in Ω_β rimane $\forall t \geq 0$ in Ω_β : per cui Ω_β è positivamente invariante.

Infatti se $\xi \in \Omega_\beta$, avendosi $\dot{V}(\phi(t, \xi)) \leq 0$ si ha che

$$V(\phi(t, \xi)) \leq V(\phi(0, \xi)) = V(\xi) \leq \beta \quad \forall t \geq 0$$

Si è tenuto conto del fatto che $\xi \in \Omega_\beta$ da cui $V(\xi) \leq \beta$. Si noti peraltro che $\phi(t, \xi)$ non può abbandonare P_r . Infatti se così non fosse allora l'intersezione di $\phi(t, \xi)$ con ∂P_r sarebbe non vuota e dunque $\exists \tilde{t} : \phi(\tilde{t}, \xi) \in \partial P_r$ e dunque, come si vede facilmente, $V(\phi(\tilde{t}, \xi)) \geq \alpha > \beta$ il che è assurdo.

Da quanto detto segue che $\phi(t, \xi) \in \Omega_\beta \forall t \geq 0$.

Poichè V è continua e in V_0 si annulla, allora $\exists \delta > 0$ (e $\delta < r$) t.c.

$$\text{dist}(x, V_0) \leq \delta \Rightarrow V(x) < \beta$$

Da ciò

$$P_\delta \subset \Omega_\beta \subset P_r$$

Si osservi per inciso che è sempre possibile scegliere β in modo t.c. $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) = \beta$ sia non vuoto, escludendo il caso in cui V sia identicamente nulla, caso escluso per ipotesi.

Inoltre

$$\xi \in P_\delta \Rightarrow \xi \in \Omega_\beta \Rightarrow \phi(t, \xi) \in \Omega_\beta \Rightarrow \phi(t, \xi) \in P_r \quad \forall t \geq 0$$

avendo tenuto conto della definizione di Ω_β .

E questo vuol dire che per un generico $\xi \in \mathbb{R}^n$ se

$$\text{dist}(\xi, V_0) < \delta \Rightarrow \text{dist}(\phi(t, \xi), V_0) \leq r < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

Da tutto questo e dall'arbitrarietà di ϵ segue facilmente la (semplice) stabilità di V_0 . \square

Definizione 4.2.5 *La regione di attrazione R_A di uno stato di equilibrio x_E (o di un insieme A) è l'insieme di tutti i punti ξ t.c. $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, \xi) = x_E$ ($\lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(\phi(t, \xi), A) = 0$).*

Proposizione 4.2.12 *Se A è un insieme invariante (positivamente) asintoticamente stabile per il sistema $\dot{x} = f(x)$ con $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, allora la regione di attrazione R_A di A è un insieme aperto e invariante positivamente. La frontiera di R_A è formata da traiettorie ed è positivamente invariante.*

Dimostrazione: cominciamo con il dimostrare che R_A è invariante positivamente. Ossia che

$$\xi \in R_A \Rightarrow \phi(s, \xi) \in R_A \quad \forall s \geq 0$$

Per le proprietà del flusso si ha che

$$\phi(t, \phi(s, \xi)) = \phi(t + s, \xi)$$

e dunque

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi(t, \phi(s, \xi)), A) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi(t + s, \xi), A) = 0 \quad \forall s \geq 0$$

poicè $\xi \in R_A$. Dunque $\forall s \geq 0$ anche $\phi(s, \xi) \in R_A$ e quindi R_A è positivamente invariante.

Mostriamo ora che R_A è un insieme aperto. Pertanto per un generico punto $p \in R_A$ deve esistere un intorno di p contenuto in R_A .

Ora

$$p \in R_A \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi(t, p), A) = 0$$

e pertanto $\exists T > 0$ t.c.

$$\text{dist}(\phi(T, p), A) < \frac{a}{2}$$

ove $a > 0$ è t.c.

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, A) < a\} \subset R_A \quad (4.19)$$

Si osservi che un tale $a > 0$ esiste certamente in quanto, essendo A asintoticamente stabile esiste in virtù della Definizione 4.2.4 un $\delta > 0$ t.c.

$$\xi \in \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, A) < \delta\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi(t, \xi), A) = 0$$

e dunque $\{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, A) < \delta\} \subset R_A$ come si vede facilmente.

Ed allora basta porre $a = \delta$ per ottenere quanto volevasi mostrare. Consideriamo ora l'intorno di p dato da $B_{p_b} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - p| < b\}$.

In virtù della dipendenza continua della soluzione dallo stato iniziale, possiamo scegliere $b > 0$ sufficientemente piccolo da assicurare che $\forall q \in B_{p_b}$ si abbia

$$|\phi(T, p) - \phi(T, q)| < \frac{a}{2}$$

Sia $\alpha \in A$ e q un generico punto di B_{p_b} , allora

$$|\phi(T, q) - \alpha| - |\phi(T, p) - \alpha| \leq |\phi(T, q) - \alpha - \phi(T, p) + \alpha|$$

ossia

$$|\phi(T, q) - \alpha| \leq |\phi(T, q) - \phi(T, p)| + |\phi(T, p) - \alpha|$$

Si è tenuto conto del fatto che $|a - b| \geq |a| - |b|$ con $a, b \in \mathbb{R}^n$. Si ricordi che

$$\text{dist}(x, A) = \inf_{\alpha \in A} |x - \alpha|$$

Per quanto scritto in precedenza otteniamo allora che

$$\begin{aligned} \inf_{\alpha \in A} |\phi(T, q) - \alpha| &\leq \inf_{\alpha \in A} [|\phi(T, q) - \phi(T, p)| + |\phi(T, p) - \alpha|] = \\ &= |\phi(T, q) - \phi(T, p)| + \inf_{\alpha \in A} |\phi(T, p) - \alpha| \end{aligned}$$

ossia

$$\text{dist}(\phi(T, q), A) \leq |\phi(T, q) - \phi(T, p)| + \text{dist}(\phi(T, p), A)$$

e ricordando quanto scritto si ottiene che

$$|\phi(T, q) - \phi(T, p)| + \text{dist}(\phi(T, p), A) < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$$

da cui si ottiene infine che

$$\text{dist}(\phi(T, q), A) < a$$

che vale per un generico $p \in R_A$ ed un generico $q \in B_{p_b}$ con $b > 0$ a suo tempo individuato. Da tutto questo segue che $\phi(T, q) \in S \subset R_A$ e dunque

$$\phi(T, q) \in R_A \quad \forall q \in B_{p_b}$$

Per cui $\phi(t, q)$ tende sicuramente verso A per $t \rightarrow \infty$ (in quanto tale traiettoria entra sicuramente in R_A per $t \geq T$ e ricordando che R_A è positivamente invariante).

Ma allora, come è facile mostrare, si ha $q \in R_A$ e questo implica che R_A è un insieme aperto, come volevasi dimostrare.

Resta ancora da dimostrare che la frontiera di R_A , ∂R_A è formata da traiettorie e che tale frontiera è invariante positivamente.

Dall'Analisi Matematica e dalla Topologia sappiamo che esiste una sequenza $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in R_A$ che converge al generico punto x della frontiera di R_A , supposta non vuota. In simboli scriviamo $x \in \partial R_A$.

Poichè R_A è invariante (almeno positivamente) $\phi(t, x_n) \in R_A \forall t \geq 0$ e $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ma $\phi(t, x_N)$ converge a $\phi(t, x)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ in quanto x_n converge ad x e per la dipendenza continua delle soluzioni⁵ dal punto iniziale. Quindi $\phi(t, x)$ è punto di accumulazione di R_A , con $t \in \mathbb{R}$ generico.

D'altra parte $\phi(t, x) \notin R_A$. Infatti $x \in \partial R_A$ e dunque non appartiene ad R_A , essendo come visto R_A un insieme aperto. Pertanto $x \notin R_A$.

Questo implica che anche $\phi(t, x) \notin R_A$: infatti se per assurdo $\phi(t, x) \in R_A$, allora:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi(s, \phi(t, x)), A) = 0$$

e poiché $\phi(s, \phi(t, x)) = \phi(t + s, x)$ si avrebbe che

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi(t + s, x), A) = 0$$

e questo implica che $x \in R_A$ il che è assurdo, per quanto visto.

Da tutto questo si conclude che $\phi(t, x) \notin R_A$ per $t \geq 0$ generico e per $x \in \partial R_A$ generico.

Ma essendo come visto $\phi(t, x)$ punto di accumulazione di R_A tutto questo implica che

$$\phi(t, x) \in \partial R_A \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in \partial R_A$$

ossia la soluzione $\phi(t, x)$ appartiene alla frontiera di R_A per ogni $t \geq 0$ se $x \in \partial R_A$ e pertanto ∂R_A forma un insieme (positivamente) invariante ed è formato da (semi-)traiettorie. Da ciò la tesi. \square

⁵in tempi finiti

Capitolo 5

Controllo di sistemi dinamici sottoattuati

5.1 Introduzione

Si consideri la seguente

Definizione 5.1.1 *Quando un sistema a n gradi di libertà, ossia un sistema il cui stato è dato da n variabili $(q_1, \dots, q_n) = q \in \mathbb{R}^n$ e dalle loro derivate \dot{q} , viene controllato con un numero di ingressi di controllo inferiore ad n , allora si dice che il sistema in questione è sottoattuato.*

Il fatto che il numero degli ingressi di controllo sia minore del grado di libertà del sistema rende il sistema difficilmente controllabile. E questo perchè una parte del sistema tende ad evolvere liberamente, non essendo sottoposta direttamente alla azione di un opportuno ingresso di controllo.

Nel seguito considereremo alcuni sistemi sottoattuati che sono degli esempi classici nella Letteratura dei Controlli Automatici. Essi sono tutti sistemi a due gradi di libertà e con un solo attuatore. Tutto sommato tali sistemi non hanno alcuna utilità pratica diretta, ma sono una ottima palestra per esercitarsi ad usare gli strumenti della Teoria dei Sistemi e per imparare a controllare sistemi dinamici (sottoattuati) in genere.

In Figura 5.1 è riportato il *cart pendulum* che consiste in un pendolo invertito montato su un carrello mobile.

In Figura 5.2 è schematizzato l'Acrobot, che consiste in un doppio pendolo ove tra il primo ed il secondo braccio vi è un attuatore.

In Figura 5.3 è schematizzato il pendolo di Furuta, in cui un pendolo semplice è collegato ad un braccio rotante azionato da un attuatore.

In Figura 5.4 è schematizzato il sistema “butterfly”, in cui una pallina è libera di muoversi su un supporto che è collegato ad un motore elettrico (attuatore).

Invece in Figura 5.5 è visualizzato in dettaglio il sistema del Pendubot che studieremo ampiamente nella seguente sezione. Esso consiste in un doppio pendolo di cui il primo braccio è attuato, mentre il secondo è libero di muoversi. Svilupperemo un controllore pressoché globale con retroazione dallo stato al fine di realizzare lo *swing up* del Pendubot. Per *swing up* si intende portare il Pendubot nella posizione data da tutti e due i bracci orientati verso l’alto e fermi. Nella seguente sezione affronteremo tali problematiche in dettaglio: la strategia di controllo proposta può essere adattata, con opportune modifiche e considerazioni, anche agli altri sistemi sottoattuati presentati, anche se non in modo del tutto analogo ed acritico¹.

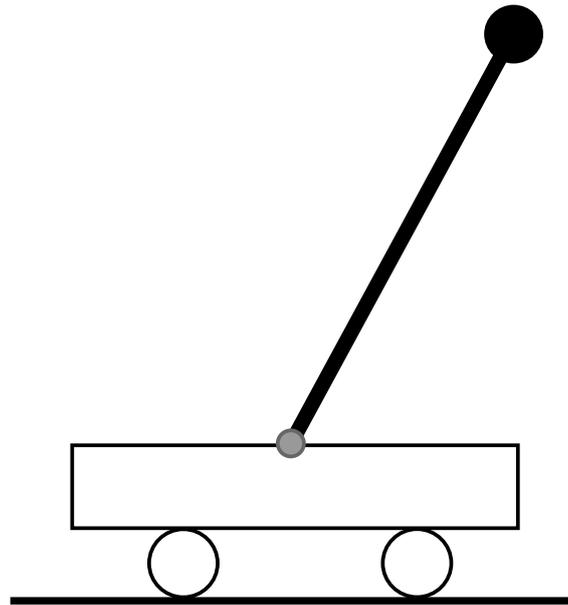


Figura 5.1: Il cart pendulum

¹occorre considerare la situazione caso per caso, come sempre nello studiare un sistema dinamico non lineare.

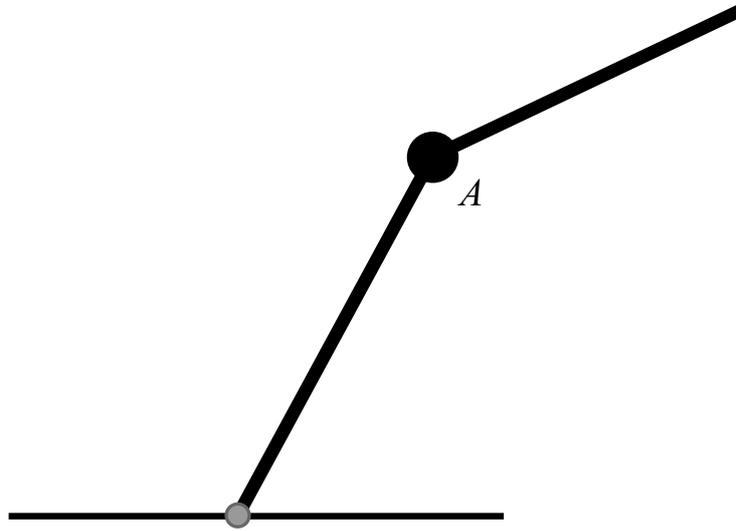


Figura 5.2: L'Acrobot

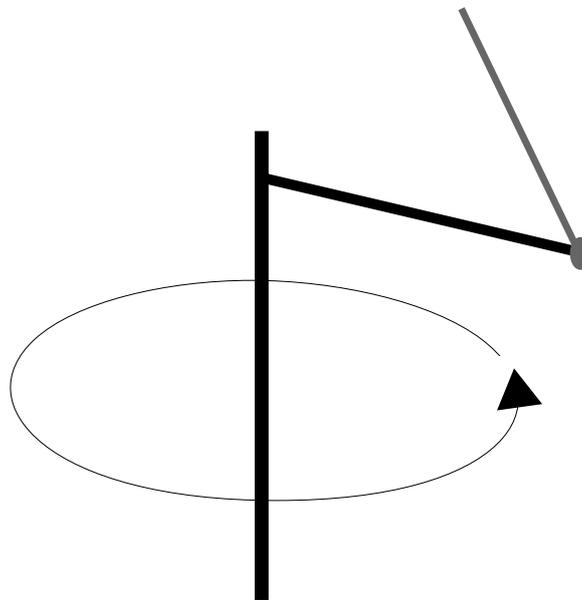


Figura 5.3: Il *Furuta pendulum*

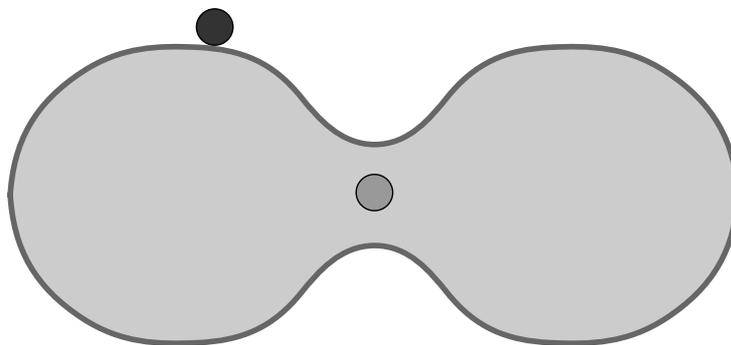


Figura 5.4: Il sistema *butterfly*

5.2 Esempio del Pendubot

Consideriamo un doppio pendolo di cui un braccio è azionato da un attuatore (per esempio un motore elettrico), mentre l'altro è libero di muoversi². Il sistema in questione viene chiamato nella Letteratura "Pendubot".

Facciamo riferimento alla Figura 5.5 per meglio comprendere il discorso.

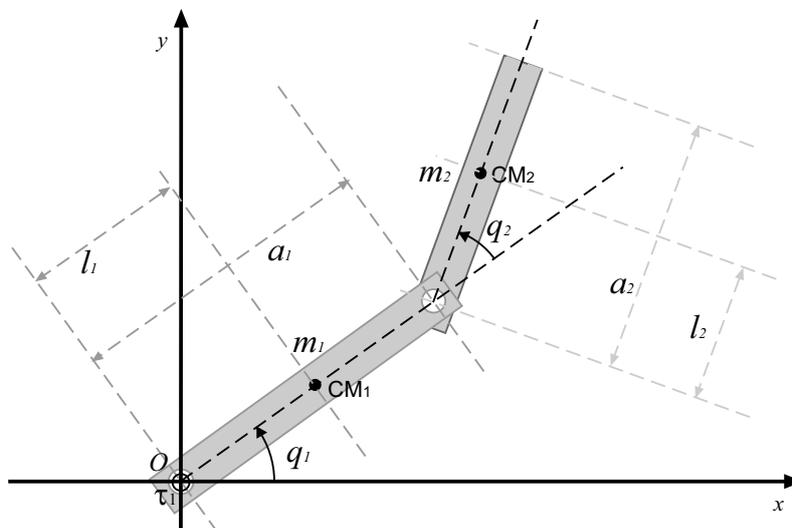


Figura 5.5: Il sistema "Pendubot".

Come si vede dalla Figura 5.5, i due bracci hanno massa m_1 ed m_2 ,

²un tale sistema si dice pertanto sottoattuato.

lunghezza data da a_1 ed a_2 rispettivamente, mentre il centro di massa CM_1 del primo braccio si trova a distanza l_1 dall'origine delle coordinate ed il centro di massa CM_2 del secondo braccio si trova a distanza l_2 dal punto in cui questo è imperniato. Si osservi la Figura per una idea più precisa.

Sia q_1 l'angolo formato dal primo braccio (quello attuato) con l'asse delle ascisse e q_2 l'angolo che il secondo braccio (quello non attuato) forma con il primo³.

La coppia di forze che agisce sul primo braccio sia τ_1 . Invece, come già detto, il secondo braccio non è attuato.

Per descrivere il sistema ci serviremo delle coordinate generalizzate q_1 e q_2 che, con le loro derivate temporali, identificano lo stato del sistema.

Ricordando la (3.58) di pagina 59 si intuisce⁴ che per il Pendubot valgono le seguenti equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = \tau_1 \quad (5.1)$$

e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \quad (5.2)$$

mediante le quali è possibile risalire alla descrizione matematica del sistema Pendubot.

$$L = T - V$$

con T energia cinetica del sistema e V energia potenziale⁵.

Cominciamo dunque con il calcolare T e V in funzione di q_1 , q_2 , \dot{q}_1 e \dot{q}_2 .

L'energia cinetica T è la somma delle energie cinetiche T_1 e T_2 dei due bracci. Facendo uso del teorema di König possiamo inoltre affermare che l'energia cinetica T_1 e T_2 di ciascun braccio è data dalla somma dell'energia cinetica del CM del braccio considerato e dell'energia cinetica del braccio stesso rispetto al riferimento del suo centro di massa (tale ultima energia la indicheremo con E'_{k_1} ed E'_{k_2} rispettivamente per il braccio 1 e 2.).

Pertanto avremo, con chiaro significato di simboli:

$$T_1 = E_{k,CM_1} + E'_{k_1}$$

³o, più precisamente, con il prolungamento dell'asse del primo braccio, come visibile in Figura 5.5. Si veda sempre tale Figura per una idea precisa.

⁴omettiamo una dimostrazione rigorosa per la quale si rimanda a testi di Meccanica Razionale. Per il significato dei simboli si veda anche pagina 59 e seguenti.

⁵Non si confonda l'energia potenziale V con la funzione di Lyapunov definita nel seguito e sempre indicata con la lettera V . Il contesto servirà a chiarire il significato della lettera V e ad evitare equivoci.

e

$$T_2 = E_{k,CM_2} + E'_{k_2}$$

Si vede facilmente che

$$v_{CM_1} = \dot{q}_1 l_1$$

dunque

$$E_{k,CM_1} = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{q}_1^2$$

Dalla Fisica è noto che

$$E'_{k_1} = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 J_1$$

ove J_1 è il momento di inerzia del braccio 1 (quello attuato) rispetto ad un asse passante per il CM di tale braccio. Anche il calcolo di E'_{k_2} è semplice, essendo

$$E'_{k_2} = \frac{1}{2} J_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$$

con J_2 momento di inerzia del secondo braccio rispetto ad un asse passante per il CM di tale braccio. Per quanto riguarda l'energia cinetica del centro di massa CM_2 si osservi che la posizione del punto CM_2 è data da:

$$\vec{r}_{CM_2} = [a_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2)] \vec{x}_0 + [a_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2)] \vec{y}_0 \quad (5.3)$$

Derivando:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{CM_2} = & [-a_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 - l_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)] \vec{x}_0 + \\ & + [a_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)] \vec{y}_0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

di cui il modulo quadro vale

$$\begin{aligned} v_{CM_2}^2 = & a_1^2 \sin^2(q_1) \dot{q}_1^2 + l_2^2 \sin^2(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \\ & + 2a_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 l_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \\ & + a_1^2 \cos^2(q_1) \dot{q}_1^2 + l_2^2 \cos^2(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \\ & + 2a_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) = \\ = & a_1^2 \dot{q}_1^2 + l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2a_1 \sin(q_1) \dot{q}_1 l_2 \sin(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \\ & + 2a_1 \cos(q_1) \dot{q}_1 l_2 \cos(q_1 + q_2) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Dalla precedente espressione si ricava

$$E_{k,CM_2} = \frac{1}{2} m v_{CM_2}^2$$

L'energia potenziale del sistema è data da

$$V = m_1 g l_1 \sin(q_1) + m_2 g [a_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2)] \quad (5.6)$$

Invece per quanto riguarda l'energia cinetica T abbiamo:

$$\begin{aligned}
 T = E_{k,CM_1} + E'_{k_1} + E_{k,CM_2} + E'_{K_2} &= \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{q}_1^2 + \\
 &+ \frac{1}{2}J_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2}m_2[a_1^2\dot{q}_1^2 + \\
 &+ l_2^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2a_1 \sin(q_1)\dot{q}_1 l_2 \sin(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \\
 &+ 2a_1 \cos(q_1)\dot{q}_1 l_2 \cos(q_1 + q_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)]
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Raccogliendo a fattor comune il termine $2a_1\dot{q}_1 l_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$ e sfruttando l'identità

$$\sin(q_1) \sin(q_1 + q_2) + \cos(q_1) \cos(q_1 + q_2) = \cos(q_2)$$

l'espressione di T può essere semplificata e si ottiene:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}J_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \\
 &+ \frac{1}{2}m_2[a_1^2\dot{q}_1^2 + l_2^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2a_1\dot{q}_1 l_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2)]
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Pertanto la funzione di Lagrange $L = T - V$ per il Pendubot vale:

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}J_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}J_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \\
 &+ \frac{1}{2}m_2[a_1^2\dot{q}_1^2 + l_2^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2a_1\dot{q}_1 l_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2)] - \\
 &- m_1gl_1 \sin(q_1) - m_2g[a_1 \sin(q_1) + l_2 \sin(q_1 + q_2)]
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Pertanto:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -m_1gl_1 \cos(q_1) - m_2ga_1 \cos(q_1) - m_2gl_2 \cos(q_1 + q_2) \tag{5.10}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -\frac{1}{2}m_22a_1\dot{q}_1 l_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_2) - m_2gl_2 \cos(q_1 + q_2) \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= m_1l_1^2\dot{q}_1 + J_1\dot{q}_1 + J_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_2a_1^2\dot{q}_1 + m_2l_2^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \\
 &+ \frac{1}{2}m_2\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}[2a_1\dot{q}_1 l_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos(q_2)] = \\
 &= m_1l_1^2\dot{q}_1 + J_1\dot{q}_1 + m_2a_1^2\dot{q}_1 + m_2l_2^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + \\
 &+ m_2[a_1 l_2 \cos(q_2)2\dot{q}_1 + a_1 l_2 \cos(q_2)\dot{q}_2]
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = J_2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_2l_2^2(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_2a_1\dot{q}_1 l_2 \cos(q_2) \tag{5.13}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = m_1 l_1^2 \ddot{q}_1 J_1 \dot{q}_1 + J_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 a_1^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_2^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) +$$

$$+ m_2 [2a_1 l_2 (-\sin(q_2) \dot{q}_2 \dot{q}_1 + \cos(q_2) \ddot{q}_1) + a_1 l_2 (-\sin(q_2) \dot{q}_2^2 + \cos(q_2) \ddot{q}_2)] \quad (5.14)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = J_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 l_2^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 a_1 l_2 [\dot{q}_1 \cos(q_2) - \dot{q}_1 \sin(q_2) \dot{q}_2]$$

$$(5.15)$$

A questo punto abbiamo esplicitato tutti i termini necessari per formulare le equazioni di Lagrange per il Pendubot. In particolare dalla (5.1) si ottiene che

$$m_1 l_1^2 \ddot{q}_1 + J_1 \ddot{q}_1 + J_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 a_1^2 \ddot{q}_1 + m_2 l_2^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) +$$

$$+ 2m_2 a_1 l_2 (-\sin(q_2) \dot{q}_2 \dot{q}_1 + \cos(q_2) \ddot{q}_1) + m_2 a_1 l_2 (-\sin(q_2) \dot{q}_2^2 +$$

$$+ \cos(q_2) \ddot{q}_2) + m_1 g l_1 \cos(q_1) + m_2 g a_1 \cos(q_1) +$$

$$+ m_2 g l_2 \cos(q_1 + q_2) = \tau_1 \quad (5.16)$$

che forma dunque la prima equazione di Lagrange per il Pendubot. Riarrangiando tale espressione si ottiene

$$\ddot{q}_1 (m_1 l_1^2 + J_1 + m_2 a_1^2 + J_2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 a_1 l_2 \cos(q_2)) +$$

$$+ \ddot{q}_2 (J_2 + m_2 l_2^2 + m_2 a_1 l_2 \cos(q_2)) - \dot{q}_1 m_2 a_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 -$$

$$- \dot{q}_1 m_2 a_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 - \dot{q}_2 m_2 a_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 +$$

$$+ m_1 g l_1 \cos(q_1) + m_2 g a_1 \cos(q_1) + m_2 g l_2 \cos(q_1 + q_2) = \tau_1 \quad (5.17)$$

Nel seguito porremo:

$$\begin{cases} \theta_1 = m_1 l_1^2 + m_2 a_1^2 + J_1 \\ \theta_2 = m_2 l_2^2 + J_2 \\ \theta_3 = m_2 a_1 l_2 \\ \theta_4 = m_1 l_1 + m_2 a_1 \\ \theta_5 = m_2 l_2 \end{cases} \quad (5.18)$$

Con tali posizioni la prima equazione di Lagrange precedentemente scritta diventa:

$$\ddot{q}_1 (\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(q_2)) + \ddot{q}_2 (\theta_2 + \theta_3 \cos(q_2)) +$$

$$+ \dot{q}_1 (-\theta_3 \sin(q_2) \dot{q}_2) + \dot{q}_2 \theta_3 \sin(q_2) (-\dot{q}_1 - \dot{q}_2) +$$

$$+ \theta_4 g \cos(q_1) + \theta_5 g \cos(q_1 + q_2) = \tau_1 \quad (5.19)$$

Invece per quanto riguarda la seconda equazione di Lagrange per il Pendubot (5.2), otteniamo che:

$$J_2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 l_2^2 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) + m_2 a_1 l_2 (\dot{q}_1 \cos(q_2) - \dot{q}_1 \sin(q_2) \dot{q}_2) +$$

$$+ m_2 a_1 \dot{q}_1 l_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \sin(q_2) + m_2 g l_2 \cos(q_1 + q_2) = 0 \quad (5.20)$$

riarrangiando:

$$\ddot{q}_1(J_2 + m_2l_2^2 + m_2a_1l_2 \cos(q_2)) + \ddot{q}_2(J_2 + m_2l_2^2) + \dot{q}_1m_2a_1\dot{q}_1l_2 \sin(q_2) + m_2gl_2 \cos(q_1 + q_2) = 0 \quad (5.21)$$

ossia:

$$\ddot{q}_1(\theta_2 + \theta_3 \cos(q_2)) + \ddot{q}_2\theta_2 + \dot{q}_1^2\theta_3 \sin(q_2) + \theta_5g \cos(q_1 + q_2) = 0 \quad (5.22)$$

Tenendo presente la (5.19) e la (5.22), ossia le due equazioni di Lagrange del Pendubot riscritte con le posizioni fatte, si giunge subito a stabilire la correttezza della seguente equazione matriciale:

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \quad (5.23)$$

con

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

e con

$$D(q) = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(q_2) & \theta_2 + \theta_3 \cos(q_2) \\ \theta_2 + \theta_3 \cos(q_2) & \theta_2 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

$$C(q, \dot{q}) = \theta_3 \sin(q_2) \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 & -\dot{q}_2 - \dot{q}_1 \\ \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

e

$$g(q) = \begin{bmatrix} \theta_4g \cos(q_1) + \theta_5g \cos(q_1 + q_2) \\ \theta_5g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Calcoliamo ora l'inversa della matrice $D(q)$. A tal fine osserviamo che

$$\begin{aligned} \det(D(q)) &= \theta_2\theta_1 - \theta_3^2 \cos^2(q_2) = (m_2l_2^2 + J_2)(m_1l_1^2 + J_1) + \\ &\quad + m_2a_1^2(m_2l_2^2 + J_2) - m_2^2a_1^2l_2^2 \cos^2(q_2) = \\ &= (m_2l_2^2 + J_2)(m_1l_1^2 + J_1) + m_2a_1^2J_2 + m_2^2a_1^2l_2^2 \sin^2(q_2) > 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

e come è facile verificare si ha:

$$D^{-1}(q) = \frac{1}{\det(D(q))} \begin{bmatrix} \theta_2 & -\theta_2 - \theta_3 \cos(q_2) \\ -\theta_2 - \theta_3 \cos(q_2) & \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(q_2) \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Premoltiplicando ambo i membri della (5.23) per D^{-1} si ottiene infine:

$$\ddot{q} = -D^{-1}(q)[C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q)] + D^{-1}(q)\tau \quad (5.30)$$

in cui ricordiamo che q e τ non sono scalari ma vettori colonna di \mathbb{R}^2 . Facendo uso della precedente equazione matriciale si giunge subito a stabilire l'espressione matematica del sistema del Pendubot. A tal fine si ponga:

$$x_1 = q_1 \quad x_2 = q_2 \quad x_3 = \dot{q}_1 \quad x_4 = \dot{q}_2 \quad (5.31)$$

e si osservi che:

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Dunque, in conformità con la Proposizione 1.3.1 (circa la riduzione a sistemi di primo ordine), otteniamo che il sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = -D^{-1} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) \left[C \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \right. \\ \left. + g \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) \right] + D^{-1} \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) \tau = \\ = \begin{bmatrix} f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, \tau_1) \\ f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, \tau_1) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (5.35)$$

descrive⁶ il Pendubot ed è equivalente alla equazione (5.30) nel senso specificato dalla Proposizione 1.3.1. Si ricordi che

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

è l'ingresso del sistema dinamico considerato. Tuttavia se operiamo, mediante un opportuno controllore⁷, una retroazione dallo stato, allora τ viene a dipendere esclusivamente dallo stato (x_1, x_2, x_3, x_4) stesso e si ha dunque che il sistema complessivo (ad anello chiuso) risulta essere un sistema autonomo senza ingressi e descritto ancora dalla (5.35), come è facile verificare⁸.

A tal fine si osservi, per maggiore chiarezza, la Figura 5.6.

Scriviamo esplicitamente alcune uguaglianze che ci torneranno utili nel seguito. Dalla seconda delle (5.35), premoltiplicando per D , si ottiene:

$$D \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} f_3(\bar{x}) \\ f_4(\bar{x}) \end{bmatrix} + C \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + g \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

⁶con chiaro significato dei simboli.

⁷senza memoria, ossia a risposta istantanea.

⁸Nel seguito ci si riferirà a tale sistema reazionato.

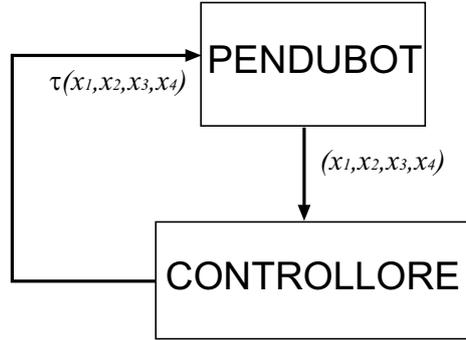


Figura 5.6: Il sistema ad anello chiuso costituito dal Pendubot e dal controllore senza memoria.

ove, per una maggiore chiarezza⁹ e semplicità si è posto $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Nel sistema ad anello chiuso $\tau_1 = \tau_1(\bar{x})$. Pertanto f_3 ed f_4 verranno a dipendere, nel sistema reazionato, soltanto dallo stato, il che giustifica la notazione leggermente ambigua $f_3(\bar{x})$ e $f_4(\bar{x})$, intendendosi più propriamente $f_3(\bar{x}, \tau_1(\bar{x}))$ e $f_4(\bar{x}, \tau_1(\bar{x}))$. Ometteremo nel seguito tale precisazione. Ritroviamo, come era palese, la formula (5.23).

Esplicitando le uguaglianze abbiamo che:

$$\begin{aligned}
 &(\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(x_2))f_3(\bar{x}) + (\theta_2 + \theta_3 \cos(x_2))f_4(\bar{x}) + \\
 &+ \theta_3 \sin(x_2)[-x_4x_3 + (-x_4 - x_3)x_4] + \theta_4g \cos(x_1) + \\
 &+ \theta_5g \cos(x_1 + x_2) = \tau_1
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Ritroviamo chiaramente la (5.19). Analogamente si ottiene subito che

$$\begin{aligned}
 &(\theta_2 + \theta_3 \cos(x_2))f_3(\bar{x}) + \theta_2f_4(\bar{x}) + \theta_3 \sin(x_2)x_3^2 + \\
 &+ \theta_5g \cos(x_1 + x_2) = 0
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

e si ritrova così la (5.22) come ci si aspettava.

⁹Il simbolo \bar{x} rimarca il fatto che lo stato è un vettore (a rigore peraltro andrebbe considerato come vettore colonna) ed evita di confondere lo stato con l'ascissa x indicata in Figura 5.5.

Esplicitiamo ora \ddot{q}_1 , ossia \dot{x}_3 , ossia f_3 . Procediamo con i calcoli:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} &= -\frac{1}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2 \cos^2(x_2)} \begin{bmatrix} \theta_2 & -\theta_2 - \theta_3 \cos(x_2) \\ -\theta_2 - \theta_3 \cos(x_2) & \theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(x_2) \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \left\{ \theta_3 \sin(x_2) \begin{bmatrix} -x_4 & -x_4 - x_3 \\ x_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta_4 g \cos(x_1) + \theta_5 g \cos(x_1 + x_2) \\ \theta_5 g \cos(x_1 + x_2) \end{bmatrix} \right\} + \\ &+ \frac{1}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2 \cos^2(x_2)} \begin{bmatrix} \theta_2 & -\theta_2 - \theta_3 \cos(x_2) \\ -\theta_2 - \theta_3 \cos(x_2) & \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \cos(x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Il termine tra parentesi graffe è pari a

$$\begin{bmatrix} \theta_3 \sin(x_2)[-x_4 x_3 + (-x_4 - x_3)x_4] + \theta_4 g \cos(x_1) + \theta_5 g \cos(x_1 + x_2) \\ \theta_3 \sin(x_2)x_3^2 + \theta_5 g \cos(x_1 + x_2) \end{bmatrix}$$

Tenendo conto di ciò dalla (5.39) si ottiene che

$$\begin{aligned} f_3 &= \frac{1}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2 \cos^2(x_2)} \left\{ -[\theta_2(\theta_3 \sin(x_2)[-x_4 x_3 - \right. \\ &\quad \left. - x_4^2 - x_3 x_4] + \theta_4 g \cos(x_1) + \theta_5 g \cos(x_1 + x_2)) + \right. \\ &\quad \left. + (-\theta_2 - \theta_3 \cos(x_2))(\theta_3 \sin(x_2)x_3^2 + \theta_5 g \cos(x_1 + x_2))] + \theta_2 \tau_1 \right\} = \\ &= \frac{1}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 x_2} \left\{ \theta_2 \theta_3 \sin(x_2)(x_3 + x_4)^2 - \theta_2 \theta_4 g \cos(x_1) + \right. \\ &\quad \left. + \theta_3^2 \cos(x_2) \sin(x_2)x_3^2 + \theta_3 \theta_5 g \cos(x_2) \cos(x_1 + x_2) + \theta_2 \tau_1 \right\} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Ponendo

$$\begin{aligned} F(\bar{x}) &= \theta_2 \theta_3 \sin(x_2)(x_3 + x_4)^2 + \theta_3^2 \cos(x_2) \sin(x_2)x_3^2 - \\ &\quad - \theta_2 \theta_4 g \cos(x_1) + \theta_3 \theta_5 g \cos(x_2) \cos(x_1 + x_2) \end{aligned} \quad (5.41)$$

si ottiene in definitiva che

$$f_3 = \frac{1}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2 \cos^2(x_2)} [\theta_2 \tau_1 + F(\bar{x})] \quad (5.42)$$

Si ricordi peraltro sempre che $f_3 = \dot{x}_3 = \ddot{q}_1$ e che $f_4 = \dot{x}_4 = \ddot{q}_2$ e posizioni analoghe.

Calcoliamo ora l'espressione dell'energia del Pendubot. Ricordando le espressioni (5.6) dell'energia potenziale e (5.8) dell'energia cinetica del Pendubot, nonchè le posizioni (5.18) è facile vedere come l'energia totale E_{TOT} sia data da:

$$\begin{aligned} E_{TOT} &= \frac{1}{2} \left\{ \dot{q}_1^2 [\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(q_2)] + \dot{q}_1 \dot{q}_2 [2\theta_2 + 2\theta_3 \cos(q_2)] + \dot{q}_2^2 \theta_2 \right\} + \\ &\quad + \theta_4 g \sin(q_1) + \theta_5 g \sin(q_1 + q_2) \end{aligned} \quad (5.43)$$

Pertanto porremo

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{2} \{ x_3^2 [\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(x_2)] + x_3 x_4 [2\theta_2 + 2\theta_3 \cos(x_2)] + x_4^2 \theta_2 \} + \\ + \theta_4 g \sin(x_1) + \theta_5 g \sin(x_1 + x_2) \quad (5.44)$$

Calcoliamo ora

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} = \theta_4 g \cos(x_1) + \theta_5 g \cos(x_1 + x_2) \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x_2} = x_3^2 [-\theta_3 \sin(x_2)] + x_3 x_4 [-\theta_3 \sin(x_2)] + \theta_5 g \cos(x_1 + x_2) \quad (5.46)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x_3} = x_3 [\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(x_2)] + x_4 [\theta_2 + \theta_3 \cos(x_2)] \quad (5.47)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x_4} = x_3 [\theta_2 + \theta_3 \cos(x_2)] + x_4 \theta_2 \quad (5.48)$$

Siamo ora in grado di calcolare, ricordando le posizioni fatte e tenendo presente la (5.35) ed il fatto che nel sistema retroazionato $f_3 = f_3(\bar{x})$ e $f_4 = f_4(\bar{x})$ come a suo tempo precisato¹⁰, l'espressione

$$\dot{E}(\bar{x}) := \sum_{i=1}^4 \frac{\partial E}{\partial x_i}(\bar{x}) f_i(\bar{x}) \quad (5.49)$$

Procedendo con i calcoli si ottiene che

$$\dot{E} = (\theta_4 g \cos(x_1) + \theta_5 g \cos(x_1 + x_2)) x_3 + \\ + \{ x_3^2 [-\theta_3 \sin(x_2)] + x_3 x_4 [-\theta_3 \sin(x_2)] + \theta_5 g \cos(x_1 + x_2) \} x_4 + \\ + \{ x_3 [\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(x_2)] + x_4 [\theta_2 + \theta_3 \cos(x_2)] \} f_3 + \\ + \{ x_3 [\theta_2 + \theta_3 \cos(x_2)] + x_4 \theta_2 \} f_4 \quad (5.50)$$

ossia

$$\dot{E} = [\theta_4 g \cos(x_1) + \theta_5 g \cos(x_1 + x_2)] x_3 + x_3^2 x_4 [-\theta_3 \sin(x_2)] + \\ + x_3 x_4^2 [-\theta_3 \sin(x_2)] + \theta_5 g \cos(x_1 + x_2) x_4 + x_3 f_3 [\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(x_2)] + \\ + x_4 f_3 [\theta_2 + \theta_3 \cos(x_2)] + x_3 f_4 [\theta_2 + \theta_3 \cos(x_2)] + x_4 f_4 \theta_2$$

¹⁰si ricordi che l'ingresso τ_1 è funzione del solo stato \bar{x}

Tenendo presente la (5.38), moltiplicata per x_4 , si ottiene¹¹ che

$$\dot{E} = x_3 \{ \theta_4 g \cos(x_1) + \theta_5 g \cos(x_1 + x_2) + x_3 x_4 [-\theta_3 \sin(x_2)] + x_4^2 [-\theta_3 \sin(x_2)] + f_3 [\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos(x_2)] + f_4 [\theta_2 + \theta_3 \cos(x_2)] - x_3 x_4 \theta_3 \sin(x_2) \}$$

Allora, tenendo conto della (5.37), segue infine che

$$\dot{E} = x_3 \tau_1 \quad (5.51)$$

Questo risultato era del resto ovvio in base a considerazioni fisiche, essendo $\frac{dE_{TOT}}{dt} = \dot{q}_1 \tau_1$.

Vogliamo a questo punto proporre per il sistema reazionato di Figura 5.6 e descritto ancora dalla (5.35) la seguente funzione di Lyapunov¹²

$$V(\bar{x}) = \frac{k_E}{2} (E(\bar{x}) - E_{top})^2 + \frac{k_D}{2} x_3^2 + \frac{k_P}{2} \left(x_1 - \frac{\pi}{2} \right)^2 \quad (5.52)$$

Supporremo sempre (anche implicitamente) che le costanti k siano positive. Come si vede subito V è una funzione semidefinita positiva dello stato. E_{top} indica il valore dell'energia posseduta dal Pendubot quando questo si trova fermo con tutti e due i bracci verso l'alto, ossia con $q_1 = \frac{\pi}{2}$, $q_2 = 0$ e $\dot{q}_1 = 0$, $\dot{q}_2 = 0$.

Pertanto

$$E_{top} = m_1 g l_1 + m_2 g (a_1 + l_2) = g(\theta_4 + \theta_5) \quad (5.53)$$

Affinchè V sia effettivamente una funzione di Lyapunov (per il sistema retroazionato) deve essere soddisfatta la Definizione 4.2.3. Procediamo dunque nel calcolo di \dot{V} .

¹¹si osservi infatti che

$$x_4 \theta_5 g \cos(x_1 + x_2) + x_4 f_3 [\theta_2 + \theta_3 \cos(x_2)] + x_4 f_4 \theta_2 = x_4 [-x_3^2 \theta_3 \sin(x_2)]$$

¹²Si può scrivere indifferentemente "Lyapunov" o "Ljapunov" anche se la prima scrittura è assai più frequente nella Letteratura.

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(\bar{x}) &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{k_E}{2} (E(\bar{x}) - E_{top})^2 + \frac{k_D}{2} x_3^2 + \frac{k_P}{2} \left(x_1 - \frac{\pi}{2} \right)^2 \right] f_i(\bar{x}) = \\
 &= \frac{k_E}{2} \sum_{i=1}^4 f_i \frac{\partial}{\partial x_i} (E - E_{top})^2 + \frac{k_D}{2} \sum_{i=1}^4 f_i \frac{\partial (x_3^2)}{\partial x_i} + \\
 &\quad + \frac{k_P}{2} \sum_{i=1}^4 f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(x_1 - \frac{\pi}{2} \right)^2 = \\
 &= k_E \sum_{i=1}^4 f_i (E - E_{top}) \frac{\partial E}{\partial x_i} + k_D f_3 x_3 + k_P f_1 \left(x_1 - \frac{\pi}{2} \right) = \\
 &= k_E (E(\bar{x}) - E_{top}) \dot{E}(\bar{x}) + k_D f_3 x_3 + k_P x_3 \left(x_1 - \frac{\pi}{2} \right) = \\
 &= x_3 \left[k_E (E - E_{top}) \tau_1 + k_D f_3 + k_P \left(x_1 - \frac{\pi}{2} \right) \right] \tag{5.54}
 \end{aligned}$$

avendo ricordato che $f_1 = x_3$ e la (5.51) nonché la (5.49).

A questo punto dobbiamo fare in modo che $\dot{V}(\bar{x}) \leq 0$ per ogni punto \bar{x} del dominio, in accordo con la Definizione 4.2.3.

Per fare questo dobbiamo definire una opportuna legge di controllo $\tau_1(\bar{x})$.

Esplicitiamo ancora l'espressione di \dot{V} , ricordando la (5.42) e la (5.41):

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= x_3 \left[\tau_1 k_E (E - E_{top}) + \frac{k_D [\theta_2 \tau_1 + F]}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 x_2} + k_P \left(x_1 - \frac{\pi}{2} \right) \right] = \\
 &= x_3 \left[t_1 \left(k_E (E - E_{top}) + \frac{k_D \theta_2}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2(x_2)} \right) + \frac{k_D F(\bar{x})}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 x_2} + \right. \\
 &\quad \left. + k_P \left(x_1 - \frac{\pi}{2} \right) \right] \tag{5.55}
 \end{aligned}$$

Se facciamo in modo che valga la seguente uguaglianza¹³

$$\begin{aligned}
 -x_3 &= \left[t_1 \left(k_E (E - E_{top}) + \frac{k_D \theta_2}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2(x_2)} \right) + \frac{k_D F(\bar{x})}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 x_2} + \right. \\
 &\quad \left. + k_P \left(x_1 - \frac{\pi}{2} \right) \right] \tag{5.56}
 \end{aligned}$$

¹³come vedremo dovremo imporre delle condizioni sulle costanti k_E, k_D, k_P .

allora otteniamo che

$$\dot{V} = -x_3^2 \leq 0 \quad (5.57)$$

e dunque V è davvero una funzione di Lyapunov per il sistema del Pendubot.

Per fare sì che la (5.56) sia soddisfatta occorre che la legge di controllo sia, per ogni \bar{x} :

$$\tau_1(\bar{x}) = \frac{-x_3 - \frac{k_D F(\bar{x})}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 x_2} - k_P \left(x_1 - \frac{\pi}{2}\right)}{k_E(E(\bar{x}) - E_{top}) + \frac{k_D \theta_2}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 x_2}} \quad (5.58)$$

Deve valere chiaramente la condizione che il denominatore della precedente espressione sia sempre diverso da zero.

Semplificando ulteriormente si ha che

$$\tau_1(\bar{x}) = \frac{-k_D F(\bar{x}) - (\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 x_2) \left(x_3 + k_P \left(x_1 - \frac{\pi}{2}\right)\right)}{(\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 x_2) k_E(E(\bar{x}) - E_{top}) + k_D \theta_2} \quad (5.59)$$

Le costanti k sono sempre supposte essere positive. Dobbiamo però garantire che il denominatore di (5.58) sia diverso da zero.

A tal fine dimostriamo ora la seguente

Proposizione 5.2.1 *Se $k_D > 2k_E g \theta_1 (\theta_4 + \theta_5)$ allora il denominatore di (5.58) è certamente positivo e dunque risulta (sempre) definita la legge di controllo $\tau_1(\bar{x})$ data in (5.59) che rende V una funzione di Lyapunov per il sistema del Pendubot¹⁴.*

Dimostrazione: Scriviamo esplicitamente il denominatore della (5.58):

$$K_E(E - E_{top}) + \frac{k_D \theta_2}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 x_2} > 0 \quad (5.60)$$

Sostituendo le espressioni di E (5.44) e di E_{top} (5.53), otteniamo:

$$k_E \left[\frac{1}{2} \{x_3^2 [\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos x_2] + x_3 x_4 [2\theta_2 + 2\theta_3 \cos x_2] + x_4^2 \theta_2\} + \right. \\ \left. + \theta_4 g \sin x_1 + \theta_5 g \sin(x_1 + x_2) - g(\theta_4 + \theta_5) \right] + \frac{k_D \theta_2}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 x_2} > 0 \quad (5.61)$$

È facile vedere che la T in (5.8) è una funzione semidefinita positiva delle variabili $(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$. Essa rappresenta infatti l'energia cinetica del

¹⁴Con $\dot{V} = -x_3^2 \leq 0$

Pendubot ed è la somma di termini semidefiniti positivi, come si vede dalla (5.7) e dalle precedenti.

Pertanto la funzione

$$T = \frac{1}{2}m_1l_1^2x_3^2 + \frac{1}{2}J_1x_3^2 + \frac{1}{2}J_2(x_3 + x_4)^2 + \frac{1}{2}m_2[a_1^2 + x_3^2 + l_2^2(x_3 + x_4)^2 + 2a_1x_3l_2(x_3 + x_4)\cos(x_2)]$$

risulterà essere una funzione semidefinita positiva dello stato.

Riarrangiando e ricordando le (5.18) si ottiene che

$$T(\bar{x}) = \frac{1}{2}\{x_3^2[\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos x_2] + x_3x_4[2\theta_2 + 2\theta_3 \cos x_2] + x_4^2\theta_2\} \quad (5.62)$$

è una funzione semidefinita positiva. Allora la (5.61) può essere semplificata, essendo essa certamente vera se è vero che

$$k_E[\theta_4g \sin x_1 + \theta_5g \sin(x_1 + x_2) - g(\theta_4 + \theta_5)] + \frac{k_D\theta_2}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 x_2} > 0 \quad (5.63)$$

Osserviamo peraltro che

$$\min_{x_2} \frac{\theta_2}{\theta_1\theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 x_2} = \frac{1}{\theta_1}$$

essendo $-\theta_3^2 \cos^2 x_2$ una funzione semidefinita negativa ed essendo le costanti θ positive e osservando che $\theta_1\theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 x_2 > 0$ in conseguenza della (5.28).

Si tenga sempre presente tale risultato¹⁵.

Pertanto la (5.63) è certamente verificata se

$$k_E[\theta_4g \sin x_1 + \theta_5g \sin(x_1 + x_2) - g(\theta_4 + \theta_5)] + \frac{k_D}{\theta_1} > 0$$

ossia se

$$k_D > \theta_1 k_E[-\theta_4g \sin x_1 - \theta_5g \sin(x_1 + x_2) + g(\theta_4 + \theta_5)] \quad (5.64)$$

ed infine, poichè

$$-\theta_4g \sin x_1 - \theta_5g \sin(x_1 + x_2) \leq \theta_4g + \theta_5g$$

¹⁵e si osservi esplicitamente che le frazioni in cui l'espressione $\theta_1\theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 x_2$ compare a denominatore risultano certamente definite in quanto appunto $\theta_1\theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 x_2 > 0$ in conseguenza della (5.28), con semplici considerazioni.

si conclude che la (5.64) è certamente vera se

$$k_D > 2k_E\theta_1g(\theta_4 + \theta_5) \quad (5.65)$$

e dunque se vale la precedente condizione il denominatore della (5.58) è certamente (sempre) diverso da zero. In conseguenza di ciò, la legge di controllo (5.59) è sempre definita, V è una funzione di Lyapunov e si ha $\dot{V} = -x_3^2$
 C.V.D. \square

Inoltre ricordiamo esplicitamente la seguente

Definizione 5.2.1 *Le costanti k_E, k_D, k_P sono positive.*

In base alla Proposizione 4.2.6 possiamo affermare, con chiaro significato di simboli, che

$$\omega(\xi) \subseteq \{\bar{x} \in \mathbb{R}^4 : x_3 = 0\} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^4 \quad (5.66)$$

essendo chiaramente $\dot{V}(\bar{x}) = 0$ se e solo se $x_3 = 0$ in quanto, come visto, $\dot{V} = -x_3^2$.

In seguito ci preoccuperemo di verificare se è applicabile il principio di LaSalle (in qualche sua formulazione).

Per ora andiamo alla ricerca del massimo insieme invariante M contenuto in

$$S := \{x \in \mathbb{R}^4 : x_3 = 0\} \quad (5.67)$$

Per il significato di M (e di S) si riveda la Proposizione 4.2.8 e relativi commenti e si ricordi la espressione di \dot{V} .

Ricordando la Proposizione 4.2.5 possiamo affermare che

$$N_0^+ := \{x \in \mathbb{R}^4 : V(x) = 0\} \quad (5.68)$$

risulta sicuramente essere un insieme (positivamente) invariante. Si ricordi peraltro che V è semidefinita positiva, come si vede immediatamente.

Dunque se $N_0^+ \subseteq S$, allora $N_0^+ \subseteq M$, come si evince dalle definizioni di S e di M con facili osservazioni.

Dalla espressione di V (5.52) si nota che $V = 0$ se e solo se $x_1 = \frac{\pi}{2}$ e $x_3 = 0$ e $E = E_{top}$. Dal punto di vista fisico ciò equivale a dire che il primo braccio è fermo in alto, mentre il secondo deve essere in uno stato tale da rendere l'energia complessiva del sistema Pendubot pari ad E_{top} .

Con le condizioni $x_3 = 0$ e $x_1 = \frac{\pi}{2}$, l'espressione dell'energia (5.44) diventa

$$E|_{(x_3=0, x_1=\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{2}\theta_2 x_4^2 + \theta_4 g + \theta_5 g \cos(x_2) \quad (5.69)$$

Pertanto la condizione $E = E_{top}$ diventa:

$$\frac{1}{2}\theta_2 x_4^2 + \theta_5 g(-1 + \cos x_2) = 0 \quad (5.70)$$

avendo ricordato la espressione di E_{top} e con facili passaggi.

Da quanto detto si comprende come¹⁶

$$N_0^+ = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = \frac{\pi}{2}, x_3 = 0, \frac{1}{2}\theta_2 x_4^2 + \theta_5 g(-1 + \cos x_2) = 0\} \quad (5.71)$$

Inoltre N_0^+ (che potremo indicare anche con V_0 , avendo $V_0 = N_0^+$) contiene il punto di equilibrio dato da $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, come si vede immediatamente.

A tale punto di equilibrio corrisponde la situazione fisica del Pendubot con tutti e due i bracci orientati verso l'alto e fermi.

Come si vede tutti i punti di N_0^+ sono caratterizzati da $x_3 = 0$ e dunque $N_0^+ \subseteq S$ e $N_0^+ \subseteq M$. Abbiamo pertanto individuato un primo insieme (positivamente) invariante N_0^+ contenuto in S e dunque parte di M .

L'intuizione suggerisce che N_0^+ debba essere formato dall'unione di due *traiettorie omocline*¹⁷: infatti se il primo braccio del Pendubot è fermo verso l'alto ed il secondo evolve in modo tale che $E = E_{top}$ allora il secondo braccio dovrà evolvere (nel piano $x_2 x_4$, ossia nel piano $q_2 \dot{q}_2$) lungo una delle due omocline relative al pendolo matematico semplice, al fine proprio di garantire che $E = E_{top}$ e ricordando che il secondo braccio è non attuato (e che il primo braccio è immobile).

Per una dimostrazione rigorosa si confronti l'espressione di N_0^+ con l'espressione (3.24), con opportune considerazioni e tenendo presente anche l'equazione che definisce il sistema del Pendubot. Si riveda anche l'Esempio 3.2.1, ma si tenga presente che in tale Esempio l'angolo che identifica la posizione del pendolo viene misurato a partire dalla posizione di riposo in basso, mentre q_2 (essendo $q_1 = \frac{\pi}{2}$) individua la posizione del secondo braccio rispetto alla posizione di equilibrio instabile verso l'alto (la "top position" di entrambe i bracci). Si osservi che essendo $\cos(a + \pi) = -\cos(a)$ si giustifica

¹⁶Si osservi che essendo V semidefinita positiva in questo caso l'insieme N_0^+ definito secondo la Proposizione 4.2.5 si riduce al luogo dei punti V_0 in cui V si annulla.

¹⁷oltre chiaramente al punto di equilibrio $(\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

così la disparità dei segni in (3.24) ed in (5.71).

In definitiva affermiamo che:

Proposizione 5.2.2 *Considerato il sistema del Pendubot retroazionato, con la legge di controllo data da (5.59) sempre definita (senza singolarità), si ha che l'insieme*

$$N_0^+ = V_0 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = \frac{\pi}{2}, x_3 = 0, \frac{1}{2}\theta_2 x_4^2 + \theta_5 g(-1 + \cos x_2) = 0\}$$

è contenuto in M , ove M è il massimo insieme invariante contenuto in

$$S = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_3 = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^4 : \dot{V}(x) = 0\}$$

La funzione di Lyapunov V è data dalla (5.52) e nelle ipotesi fatte vale $\dot{V} = -x_3^2$.

L'insieme N_0^+ contiene due traiettorie omocline.

Chiaramente le costanti k saranno scelte in modo da rendere ovunque definita la legge di controllo. Si veda a tal proposito la Proposizione 5.2.1.

Abbiamo stabilito che $N_0^+ \subseteq M$. Ci preoccupiamo ora di trovare gli altri punti di M non appartenenti a N_0^+ .

Cominciamo con l'osservare che, con chiaro significato di simboli, se $x_M \in M$ allora la traiettoria $O^+(x_M) \subseteq M$ perchè M è un insieme invariante per definizione. Questo implica, sempre in virtù della definizione di M , che la soluzione $\phi(t, x_M)$ deve essere tale che $\forall t \geq 0$ si abbia $\phi_3(t, x_M) = 0$ e $\phi_1(t, x_M) = \phi_1^* = \text{cost}$. Se così non fosse, infatti, e si avesse $\phi_3(\tilde{t}, x_M) \neq 0$ per qualche \tilde{t} , la traiettoria $O^+(x_M)$ avrebbe almeno un punto con $x_3 \neq 0$ e dunque non potrebbe essere tutta contenuta in M , il che è assurdo¹⁸.

Si osservi che $\phi(t, x_M) = (\phi_1(t, x_M), \phi_2(t, x_M), \phi_3(t, x_M), \phi_4(t, x_M))$ deve soddisfare $\forall t$ la (5.35) e dunque le (5.37) e (5.38) (avendo effettuato la sostituzione al posto della x ovviamente).

Come è facile vedere risulta $\dot{\phi}_1(t, x_M) = \dot{\phi}_3(t, x_M) = 0, \forall t \geq 0$.

Si tengano presenti inoltre nel seguito le seguenti uguaglianze:

$$\ddot{\phi}_1(t, x_M) = \dot{\phi}_3(t, x_M) = f_3(\phi(t, x_M)) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (5.72)$$

e

$$\ddot{\phi}_2(t, x_M) = \dot{\phi}_4(t, x_M) = f_4(\phi(t, x_M)) \quad \forall t \quad (5.73)$$

¹⁸si ricordi sempre la definizione di M ed il fatto che M è un insieme invariante per il Pendubot retroazionato.

Si tengano presenti anche uguaglianze del tipo $\phi_4(t, x_m) = \dot{\phi}_2(t, x_M)$ e analoghe.

Nel seguito, per brevità, scriveremo ϕ oppure $\phi(t)$ al posto di $\phi(t, x_M)$.

Da quanto detto e dalla (5.37) si comprende che

$$\begin{aligned} (\theta_2 + \theta_3 \cos \phi_2) \ddot{\phi}_2 + \theta_3 \sin(\phi_2) [-\dot{\phi}_2^2] + \theta_4 g \cos \phi_1^* + \\ + \theta_5 g \cos(\phi_1^* + \phi_2) = \tau_1(\phi) \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (5.74)$$

Inoltre dalla (5.38) si ha

$$\theta_2 \ddot{\phi}_2 + \theta_5 g \cos(\phi_1^* + \phi_2) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (5.75)$$

La legge di controllo τ_1 è data da (5.59).

Dovendo valere la (5.42) possiamo scrivere che

$$\ddot{\phi}_1 = \frac{1}{\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 \phi_2} (\theta_2 \tau_1(\phi) + F(\phi)) \quad (5.76)$$

da cui

$$F(\phi) = \ddot{\phi}_1 [\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 \phi_2] - \theta_2 \tau_1 \quad (5.77)$$

Sostituendo tale espressione nella (5.59) si ha con facili passaggi che

$$\begin{aligned} \tau_1(\phi) [(\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 \phi_2) k_E (E(\phi) - E_{top}) + k_D \theta_2] = \\ = -k_D [\ddot{\phi}_1 [\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 \phi_2] - \theta_2 \tau_1] - \\ - (\theta_1 \theta_2 - \theta_3^2 \cos^2 \phi_2) (\phi_3 + k_P (\phi_1 - \frac{\pi}{2})) \end{aligned} \quad (5.78)$$

Ricordando che $\ddot{\phi}_1 = 0$ e che $\phi_3 = 0$ e che $\phi_1 = \phi_1^*$ (valore costante) ed effettuando le semplificazioni si ottiene che

$$\tau_1(\phi) [k_E (E(\phi) - E_{top})] = -k_P (\phi_1^* - \frac{\pi}{2}) \quad (5.79)$$

Mostriamo ora che $E(\phi(t)) = E^* = \text{cost}$ per ogni t .

In virtù della Proposizione 4.2.3 possiamo scrivere che

$$\frac{d}{dt} V(\phi(t)) = \dot{V}(\phi(t)) = 0 \quad (5.80)$$

avendo ricordato la (5.54) oppure la (5.57) ed il fatto che $\phi_3(t)$ è identicamente nulla.

Dunque $V(\phi(t)) = \text{cost}$ per ogni t .

Dalla (5.52) segue allora che

$$E(\phi(t, x_M)) = E^* = \text{cost} \quad \forall t, \quad x_M \in M \quad (5.81)$$

in quanto sappiamo che $\phi_3 = 0$ e $\phi_1 = \phi_1^* = \text{cost}$.

Distinguiamo ora due casi:

- vale: $E^* = E_{top}$
- vale: $E^* \neq E_{top}$

Se $E^* = E_{top}$ allora dalla (5.79) segue che necessariamente $\phi_1 = \phi_1^* = \frac{\pi}{2}$ e dunque si ha $\phi_1 = \frac{\pi}{2}$ e $\phi_3 = 0$ ed $E(\phi) = E_{top}$ ed allora dalla (5.52) segue che $V(\phi(t, x_M)) = 0$. Questo vuol dire che il sistema evolve in N_0^+ , ossia $O^+(x_M) \subseteq N_0^+$. Ma già sappiamo che $N_0^+ \subseteq M$ per cui, in definitiva, non otteniamo nessun nuovo punto di M non appartenente ad N_0^+ .

Consideriamo invece il caso $E^* \neq E_{top}$. In tale ipotesi dalla (5.79) segue che

$$\tau_1(\phi) = -\frac{k_P(\phi_1^* - \frac{\pi}{2})}{k_E(E^* - E_{top})} \quad (5.82)$$

e dunque $\tau_1(\phi(t, x_M))$ risulta essere, in questo caso, una funzione costante nel tempo. Poniamo con ovvio significato dei simboli $\tau_1(\phi) = \tau_1^*$.

Dalla (5.75) si ottiene che, per ogni t

$$\ddot{\phi}_2 = -\frac{\theta_5 g \cos(\phi_1^* + \phi_2)}{\theta_2} \quad (5.83)$$

Sostituendo tale espressione nella (5.74) e semplificando si ottiene che

$$-\frac{\theta_3 \theta_5}{\theta_2} g \cos(\phi_2) \cos(\phi_1^* + \phi_2) + \theta_3 \sin(\phi_2) (-\dot{\phi}_2^2) + \theta_4 g \cos \phi_1^* = \tau_1^* \quad (5.84)$$

Si noti esplicitamente che τ_1^* potrà essere funzione di x_M .

Derivando rispetto al tempo, si ottiene che:

$$\begin{aligned} -\frac{\theta_3 \theta_5}{\theta_2} g [-\sin(\phi_2) \dot{\phi}_2 \cos(\phi_1^* + \phi_2) - \cos \phi_2 \sin(\phi_1^* + \phi_2) \dot{\phi}_2] + \\ + \theta_3 [-\cos(\phi_2) \dot{\phi}_2 \dot{\phi}_2^2 - \sin(\phi_2) 2\dot{\phi}_2 \ddot{\phi}_2] = 0 \end{aligned} \quad (5.85)$$

in quanto τ_1 come visto è costante.

Possiamo raccogliere a fattor comune $\dot{\phi}_2$ ottenendo

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_2 \left\{ -\frac{\theta_3 \theta_5}{\theta_2} g [-\sin(\phi_2) \cos(\phi_1^* + \phi_2) - \cos \phi_2 \sin(\phi_1^* + \phi_2)] + \right. \\ \left. + \theta_3 [-\cos(\phi_2) \dot{\phi}_2^2 - \sin(\phi_2) 2\ddot{\phi}_2] \right\} = 0 \quad \forall t \end{aligned} \quad (5.86)$$

Tale espressione vale, come è facile vedere, per ogni $x_M \in M \setminus N_0^+$.

Vogliamo ora dimostrare che $\dot{\phi}_2$ deve essere identicamente nulla. A tal fine ammettiamo per assurdo che $\dot{\phi}_2$ non sia identicamente nulla e che dunque

esista un istante di tempo \tilde{t} per cui risulti $\dot{\phi}_2(\tilde{t}, x_M) \neq 0$ per qualche $x_M \in M \setminus N_0^+$. Per la continuità di ϕ e per la continuità di $\dot{\phi}_2$, allora, si avrà che $\dot{\phi}_2 \neq 0$ su tutto un intervallo $I =]a, b[$ di misura non nulla, con $\tilde{t} \in I$.

Pertanto $\dot{\phi}_2 \neq 0$ per ogni $t \in I$.

Dalla (5.86) segue allora che

$$-\frac{\theta_3\theta_5}{\theta_2}g[-\sin(\phi_2)\cos(\phi_1^* + \phi_2) - \cos\phi_2\sin(\phi_1^* + \phi_2)] + \quad (5.87)$$

$$+ \theta_3[-\cos(\phi_2)\dot{\phi}_2^2 - \sin(\phi_2)2\ddot{\phi}_2] = 0 \quad \forall t \in I$$

Si ricordi chiaramente che la soluzione ϕ è funzione del tempo t .

Tenendo conto della (5.83) si ottiene, con facili passaggi, che

$$3\frac{\theta_5}{\theta_2}g\sin(\phi_2)\cos(\phi_1^* + \phi_2) + \frac{\theta_5}{\theta_2}g\cos(\phi_2)\sin(\phi_1^* + \phi_2) - \quad (5.88)$$

$$- \cos(\phi_2)\dot{\phi}_2^2 = 0 \quad \forall t \in I$$

Derivando ulteriormente tale espressione rispetto al tempo si ottiene che

$$\frac{\theta_5g}{\theta_2}3[\cos(\phi_2)\dot{\phi}_2\cos(\phi_1^* + \phi_2) - \sin\phi_2\sin(\phi_1^* + \phi_2)\dot{\phi}_2] + \quad (5.89)$$

$$+ \frac{\theta_5g}{\theta_2}[-\sin(\phi_2)\dot{\phi}_2\sin(\phi_1^* + \phi_2) + \cos\phi_2\cos(\phi_1^* + \phi_2)\dot{\phi}_2] -$$

$$- [-\sin(\phi_2)\dot{\phi}_2\dot{\phi}_2^2 + \cos(\phi_2)2\dot{\phi}_2\ddot{\phi}_2] = 0 \quad \forall t \in I$$

Anche qui possiamo sostituire l'espressione di $\ddot{\phi}_2$ data da (5.83) e risistemando i termini si ottiene:

$$6\frac{\theta_5g}{\theta_2}\cos(\phi_2)\dot{\phi}_2\cos(\phi_1^* + \phi_2) - 4\frac{\theta_5g}{\theta_2}\sin\phi_2\sin(\phi_1^* + \phi_2)\dot{\phi}_2 + \quad (5.90)$$

$$+ \sin(\phi_2)\dot{\phi}_2\dot{\phi}_2^2 = 0 \quad \forall t \in I$$

Poichè per ipotesi (assurda) $\dot{\phi}_2 \neq 0$ per ogni $t \in I$, possiamo dividere ambo i membri della precedente espressione per $\dot{\phi}_2$, ottenendo che:

$$6\frac{\theta_5g}{\theta_2}\cos(\phi_2)\cos(\phi_1^* + \phi_2) - 4\frac{\theta_5g}{\theta_2}\sin\phi_2\sin(\phi_1^* + \phi_2) + \quad (5.91)$$

$$+ \sin(\phi_2)\dot{\phi}_2^2 = 0 \quad \forall t \in I$$

Derivando ancora si ottiene

$$6\frac{\theta_5g}{\theta_2}[-\sin(\phi_2)\dot{\phi}_2\cos(\phi_1^* + \phi_2) - \cos(\phi_2)\sin(\phi_1^* + \phi_2)\dot{\phi}_2] - \quad (5.92)$$

$$- 4\frac{\theta_5g}{\theta_2}[\cos(\phi_2)\dot{\phi}_2\sin(\phi_1^* + \phi_2) + \sin\phi_2\cos(\phi_1^* + \phi_2)\dot{\phi}_2] +$$

$$+ \cos(\phi_2)\dot{\phi}_2\dot{\phi}_2^2 + \sin(\phi_2)2\dot{\phi}_2\ddot{\phi}_2 = 0 \quad \forall t \in I$$

Sostituendo ancora l'espressione di $\ddot{\phi}_2$ data da (5.83), riarrangiando i termini e dividendo per $\dot{\phi}_2 \neq 0$ in I (ossia $\forall t \in I$), si ottiene che

$$\begin{aligned}
 -12 \frac{\theta_5 g}{\theta_2} \sin(\phi_2) \cos(\phi_1^* + \phi_2) - 10 \frac{\theta_5 g}{\theta_2} \cos(\phi_2) \sin(\phi_1^* + \phi_2) + \\
 + \cos(\phi_2) \dot{\phi}_2^2 = 0 \quad \forall t \in I
 \end{aligned} \tag{5.93}$$

Eguagliamo ora il primo membro di tale ultima equazione con il primo membro della (5.88) in quanto ambo i membri sono nulli per ogni $t \in I$. Semplificando, con facili passaggi, si ottiene che deve essere

$$\sin(\phi_2) \cos(\phi_1^* + \phi_2) + \cos(\phi_2) \sin(\phi_1^* + \phi_2) = 0 \quad \forall t \in I \tag{5.94}$$

La precedente equazione può essere riscritta come

$$\sin(2\phi_2 + \phi_1^*) = 0 \quad \forall t \in I \tag{5.95}$$

Per la continuità di ϕ questo implica che

$$2\phi_2 + \phi_1^* = \text{cost} = k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \quad \forall t \in I \tag{5.96}$$

Da ciò segue che $\phi_2 = \text{cost} = \phi_2^*$ per ogni $t \in I$. Di conseguenza $\dot{\phi}_2 = 0$ per ogni $t \in I$. Ma questo contraddice la nostra ipotesi (assurda) iniziale, secondo cui esiste \tilde{t} t.c. $\dot{\phi}_2(\tilde{t}) \neq 0$ con $\tilde{t} \in I$, $I =]a, b[$.

Da ciò segue che $\dot{\phi}_2 = 0$ per ogni t , ossia ϕ_2 deve essere identicamente nulla. C.V.D.

Stabiliamo allora il seguente risultato

Proposizione 5.2.3 *Si ha $\dot{\phi}_2(t, x_M) = 0$ per ogni t e per un generico punto $x_M \in M \setminus N_0^+$. Si avrà dunque anche che $\phi_2(t, x_M) = \text{cost} = \phi_2^*$ per ogni t e per un generico punto $x_M \in M \setminus N_0^+$. Stiamo considerando il Pendubot retroazionato con legge di controllo (5.59) e ipotizziamo¹⁹ che valga la (5.65).*

Si osservi che la condizione $x_M \in M \setminus N_0^+$ assicura che $E^* \neq E_{top}$, garantendo la validità del risultato enunciato.

Se per assurdo infatti fosse $E^* = E_{top}$, con $x_M \in M$, allora avremmo che $\phi(t, x_M)$ evolve in N_0^+ , come a suo tempo dimostrato.

Quanto detto implica che M è formato dall'unione di N_0^+ più una serie di punti di equilibrio²⁰. Ciò discende immediatamente dall'aver osservato che per $x_M \in M \setminus N_0^+$ si ha

$$\phi_1(t, x_M) = \phi_1^* = \text{cost} \quad \phi_2(t, x_M) = \phi_2^* = \text{cost} \quad \forall t \tag{5.97}$$

¹⁹nel seguito supporremo implicite tali ipotesi.

²⁰ricordiamo che se un sistema si trova in uno stato di equilibrio, allora lo stato del sistema non muta nel tempo.

e che

$$\phi_3(t, x_M) = \dot{\phi}_1(t, x_M) = 0 \quad \phi_4(t, x_M) = \dot{\phi}_2(t, x_M) = 0 \quad \forall t \quad (5.98)$$

Pertanto $O^+(x_M)$ si riduce ad un unico punto e questo vuol dire, come è facile dimostrare (per assurdo), che x_M è un punto di equilibrio.

Proposizione 5.2.4 *Se $x_M \in M$ allora o $x_M \in N_0^+$ o x_M è un punto di equilibrio per il sistema del Pendubot (reazionato).*

Il significato dei simboli è chiaro.

Dalla equazione (5.38) si ha allora, tenendo conto dei risultati ottenuti, che deve essere

$$\theta_5 g \cos(\phi_1^* + \phi_2^*) = 0 \quad (5.99)$$

e questo vuol dire che vale la seguente

Proposizione 5.2.5 *Si ha che*

$$\phi_1^* + \phi_2^* = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{oppure} \quad \phi_1^* + \phi_2^* = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \quad (5.100)$$

per ogni $x_M \in M \setminus N_0^+$. Chiaramente $\phi_1^* = \phi_1(t, x_M)$ (costante) e $\phi_2^* = \phi_2(t, x_M)$ (costante).

In virtù del precedente risultato, dalla (5.37) e dalla (5.82) segue che, per $x_M \in M \setminus N_0^+$:

$$\theta_4 g \cos(\phi_1^*) = -\frac{k_P(\phi_1^* - \frac{\pi}{2})}{k_E(E^* - E_{top})} \quad (5.101)$$

Dall'espressione dell'energia (5.44) si ottiene allora che

$$E[\phi(t)] = E^* = \theta_4 g \sin(\phi_1^*) + \theta_5 g \sin(\phi_1^* + \phi_2^*) \quad (5.102)$$

inoltre ricordiamo che $E_{top} = g(\theta_4 + \theta_5)$. Allora, per $x_M \in M \setminus N_0^+$ si ha che:

$$\theta_4 g \cos(\phi_1^*) = -\frac{k_P(\phi_1^* - \frac{\pi}{2})}{k_E(\theta_4 g \sin(\phi_1^*) + \theta_5 g \sin(\phi_1^* + \phi_2^*) - g(\theta_4 + \theta_5))} \quad (5.103)$$

Per la Proposizione 5.2.5 dobbiamo allora distinguere, a partire dalla espressione appena scritta, due casi possibili.

Proposizione 5.2.6 *Per ogni $x_M \in M \setminus N_0^+$ si ha che:*

$$\begin{cases} (\theta_4 g)^2 \cos(\phi_1^*) [1 - \sin \phi_1^*] = \frac{k_P}{k_E} (\phi_1^* - \frac{\pi}{2}) \\ \phi_1^* + \phi_2^* = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (5.104)$$

oppure

$$\begin{cases} \theta_4 g \cos(\phi_1^*) [\theta_4 g \sin \phi_1^* - 2\theta_5 g - \theta_4 g] = -\frac{k_P}{k_E} (\phi_1^* - \frac{\pi}{2}) \\ \phi_1^* + \phi_2^* = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (5.105)$$

Stiamo chiaramente considerando il sistema del Pendubot retroazionato con chiaro significato dei simboli ed ipotizziamo come al solito che valga la (5.59) e la (5.65).

Cercheremo ora di fare in modo che la (5.104) e la (5.105) possano essere soddisfatte soltanto per $\phi_1^* = \frac{\pi}{2}$.

In tal modo potrà esistere soltanto un punto in M al di fuori di N_0^+ e precisamente soltanto il punto di equilibrio $(\frac{\pi}{2}, -\pi, 0, 0)$.

La (prima parte della) condizione (5.104) si può scrivere come

$$-\frac{k_E}{k_P} (\theta_4 g)^2 \cos \phi_1^* [1 - \sin \phi_1^*] + (\phi_1^* - \frac{\pi}{2}) = 0 \quad (5.106)$$

La condizione (5.105) si può scrivere come

$$-\frac{k_E}{k_P} (\theta_4 g)^2 \cos \phi_1^* \left[1 + \frac{2\theta_5}{\theta_4} - \sin \phi_1^* \right] + \left(\phi_1^* - \frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad (5.107)$$

Poniamo:

$$a = \frac{k_E}{k_P} (\theta_4 g)^2 > 0 \quad b = \frac{2\theta_5}{\theta_4} > 0 \quad (5.108)$$

Con tali posizioni le espressioni precedentemente scritte diventano rispettivamente:

$$-a \cos \phi_1^* [1 - \sin \phi_1^*] + (\phi_1^* - \frac{\pi}{2}) = 0 \quad (5.109)$$

e

$$-a \cos \phi_1^* [1 + b - \sin \phi_1^*] + (\phi_1^* - \frac{\pi}{2}) = 0 \quad (5.110)$$

Ricordiamo che è nostro interesse fare in modo che le precedenti equazioni ammettano come unica soluzione $\phi_1^* = \frac{\pi}{2}$.

Cominciamo con lo studio della seconda equazione, in quanto ponendo $b = 0$ ritroviamo la prima²¹. A tal fine, per comodità poniamo

$$\begin{aligned} Y(\phi_1^*) &:= Y_1(\phi_1^*) + Y_2(\phi_1^*) = \\ &= -a \cos \phi_1^* [1 + b - \sin \phi_1^*] + \left(\phi_1^* - \frac{\pi}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.111)$$

con

$$Y_1(\phi_1^*) := -a \cos \phi_1^* [1 + b - \sin \phi_1^*] \quad (5.112)$$

e

$$Y_2(\phi_1^*) = \phi_1^* - \frac{\pi}{2} \quad (5.113)$$

Cominciamo studiando il segno della funzione Y_1 . Se $b > 0$ si ha chiaramente che il segno di Y_1 è pari al segno di $-\cos \phi_1^*$. In ogni caso, comunque, l'espressione $1 + b - \sin \phi_1^*$ è non negativa e si annulla solamente se $b = 0$ e $\sin \phi_1^* = 1$, ossia se $\phi_1^* = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, valore per il quale si annulla anche il termine $\cos \phi_1^*$.

Da quanto detto possiamo affermare che

- $Y_1(\phi_1^*) < 0$ per $\phi_1^* \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[+ 2k\pi$
- $Y_1(\phi_1^*) > 0$ per $\phi_1^* \in \left] \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2} \right[+ 2k\pi$
- $Y_1(\phi_1^*) = 0$ per $\phi_1^* = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Riportiamo in Figura 5.7 l'andamento di $Y_1(\phi_1^*)$ (in funzione di ϕ_1^* chiaramente), per $a = 1$ e per diversi valori non negativi di b , a partire da $b = 0$.

Dunque Y_1 è positiva in $\left] \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2} \right[$ e in tale intervallo pertanto Y non si può annullare, essendo Y_2 positiva e strettamente crescente. Per $\phi_1^* = 3\frac{\pi}{2}$ la Y rimane chiaramente strettamente positiva.

La Y si potrebbe annullare però per qualche valore in $\left] 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2} \right[$, essendo in tale intervallo Y_1 negativo ed Y_2 positivo.

Andiamo pertanto a studiare il minimo di Y in $\left] 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2} \right[$. Osserviamo che vale la seguente diseuguaglianza

$$\begin{aligned} Y_1 = -a \cos \phi_1^* [1 + b - \sin \phi_1^*] &\geq -a \cos \phi_1^* [2 + b] = \tilde{Y}_1 \\ &\forall \phi_1^* \in \left] 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2} \right[\end{aligned} \quad (5.114)$$

²¹anche se b per come è definito è positivo.

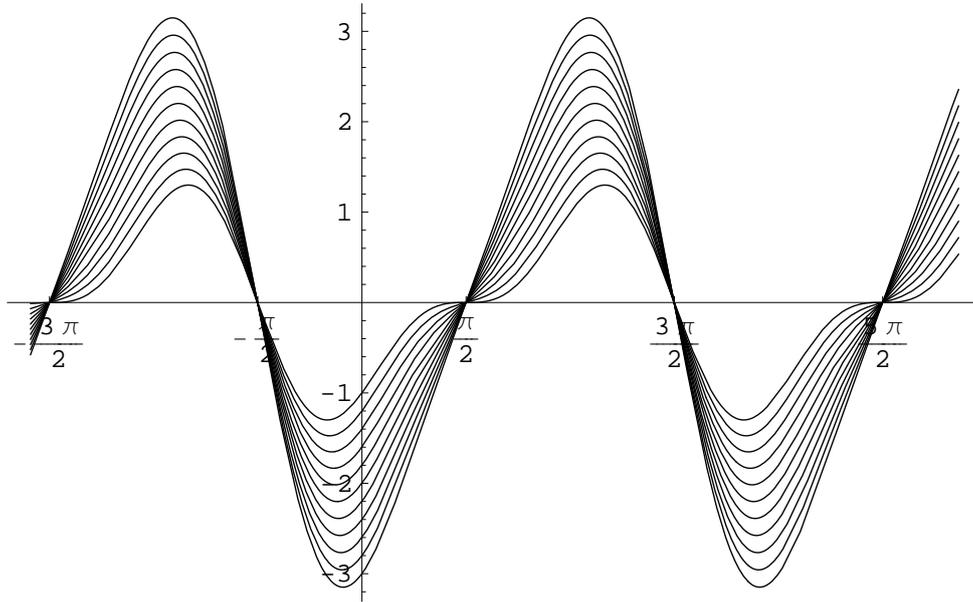


Figura 5.7: La funzione $Y_1(\phi_1^*)$ graficata in funzione di ϕ_1^* per valori crescenti di b a partire da $b = 0$.

avendo posto

$$\tilde{Y}_1(\phi_1^*) := -a \cos \phi_1^* [2 + b] \quad (5.115)$$

In Figura 5.8 sono riportati gli andamenti di Y_1 ed \tilde{Y}_1 in funzione di ϕ_1^* per $a = 1$ e $b = 0$.

In Figura 5.9 sono riportati gli andamenti di Y_1 ed \tilde{Y}_1 in funzione di ϕ_1^* per $a = 1$ e $b = 5$.

Osserviamo che \tilde{Y}_1 si annulla in $3\frac{\pi}{2}$ e $5\frac{\pi}{2}$, inoltre la derivata rispetto a ϕ_1^* vale:

$$\frac{d\tilde{Y}_1}{d\phi_1^*} = a[2 + b] \sin \phi_1^* \quad (5.116)$$

e per $\phi_1^* \in]3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}[$ tale derivata si annulla nel solo punto 2π . La derivata seconda vale

$$\frac{d^2\tilde{Y}_1}{d\phi_1^{*2}} = a[2 + b] \cos \phi_1^* \quad (5.117)$$

la quale in 2π è positiva.

Da tutto questo segue che la \tilde{Y}_1 ha un minimo in 2π . Ricordando la (5.114) e le posizioni fatte possiamo dunque scrivere che

$$Y_1 \geq \tilde{Y}_1 \geq \tilde{Y}_1(2\pi) = -a(2 + b) \quad \forall \phi_1^* \in]3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}[\quad (5.118)$$

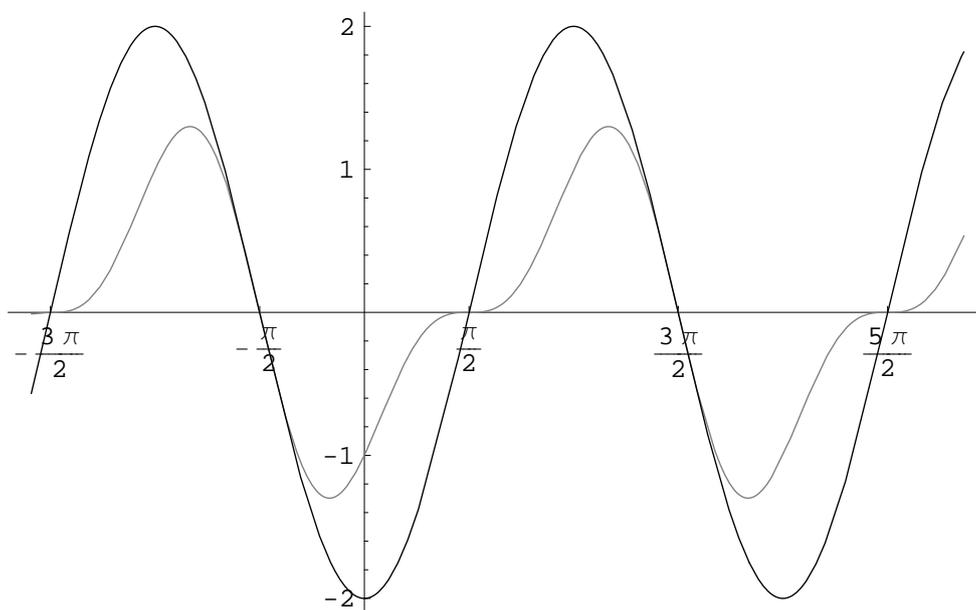


Figura 5.8: La funzione $Y_1(\phi_1^*)$ (in chiaro) e la funzione $\tilde{Y}_1(\phi_1^*)$ (in scuro) per $a = 1$ e $b = 0$.

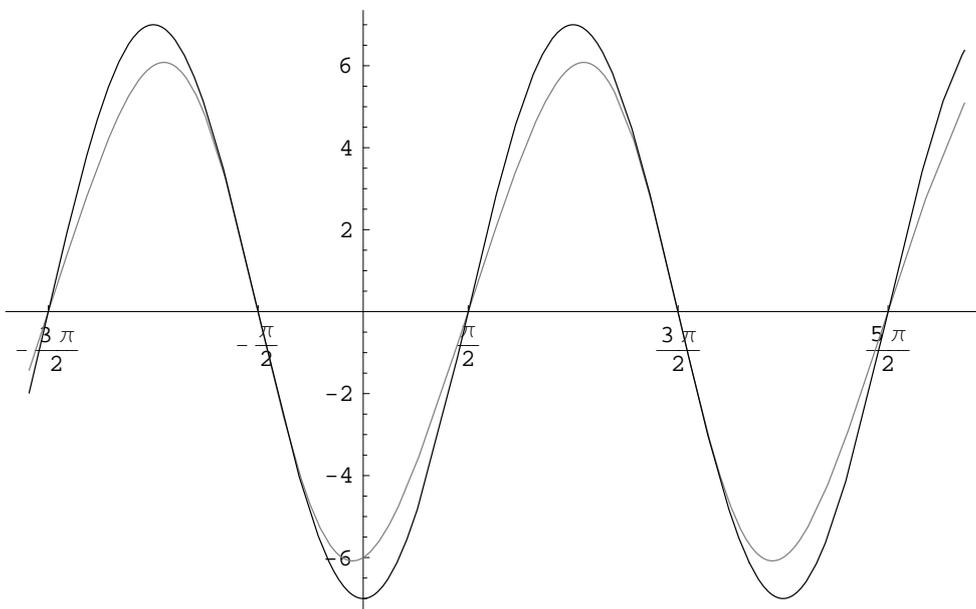


Figura 5.9: La funzione $Y_1(\phi_1^*)$ (in chiaro) e la funzione $\tilde{Y}_1(\phi_1^*)$ (in scuro) per $a = 1$ e $b = 5$.

Come diretta conseguenza si ha che

$$Y(\phi_1^*) = Y_1(\phi_1^*) + Y_2(\phi_1^*) \geq -a(2+b) + Y_2(\phi_1^*) \quad \forall \phi_1^* \in \left] 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2} \right[\quad (5.119)$$

Per la crescita (stretta) di Y_2 possiamo scrivere poi che

$$Y(\phi_1^*) \geq -a(2+b) + (\phi_1^* - \frac{\pi}{2}) \geq -a(2+b) + \pi \quad \forall \phi_1^* \in \left] 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2} \right[\quad (5.120)$$

Se imponiamo che

$$-a(2+b) + \pi > 0 \quad (5.121)$$

siamo certi che per $\phi_1^* \in \left] 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2} \right[$ la Y non si possa mai annullare e che rimane strettamente positiva nell'intervallo considerato.

Dalla (5.121), sostituendo le espressioni di a e b si ottiene

$$\frac{2(\theta_4 g)^2 \left[1 + \frac{\theta_5}{\theta_4} \right]}{\pi} < \frac{k_P}{k_E} \quad (5.122)$$

Dunque, ricapitolando, se vale la precedente condizione, allora Y non si annulla in $\left] 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2} \right[$. Abbiamo visto peraltro che Y non si annulla neppure in $\left] \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2} \right[$ né per $3\frac{\pi}{2}$. Da ciò è facile dedurre che la funzione Y non si annulla²² per nessun valore $\phi_1^* > \frac{\pi}{2}$: infatti Y_1 è una funzione 2π -periodica e Y_2 è una funzione strettamente crescente e dunque si osserva che, per ogni x :

$$\begin{aligned} Y(x + 2k\pi) &= Y_1(x + 2k\pi) + Y_2(x + 2k\pi) = \\ &= Y_1(x) + Y_2(x + 2k\pi) > Y_1(x) + Y_2(x) = \\ &= Y(x) \quad k \geq 1 \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (5.123)$$

da cui segue appunto che Y non si annulla (è positiva²³) per ogni $\phi_1^* > \frac{\pi}{2}$.

Dimostriamo ora che la funzione $Y(\phi_1^*)$ è strettamente negativa per $\phi_1^* < \frac{\pi}{2}$ se vale la condizione (5.121).

Osserviamo che

$$\begin{aligned} Y\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) &= -a \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \left[1 + b - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \right] + \\ &+ \left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -Y\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (5.124)$$

Dalla precedente uguaglianza non è difficile dimostrare per assurdo che Y , essendo positiva a destra di $\frac{\pi}{2}$ in conseguenza del fatto che vale la (5.121)

²²per $b \geq 0$

²³come si vede considerando l'intervallo $\left] \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2} \right[$.

(vera per ipotesi), deve essere (strettamente) negativa a sinistra di $\frac{\pi}{2}$.

Quanto detto vale sia per $b > 0$, sia ponendo $b = 0$. Il parametro b per come è definito risulta essere sempre positivo, tuttavia se convenzionalmente si pone $b = 0$ (nelle espressioni che precedono) si può identificare la condizione (5.109) come un caso particolare della (5.110), con una sensibile semplificazione e snellimento del discorso.

Riportiamo ora alcuni grafici di Y in funzione di ϕ_1^* , al variare dei parametri a e b , assicurandoci che valga la (5.121). Si osservi la Figura 5.10. Il tratto più spesso si riferisce ai valori $a = 1$ e $b = 0$. Effettivamente l'unica intersezione con l'asse delle ascisse si ha per $\frac{\pi}{2}$.

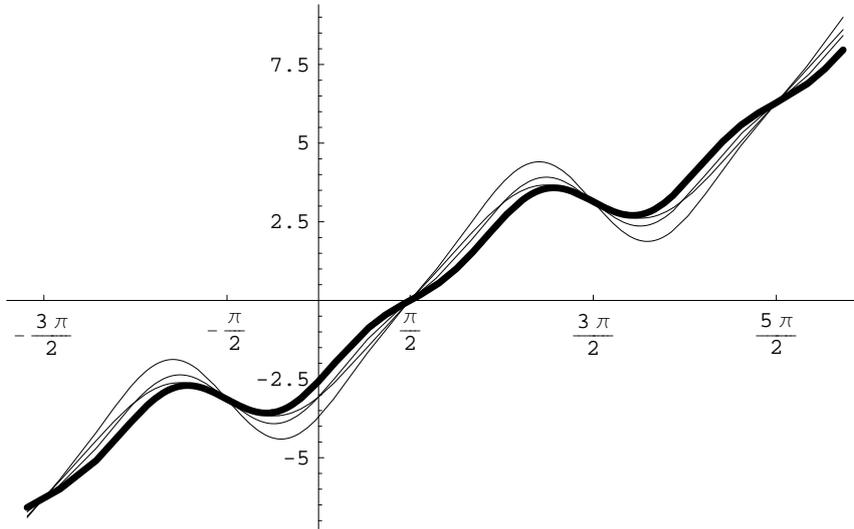


Figura 5.10: Andamenti desiderati di Y in funzione di ϕ_1^* : l'unica intersezione con l'asse delle ascisse si ha in $\frac{\pi}{2}$. Il tratteggio più spesso corrisponde ai parametri $a = 1$ e $b = 0$. Gli altri andamenti sono per $b > 0$.

In definitiva dal discorso fatto si può concludere che se vale la (5.121) allora le (5.109) e (5.110) ammettono la unica soluzione $\phi_1^* = \frac{\pi}{2}$.

Affermiamo allora la seguente

Proposizione 5.2.7 *Se vale la condizione (5.122) allora le (5.104) e (5.105) possono essere verificate solo per $\phi_1^* = \frac{\pi}{2}$. Questo implica che l'unico punto $x_M \in M \setminus N_0^+$ è il punto di equilibrio $(\frac{\pi}{2}, -\pi [+2k\pi], 0, 0)$.*

Infatti la (5.105), potendo essere verificata solo per $\phi_1^* = \frac{\pi}{2}$, implica necessariamente che $\phi_2^* = -\pi (+2k\pi)$. Inoltre $\phi_1 = \phi_1^*$ e $\phi_2 = \phi_2^*$ sono funzioni costanti come a suo tempo dimostrato. Il resto segue facilmente²⁴.

Invece dalla (5.104), tenendo conto che $\phi_1^* = \frac{\pi}{2}$ in conseguenza delle ipotesi fatte, non “emerge” nessuna soluzione non in N_0^+ . Infatti dovrà essere $\phi_2^* = 0 (+2k\pi)$ e dunque tale risultato è da scartare, in quanto avevamo assunto $x_m \in M \setminus N_0^+$. Tale caso non è interessante.

In base al principio di LaSalle (si veda la Proposizione 4.2.10) possiamo allora affermare che tutte le traiettorie, qualora sono limitate, convergono all’insieme M . Tale insieme sarà costituito da N_0^+ e dal solo punto di equilibrio (indesiderato) $(\frac{\pi}{2}, -\pi, 0, 0)$ qualora valga la condizione (5.122). Dovremo ovviamente anche fare in modo che la legge di controllo sia sempre definita (globale), in accordo con la Proposizione 5.2.1 di pagina 104.

Al fine di dimostrare che tutte le traiettorie sono limitate, osserviamo che, in virtù della Definizione 4.2.3 e della Proposizione 4.2.3 la funzione di Lyapunov decresce lungo una qualsiasi traiettoria.

Pertanto dalla (5.52) segue che, dovendo decrescere V , le variabili di stato x_3 e x_1 non possono essere illimitate. Inoltre anche l’energia E non può essere illimitata. Ma allora, considerando l’espressione dell’energia (5.44) si può dimostrare che anche x_4 deve essere limitato.

Resta da dimostrare che x_2 è limitata per ogni traiettoria. Ma visto che ci troviamo in uno spazio di fase cilindrico (“che si morde la coda”) e visto che tutte le funzioni che dipendono dallo stato che definiscono il sistema matematico del Pendubot (e l’energia) rimangono anch’esse sempre limitate (e definite), considereremo applicabile il principio di LaSalle.

In conclusione affermiamo la

Proposizione 5.2.8 *Sia dato il sistema del Pendubot retroazionato, con legge di controllo data da (5.59). Allora se*

$$k_D > 2k_{EG}\theta_1(\theta_4 + \theta_5) \quad (5.125)$$

la legge di controllo è globale e non presenta singolarità.

Inoltre se vale che

$$\frac{2(\theta_4 g)^2 \left(1 + \frac{\theta_5}{\theta_4}\right)}{\pi} < \frac{k_P}{k_E} \quad (5.126)$$

²⁴si tenga anche conto dell’espressione che definisce il sistema matematico del Pendubot e dell’espressione dell’energia nonchè si tengano presenti i risultati ottenuti.

allora il massimo insieme invariante M contenuto in $\{x \in \mathbb{R}^4 : \dot{V}(x) = 0\}$ conterrà soltanto l'insieme $V_0 = N_0^+$ dato da (5.71) più un unico punto di equilibrio $(\frac{\pi}{2}, -\pi, 0, 0)$ al di fuori di N_0^+ . La funzione di Lyapunov è data da (5.52) e $\dot{V} = -x_3^2$.

Inoltre risulta applicabile il principio di LaSalle e possiamo affermare che ogni traiettoria del Pendubot retroazionato converge ad M , intendendo con questo che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi(t, \xi), M) = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^4 \quad (5.127)$$

Inoltre, come vedremo nel seguito, nelle ipotesi fatte, il punto di equilibrio $(\frac{\pi}{2}, -\pi [+2k\pi], 0, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$, forma un punto di equilibrio instabile (anche se non è in generale una sorgente). Sarà dunque possibile realizzare lo *swing up* del Pendubot per tutte quelle condizioni iniziali che non appartengono alla varietà stabile di $x_{E_{IND}} = (\frac{\pi}{2}, -\pi, 0, 0)$.

Le costanti k_E, k_D, k_P devono essere positive.

Al fine di completare il discorso osserviamo che le traiettorie che convergono verso N_0^+ diventeranno sempre più “aderenti” a tale insieme (formato da due traiettorie omocline più il punto di equilibrio $(\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$). Pertanto l'evoluzione del sistema, in tal caso, diventerà sempre più simile a quella relativa alle omocline in questione. Tuttavia lo stato di equilibrio $(\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ non verrà mai avvicinato in modo definitivo: la traiettoria continuerà a riallontanarsi dall'equilibrio $(\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ per poi riavvicinarsi di nuovo successivamente ad esso, questa volta più in prossimità ed in maniera più duratura.

Un controllore locale potrà allora realizzare lo *swing up* del Pendubot, stabilizzandolo attorno alla posizione di equilibrio instabile con tutti e due i bracci verso l'alto (stabilizzazione attorno alla *top position*). Infatti quando il Pendubot si troverà in uno stato sufficientemente prossimo all'equilibrio $(\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ (l'equilibrio relativo alla *top position*), lo stato del sistema stesso potrà entrare nel *bacino di attrazione*²⁵ di un controllore locale capace di stabilizzare il Pendubot attorno alla *top position*. E pertanto si realizza lo *swing up*. Ricordiamo peraltro che consideriamo verificata la condizione (5.125) e la condizione (5.126) per garantire l'esistenza globale della legge di controllo e per garantire che o il sistema converge verso N_0^+ (e dunque si rende possibile lo *swing up*, come visto) o il sistema converge verso l'equilibrio indesiderato $(\frac{\pi}{2}, -\pi, 0, 0)$.

²⁵l'insieme di tutti i punti (appartenenti all'insieme di definizione di un sistema dinamico) tali che le traiettorie relative a tali punti convergono (tutte) verso un dato stato di equilibrio forma il cosiddetto *bacino di attrazione* dello stato di equilibrio considerato.

In realtà, però, valendo la (5.125) e la (5.126), il punto di equilibrio indesiderato $(\frac{\pi}{2}, -\pi, 0, 0)$ risulta essere instabile e dunque solo per particolari condizioni iniziali il sistema potrà convergere verso tale equilibrio e comunque, basta una minima perturbazione per fare sì che il sistema converga anche in questo caso a N_0^+ .

Vale infatti la seguente

Proposizione 5.2.9 *Sia data la legge di controllo (5.59) con costanti k , al solito, positive; se valgono la (5.125) e la (5.126) allora il punto di equilibrio $x_{E_{IND}} = (\frac{\pi}{2}, -\pi, 0, 0)$ risulta essere instabile, anche se non necessariamente esso è una sorgente²⁶.*

Dimostrazione: cominciamo con l'osservare che $N_0^+ = V_0$ è un insieme (positivamente) invariante e stabile e che inoltre ogni traiettoria che parta sufficientemente vicino a $V_0 = N_0^+$ deve convergere a $V_0 = N_0^+$ stesso.

La prima parte della precedente affermazione discende chiaramente dal discorso fatto, e dalla Proposizione 4.2.11, nonché dalla Proposizione 4.2.5.

Inoltre una traiettoria che parta nelle vicinanze di V_0 deve convergere a $V_0 = N_0^+$ stesso. Infatti se vale la (5.125) e la (5.126) una traiettoria che parta vicino a V_0 converge o a $V_0 = N_0^+$ o a $x_{E_{IND}} = (\frac{\pi}{2}, -\pi, 0, 0)$. Ma la convergenza a quest'ultimo punto è impossibile in quanto essa comporterebbe un incremento di V lungo una traiettoria, il che è impossibile.

Infatti se per assurdo esistesse una traiettoria che converge a $x_{E_{IND}}$ partendo sufficientemente vicino a V_0 , per tale traiettoria $V(\phi(t, \xi))$ passerebbe da un valore prossimo²⁷ a zero (per la continuità di V) a $V(x_{E_{IND}}) > 0$ e questo appunto è impossibile.

Si ha chiaramente che $V(x_{E_{IND}}) > 0$, infatti:

$$V(x_{E_{IND}}) = \frac{k_E}{2}(E(x_{E_{IND}}) - E_{top})^2 > 0$$

poichè $E(x_{E_{IND}}) \neq E_{top}$ come è immediato verificare.

Pertanto nessuna traiettoria che parta da un intorno sufficientemente piccolo di $V_0 = N_0^+$ può convergere verso $x_{E_{IND}}$ ed allora in virtù della Proposizione 5.2.8 tutte le traiettorie vicine a $N_0^+ = V_0$ convergono verso V_0 stesso.

Da ciò e dal fatto che V_0 è stabile per la Proposizione 4.2.11 segue che

Proposizione 5.2.10 *L'insieme $N_0^+ = V_0$ è asintoticamente stabile per il sistema del Pendubot retroazionato, valendo la (5.125) e la (5.126).*

²⁶come si mostra con un controesempio opportuno e con facili considerazioni. Si veda anche la parte sulle simulazioni numeriche.

²⁷quanto si vuole

Continuiamo ora la Dimostrazione originaria della Proposizione 5.2.9.

In base ai risultati ottenuti, essendo cioè $V_0 = N_0^+$ A.S. ed invariante, per la Proposizione 4.2.12 possiamo affermare che la regione di attrazione $R_{A_{V_0}}$ di $V_0 = N_0^+$, definita secondo la Definizione 4.2.5, è un insieme aperto e (positivamente) invariante. Inoltre $\partial R_{A_{V_0}}$ è formato da traiettorie ed è esso stesso un insieme (positivamente) invariante.

Ricordiamo peraltro che supponiamo valide la (5.125) e la (5.126).

Ora, non può essere $R_{A_{V_0}} = \mathbb{R}^4$ poiché sicuramente $x_{E_{IND}} = (\frac{\pi}{2}, -\pi, 0, 0)$ non appartiene a $R_{A_{V_0}}$. Questo implica anche che $\partial R_{A_{V_0}} \neq \emptyset$, come non è difficile mostrare. Infatti o $x_{E_{IND}}$ è esterno a $R_{A_{V_0}}$ oppure non lo è: in quest'ultimo caso $x_{E_{IND}} \in \partial R_{A_{V_0}}$, mentre nel primo caso il complementare di $R_{A_{V_0}}$ è comunque non vuoto e contiene almeno un intorno (di misura non nulla) di $x_{E_{IND}}$ e pertanto anche $\partial R_{A_{V_0}}$ (insieme aperto) deve avere una frontiera non vuota.

Consideriamo allora un punto $x_F \in \partial R_{A_{V_0}}$: poiché $\partial R_{A_{V_0}}$ è un insieme invariante si dovrà avere che

$$\phi(t, x_F) \in \partial R_{A_{V_0}} \quad \forall t \geq 0 \quad (5.128)$$

Inoltre i punti di $\partial R_{A_{V_0}}$ non appartengono a $R_{A_{V_0}}$ essendo tale insieme aperto. Pertanto, come si vede facilmente in base a quanto detto

$$\phi(t, x_F) \notin R_{A_{V_0}} \quad t \geq 0$$

e di conseguenza $\phi(t, x_F)$ non può tendere a $N_0^+ = V_0$. Ma allora in virtù della Proposizione 5.2.8 dovrà essere vero che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x_F) = x_{E_{IND}} = \left(\frac{\pi}{2}, -\pi, 0, 0 \right) \quad (5.129)$$

e per la (5.128) si conclude allora facilmente che $\text{dist}(x_{E_{IND}}, \partial R_{A_{V_0}}) = 0$, come si può mostrare per assurdo.

Osservando tutto questo si deduce facilmente²⁸ che $x_{E_{IND}}$ non può essere esterno a $R_{A_{V_0}}$ ed allora, non potendo chiaramente neppure essere interno, si conclude che

$$x_{E_{IND}} \in \partial R_{A_{V_0}} \quad (5.130)$$

Quindi $x_{E_{IND}}$ deve essere instabile.

Infatti in ogni intorno di $x_{E_{IND}}$ esiste certamente un punto ν appartenente a $R_{A_{V_0}}$ e dunque in ogni intorno di $x_{E_{IND}}$ esiste un punto ν t.c. $\phi(t, \nu) \rightarrow N_0^+$

²⁸sempre procedendo per assurdo

e dunque la traiettoria relativa a ν si allontana da $x_{E_{IND}}$ e quindi $x_{E_{IND}}$ è *instabile*.

Tale risultato può essere mostrato anche in altro modo: ammettiamo per assurdo che $x_{E_{IND}}$ sia stabile: allora o è A.S. o è S.S.

Se $x_{E_{IND}}$ fosse A.S. allora, in virtù della Proposizione 4.2.12 (vedi anche Lemma 3.2 di [10]), la regione di attrazione di $x_{E_{IND}}$, $R_{A_{x_{E_{IND}}}}$ sarebbe un insieme aperto.

Ma

$$R_{A_{x_{E_{IND}}}} \cup R_{A_{V_0}} = \mathbb{R}^4$$

in virtù della Proposizione 5.2.8 nonché della Definizione 4.2.5. Questo implica che $R_{A_{x_{E_{IND}}}}$ deve essere un insieme chiuso, essendo $R_{A_{V_0}}$ aperto. E questo è assurdo.

Dunque $x_{E_{IND}}$ non è A.S. e può essere al più S.S. Mostriamo adesso che anche questo è assurdo.

La S.S. implica che $\forall \epsilon > 0 \exists \delta$ t.c.

$$|x_{E_{IND}} - \xi| < \delta \Rightarrow |\phi(t, \xi) - x_{E_{IND}}| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

e che, quale che sia δ

$$|x_{E_{IND}} - \xi| < \delta \not\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, \xi) = x_{E_{IND}}$$

La prima di tali affermazioni ci assicura che $\phi(t, \xi)$ rimane limitato in un intorno piccolo quanto si vuole del punto di equilibrio indesiderato $x_{E_{IND}}$, purché ξ sia sufficientemente vicino a tale punto di equilibrio.

Inoltre esisterà sempre un punto ξ^* vicino quanto si vuole a $x_{E_{IND}}$ e t.c. $\phi(t, \xi^*)$ non converge a $x_{E_{IND}}$, come si deduce facilmente dalle affermazioni fatte²⁹.

Ossia, si può scegliere ξ^* vicino a $x_{E_{IND}}$ in modo t.c. $\phi(t, \xi)$ rimanga quanto si vuole nelle vicinanze di $x_{E_{IND}}$ ($\forall t \geq 0$), ma senza tendere a $x_{E_{IND}}$ stesso.

Ma questo è assurdo poichè $\phi(t, \xi)$ o tende a $x_{E_{IND}}$ o tende a $V_0 = N_0^+$ (non rimanendo in tal caso in un intorno di $x_{E_{IND}}$ per ogni $t \geq 0$), per la Proposizione 5.2.8 e le sue implicazioni.

Per cui $\phi(t, x^*)$ se non tende al punto di equilibrio indesiderato $x_{E_{IND}}$ deve tendere a N_0^+ e dunque non può rimanere in un intorno³⁰ del punto

²⁹Si ha per ipotesi S.S. ma non A.S.

³⁰scelto piccolo a piacere

di equilibrio indesiderato stesso. E questo contraddice quanto affermato in precedenza e porta ad un assurdo.

Dunque x_{EIND} non può essere S.S. e deve essere instabile.

Per mostrare infine che x_{EIND} non è in generale una sorgente basta fare un controesempio, molto facile da trovare. A tale proposito si veda il Capitolo sulle simulazioni numeriche relative al Pendubot.

Con questo la Proposizione 5.2.9 risulta dimostrata. \square

Per concludere osserviamo che è sempre possibile trovare tre costanti positive k_E, k_D, k_P che soddisfano le (5.125) e (5.126). Fissato k_E , infatti, è sempre possibile trovare $k_D > 0$ che verifichi la (5.125), come si vede immediatamente. Inoltre anche l'individuazione di k_P non presenta alcuna difficoltà: infatti la (5.126) si può riscrivere come

$$k_P > k_E \frac{2(\theta_4 g)^2 \left(1 + \frac{\theta_5}{\theta_4}\right)}{\pi} \quad (5.131)$$

Pertanto affermiamo la seguente

Proposizione 5.2.11 *È sempre possibile individuare tre costanti positive k_E, k_D, k_P tali da rendere vera la (5.125) e la (5.126) e pertanto è sempre possibile realizzare un controllore tale che il Pendubot retroazionato converga verso $V_0 = N_0^+$ a partire da qualsiasi condizione iniziale eccetto quelle appartenenti alla varietà stabile di $(\frac{\pi}{2}, -\pi [+2k\pi], 0, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$. Dunque è sempre possibile (con l'ausilio anche di un controllore locale, come visto) realizzare un controllore capace di effettuare lo swing up del Pendubot a partire da qualsiasi condizione iniziale del sistema eccetto quelle appartenenti alla varietà stabile di $(\frac{\pi}{2}, -\pi [+2k\pi], 0, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$. Tuttavia essendo $(\frac{\pi}{2}, -\pi, 0, 0)$ instabile, basterà una minima perturbazione per fare (eventualmente) convergere il sistema verso l'insieme N_0^+ , come desiderato.*

Scelte le costanti positive k_E, k_D, k_P in accordo con la (5.125) e con la (5.126), ossia con la (5.131), la legge di controllo che definisce il controllore in questione sarà chiaramente data da (5.59).

La precedente Proposizione va a completare il contenuto della Proposizione 5.2.8. Si tenga presente anche la Figura 5.6.

Capitolo 6

Simulazioni numeriche relative al Pendubot

6.1 Introduzione

Al fine di corroborare la validità dei risultati teorici ottenuti nella Sezione 5.2 ci proponiamo ora di effettuare delle simulazioni numeriche relativamente al sistema del Pendubot, mediante il software Mathematica. La maggior parte delle Figure e dei grafici ottenuti verrà presentata volutamente in bianco e nero, affinché non vi sia perdita di informazioni qualora il presente scritto, distribuito per via informatica, venisse stampato con una stampante in bianco/nero. Tuttavia alcune Figure saranno presentate ugualmente a colori, in quanto “quando c’è dell’armonia in ciò che incontra l’occhio, lo spirito si rasserena e per ciò stesso la sua attività si avvantaggia” (Aldo Maceri, *Scienza delle Costruzioni*, Accademica, 1988, Prefazione).

Ci riferiremo ad un particolare Pendubot, posto presso il Laboratorio di Robotica del Dipartimento di Informatica e Sistemistica “Antonio Ruberti”, dell’Università La Sapienza di Roma. La fotografia di tale Pendubot è riportata in Figura 6.1 ed in Figura 6.2.

Cercheremo di stabilire quali sono alcuni andamenti tipici e particolarmente significativi delle traiettorie, e valuteremo, in maniera solo euristica, che effetto può avere la variazione di uno dei parametri k_E, k_D, k_P che individuano una particolare legge di controllo.

Cercheremo di capire anche intuitivamente come funziona il controllore stesso.

Gli angoli sono misurati in radianti e tutte le altre unità sono quelle del



Figura 6.1: Il Pendubot presso il D.I.S. “Antonio Ruberti” dell’Università “La Sapienza” di Roma. Notare l’attuatore.

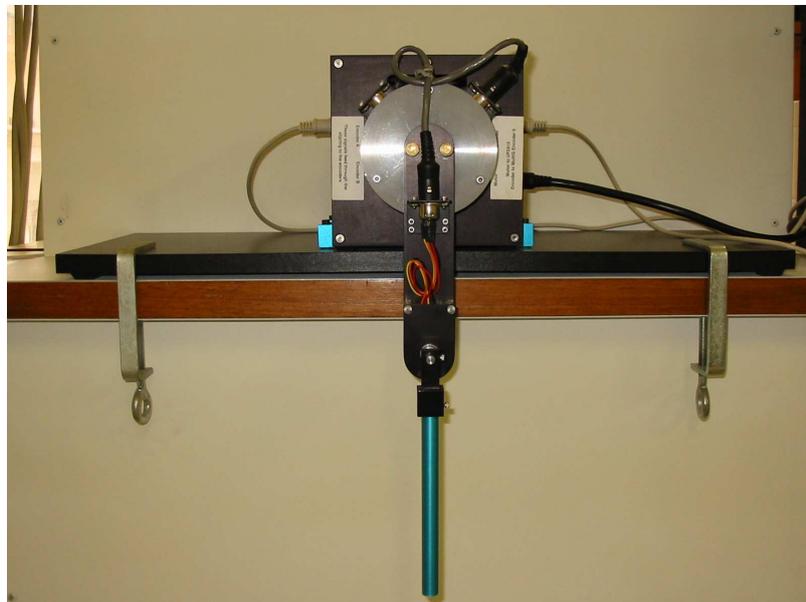


Figura 6.2: Il Pendubot presso il D.I.S. “Antonio Ruberti” dell’Università “La Sapienza” di Roma.

Sistema Internazionale: così il tempo sarà dato in *secondi*, l'energia in *joule*, etc.

6.2 Descrizione del sistema oggetto delle simulazioni.

Consideriamo un Pendubot con i seguenti parametri

$$a_1 = 0.1492 \text{ m} \quad (6.1)$$

$$a_2 = 0.1905 \text{ m} \quad (6.2)$$

$$l_1 = 0.1032 \text{ m} \quad (6.3)$$

$$l_2 = 0.1065 \text{ m} \quad (6.4)$$

$$m_1 = 0.193 \text{ Kg} \quad (6.5)$$

$$m_2 = 0.073 \text{ Kg} \quad (6.6)$$

$$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (6.7)$$

Inoltre

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{-l_1}^{a_1-l_1} x^2 dm = \int_{-l_1}^{a_1-l_1} x^2 \rho dx = \\ &= \frac{m_1}{a_1} \left[\frac{(a_1 - l_1)^3}{3} - \frac{(-l_1)^3}{3} \right] \simeq 0.000515892 \text{ Kg m}^2 \end{aligned} \quad (6.8)$$

essendo $\rho = \frac{m_1}{a_1}$ la densità del primo braccio, supposta costante.

Con analogo procedimento si trova

$$J_2 = \int_{-l_2}^{a_2-l_2} x^2 dm \simeq 0.000230005 \text{ Kg m}^2 \quad (6.9)$$

Per tali valori si trova che

$$\theta_1 = 0.00419641 \text{ Kg m}^2 \quad (6.10)$$

$$\theta_2 = 0.00105799 \text{ Kg m}^2 \quad (6.11)$$

$$\theta_3 = 0.00115996 \text{ Kg m}^2 \quad (6.12)$$

$$\theta_4 = 0.0308092 \text{ Kg m} \quad (6.13)$$

$$\theta_5 = 0.0077745 \text{ Kg m} \quad (6.14)$$

I precedenti parametri si riferiscono ad un Pendubot situato presso il Laboratorio di Robotica del Dipartimento di Informatica e Sistemistica "Antonio

Ruberti” dell’Università “La Sapienza” di Roma.

Non è difficile trovare tre costanti positive k_E, k_D, k_P che soddisfano le ipotesi della Proposizione 5.2.8, ossia che soddisfano la (5.125) e la (5.126), ossia la (5.131). Tali costanti k_E, k_D, k_P , pertanto, sono adatte per realizzare il controllore di swing up del Pendubot.

6.3 Caso di una rapida convergenza ad N_0^+ .

Poniamo ad esempio

$$k_E = 32.151 \quad (6.15)$$

e

$$k_D = 2k_E g \theta_1 (\theta_4 + \theta_5) + 0.01 \simeq 0.112135 \quad (6.16)$$

e

$$k_P = \frac{k_E 2(\theta_4 g)^2 (1 + \frac{\theta_5}{\theta_4})}{\pi} + 0.1 \simeq 2.44151 \quad (6.17)$$

Si verifica facilmente che tali costanti soddisfano le ipotesi di cui si parla.

Stiamo dunque considerando per ora il caso con:

$$\begin{cases} k_E = k_{E_1} \simeq 32.151 \\ k_D = k_{D_1} \simeq 0.112135 \\ k_P = k_{P_1} \simeq 2.44151 \end{cases} \quad (6.18)$$

Effettuando una simulazione numerica con il software Mathematica, a partire dalla condizione iniziale $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ e con i parametri $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$ si ottengono i risultati riportati nelle Figure 6.3, 6.4, 6.5, 6.6 e 6.7, 6.9, nonché 6.8, 6.10 e 6.11, in cui sono graficati gli andamenti nel tempo delle componenti di $\phi(t, \xi)$, la proiezione della traiettoria $O(\xi)$ nel piano $x_2 x_4$, gli andamenti nel tempo dell’energia $E(\phi(t, \xi))$, della funzione di Lyapunov $V(\phi(t, \xi))$ e di $\tau_1(\phi(t, \xi))$, rispettivamente. Si vedano anche le didascalie relative a tali figure.

La situazione presentata è pressochè ideale con una rapida convergenza della traiettoria verso N_0^+ , come si vede in particolare dalle Figure 6.7 e 6.4. Si osservi anche la Figura 6.16, che dà una idea del moto del Pendubot.

Riportiamo inoltre alcuni dettagli: si osservino le Figure 6.12, 6.13, 6.14 e la Figura 6.15.

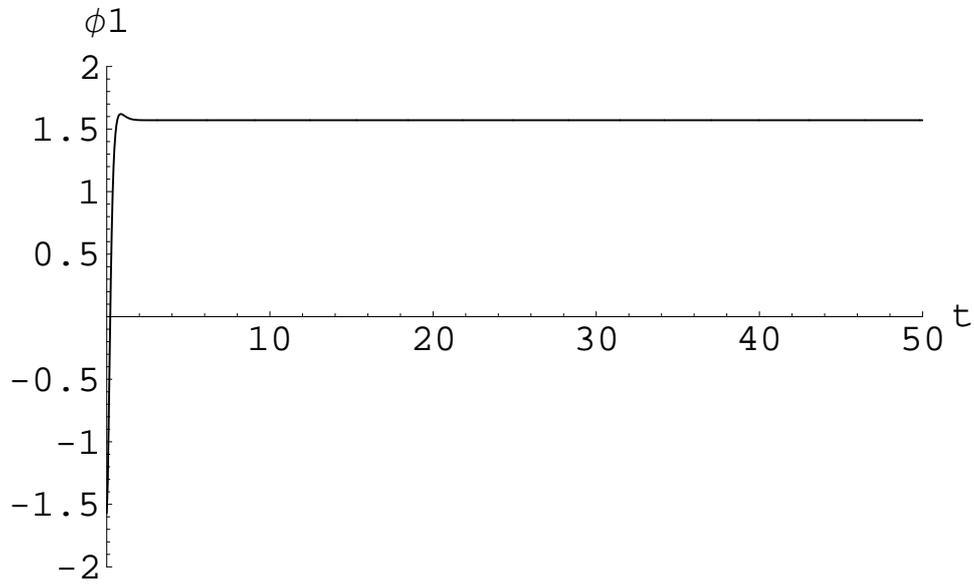


Figura 6.3: L'andamento nel tempo di $\phi_1(t, \xi)$ con $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$.

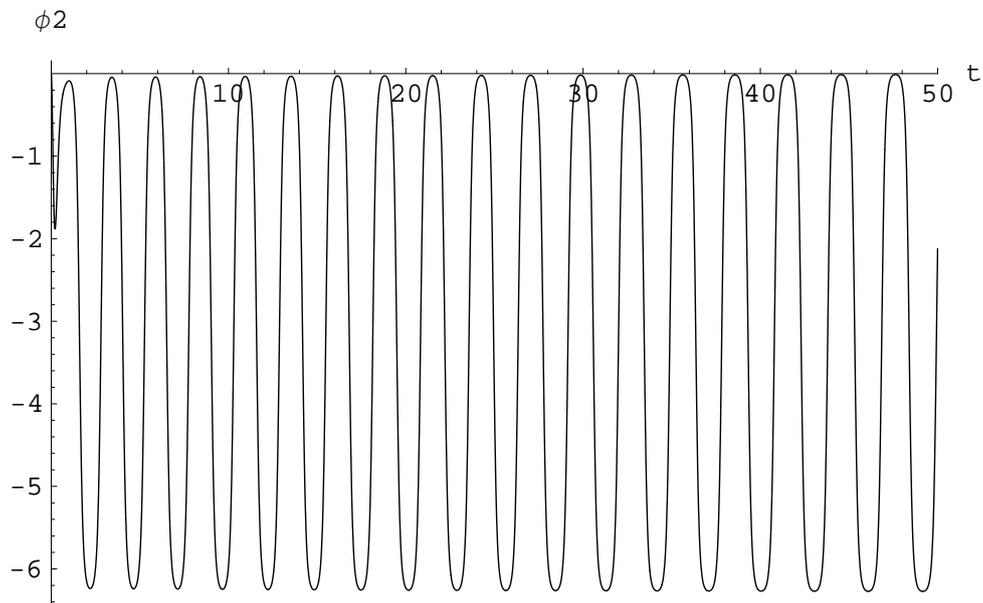


Figura 6.4: L'andamento nel tempo di $\phi_2(t, \xi)$ con $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$.

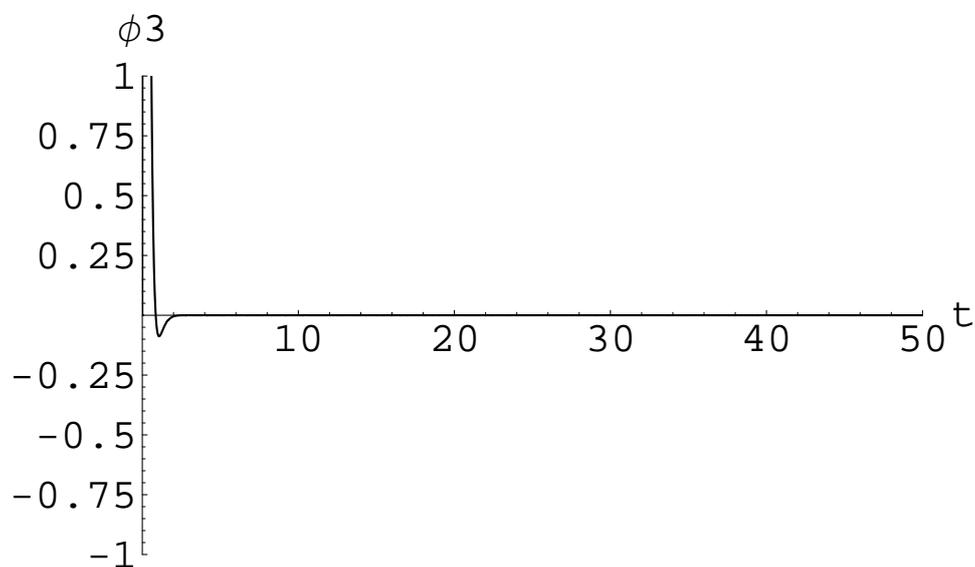


Figura 6.5: L'andamento nel tempo di $\phi_3(t, \xi)$ con $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$.

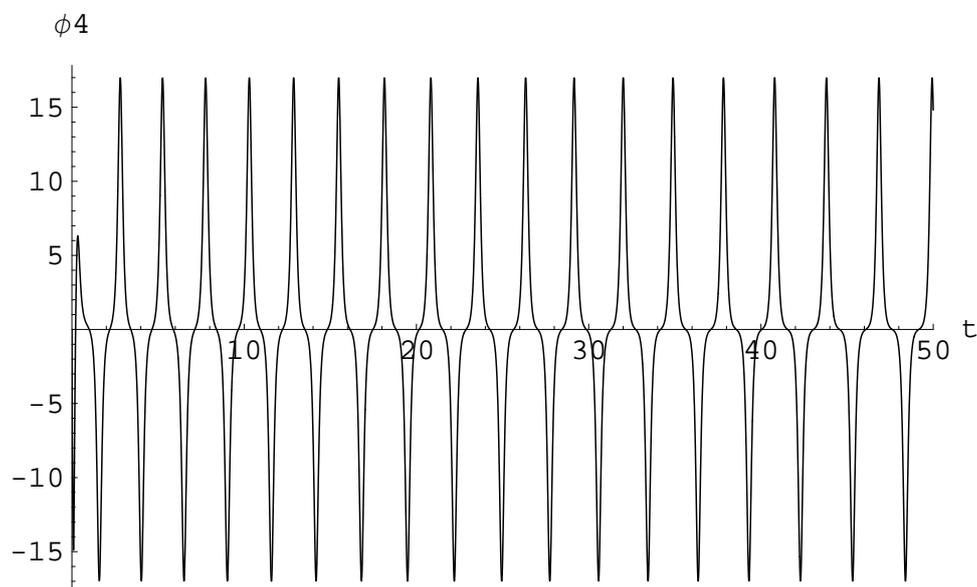


Figura 6.6: L'andamento nel tempo di $\phi_4(t, \xi)$ con $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$.

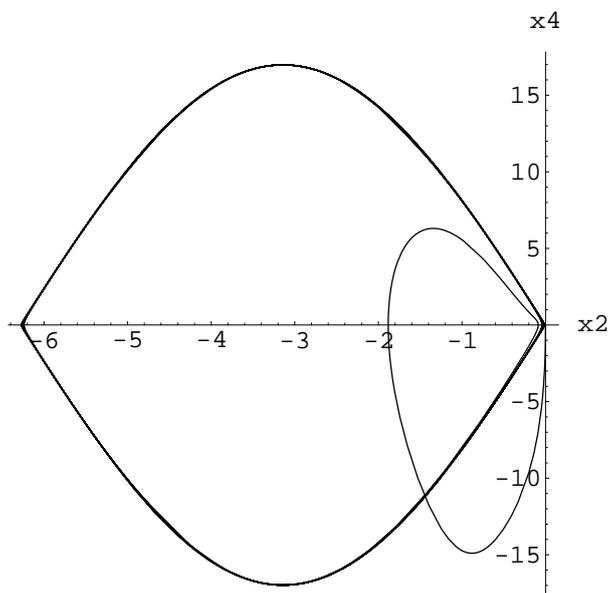


Figura 6.7: La proiezione della traiettoria relativa al punto iniziale $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ nel piano x_2x_4 , per $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$. Notare la (rapida) convergenza verso le omocline. Inoltre $t \in [0, 50]$

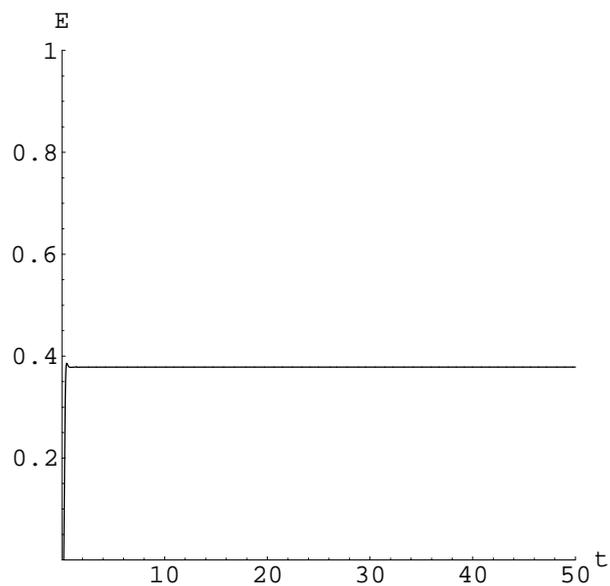


Figura 6.8: L'andamento nel tempo dell'energia relativo allo stato iniziale del sistema $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$.

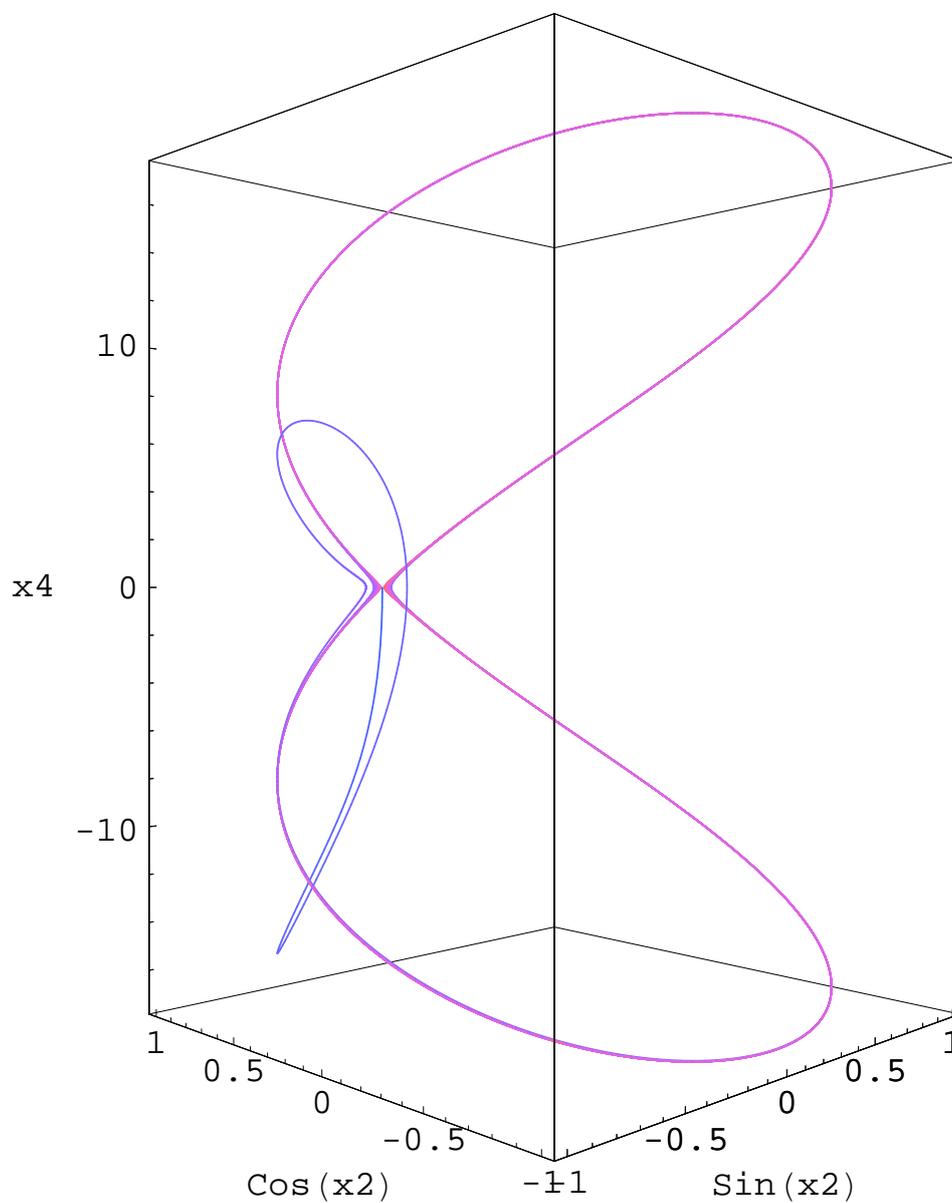


Figura 6.9: La proiezione della traiettoria relativa al punto iniziale $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ sul cilindro x_2x_4 (di raggio unitario), per $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$. Notare la (rapida) convergenza verso le omocline. Per t crescente il colore degrada da tonalità sul blu a tonalità sul rosso (non linearmente). Inoltre $t \in [0, 50]$

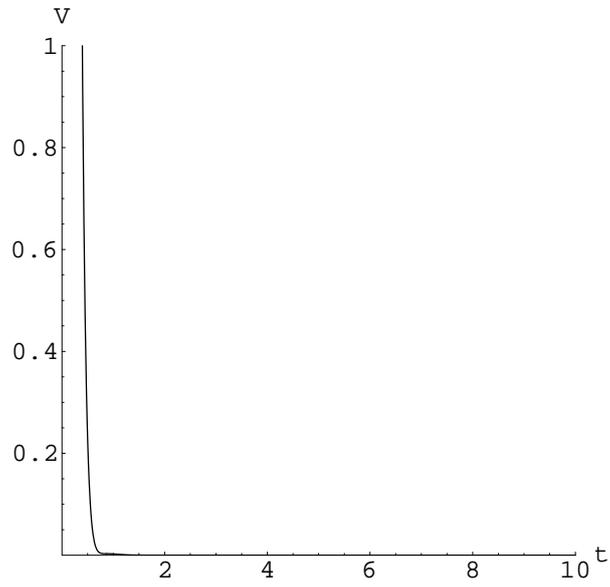


Figura 6.10: L'andamento nel tempo di V relativo allo stato iniziale del sistema $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$.

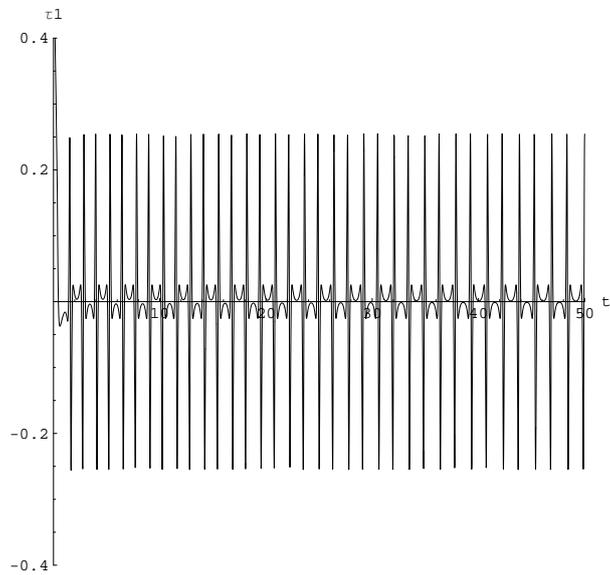


Figura 6.11: L'andamento nel tempo di τ_1 relativo allo stato iniziale del sistema $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$.

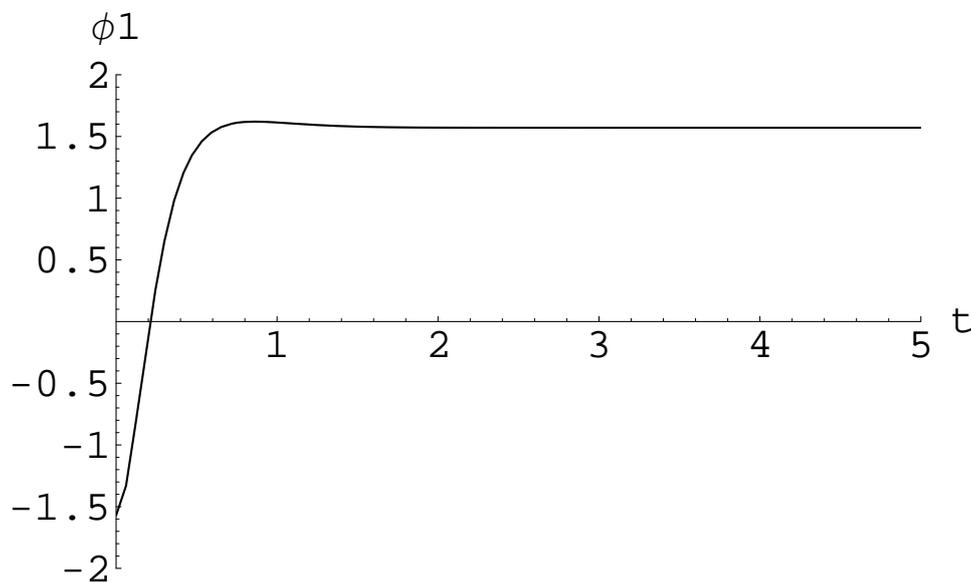


Figura 6.12: L'andamento nel tempo di $\phi_1(t, \xi)$ con $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$, in dettaglio.

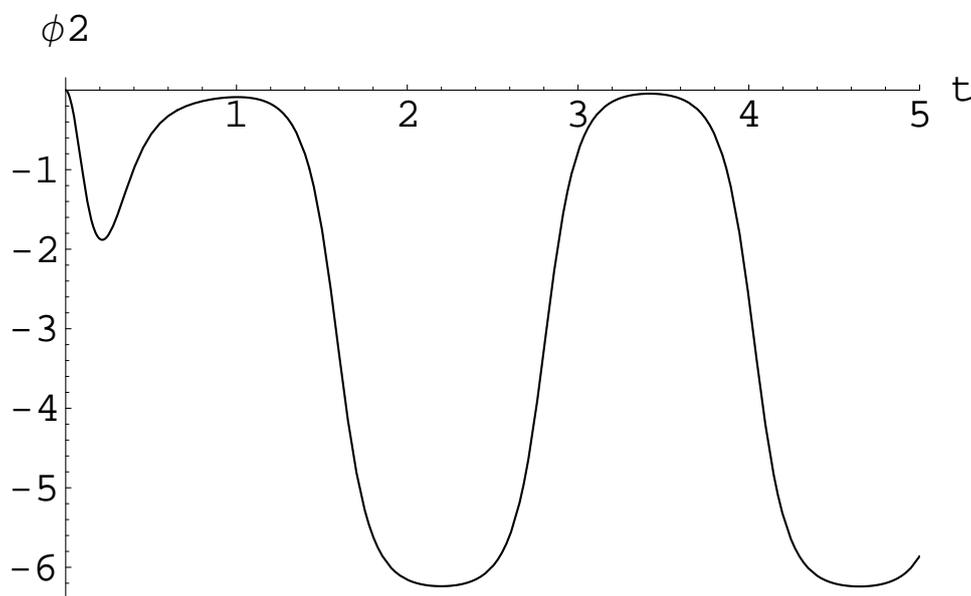


Figura 6.13: L'andamento nel tempo di $\phi_2(t, \xi)$ con $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$, in dettaglio.

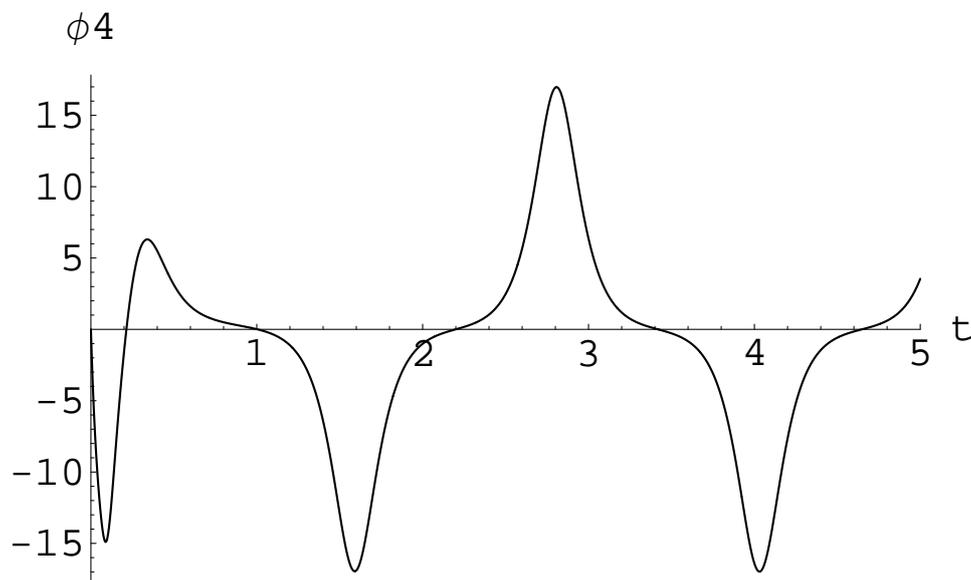


Figura 6.14: L'andamento nel tempo di $\phi_4(t, \xi)$ con $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$, in dettaglio.

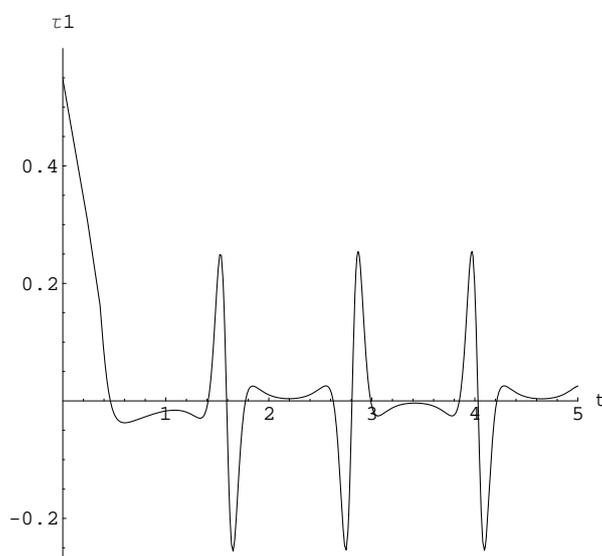


Figura 6.15: L'andamento nel tempo di $\tau_1(\phi(t, \xi))$ con $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$, in dettaglio.

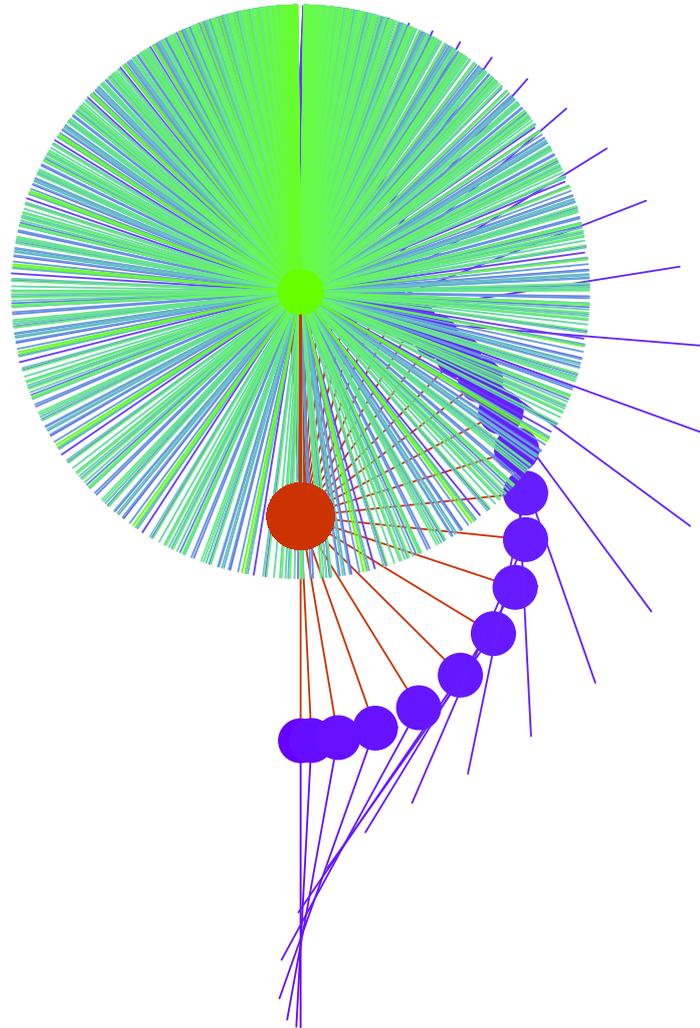


Figura 6.16: Il moto del Pendubot nel tempo: il primo link è in rosso, il secondo link cambia il suo colore, per t crescente, da tonalità sul blu a tonalità sul verde. Si ha $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ e $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$, sempre secondo le (6.18).

6.4 Caso di una lenta convergenza ad N_0^+

Mantenendo per ora i valori delle costanti k , osserviamo l'evoluzione del Pendubot (retroazionato chiaramente) a partire dalla condizione iniziale $(+\frac{\pi}{2}, -\pi + 0.1, 0, 0)$ che si trova nei pressi del punto di equilibrio indesiderato del sistema retroazionato $(\frac{\pi}{2}, -\pi, 0, 0)$. Dunque poniamo, in questo caso, $\xi = (+\frac{\pi}{2}, -\pi + 0.1, 0, 0)$.

Si considerino le Figure 6.17, 6.18, 6.19, 6.20 e 6.21, 6.22 nonché le Figure 6.23, 6.24 e 6.25. Si veda altresì la Figura 6.26 e la 6.27.

Si nota come la convergenza sia molto più lenta.

Si ricordi infine che i valori numerici delle costanti k , ossia $k_{E_1}, k_{D_1}, k_{P_1}$ sono definite in (6.18).

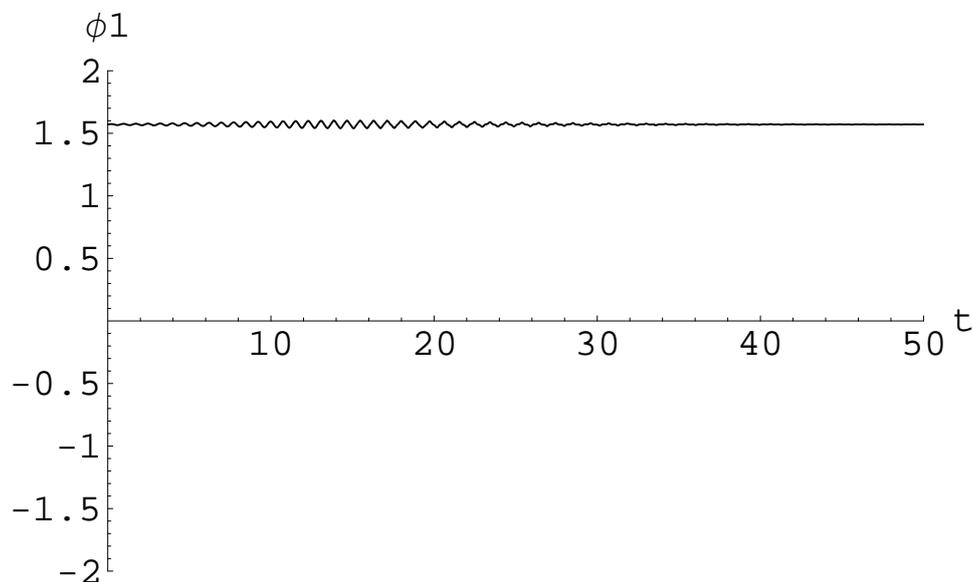


Figura 6.17: L'andamento nel tempo di $\phi_1(t, \xi)$ con $\xi = (+\frac{\pi}{2}, -\pi + 0.1, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_1}, k_D = k_{D_1}, k_P = k_{P_1}$.

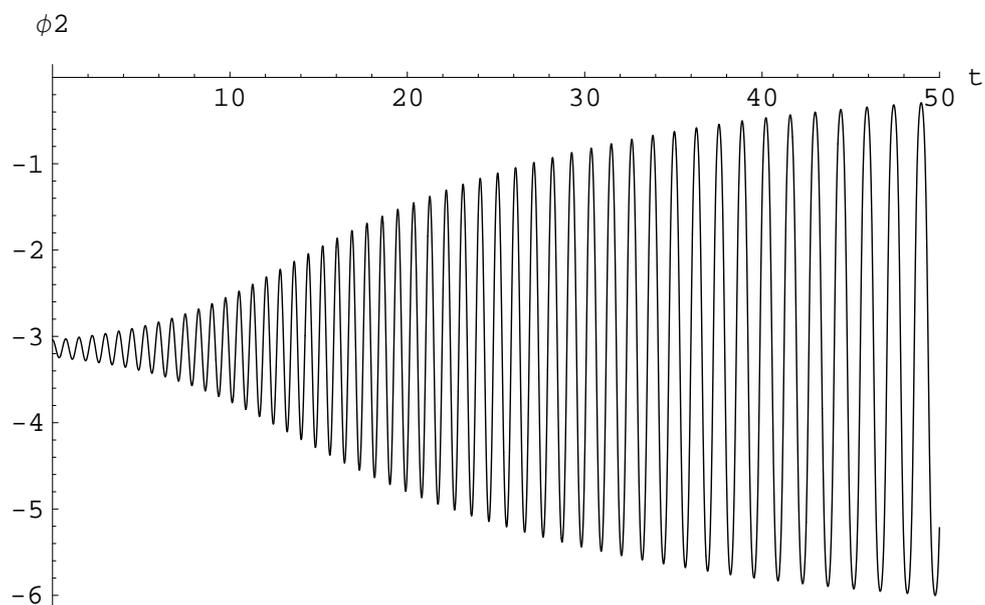


Figura 6.18: L'andamento nel tempo di $\phi_2(t, \xi)$ con $\xi = (+\frac{\pi}{2}, -\pi + 0.1, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$.

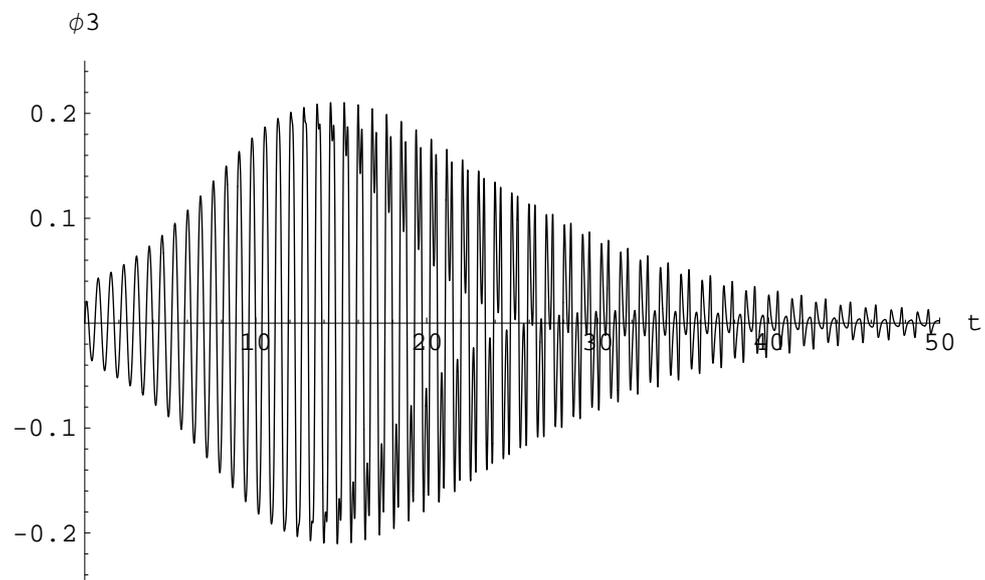


Figura 6.19: L'andamento nel tempo di $\phi_3(t, \xi)$ con $\xi = (+\frac{\pi}{2}, -\pi + 0.1, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$.

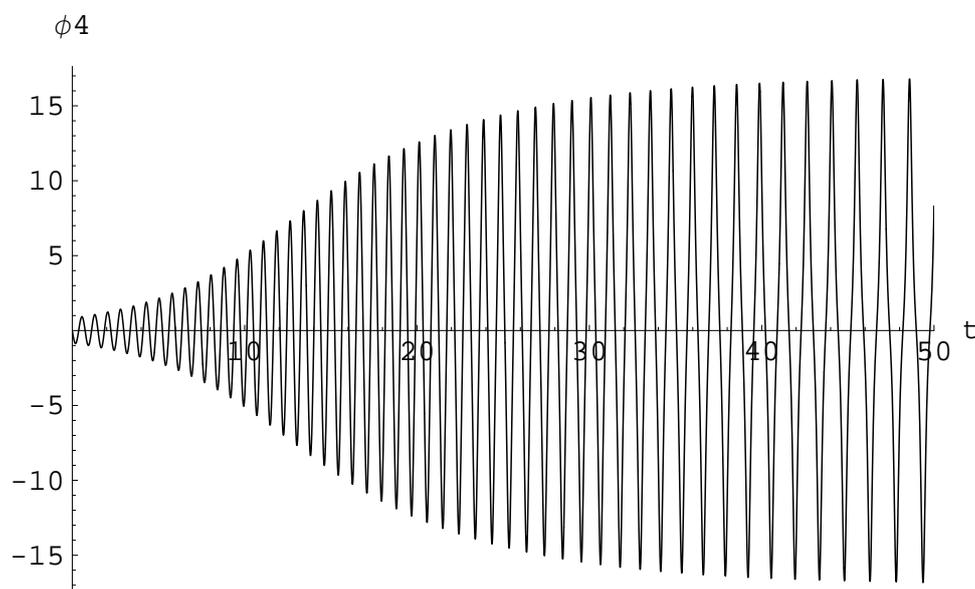


Figura 6.20: L'andamento nel tempo di $\phi_4(t, \xi)$ con $\xi = (+\frac{\pi}{2}, -\pi + 0.1, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$.

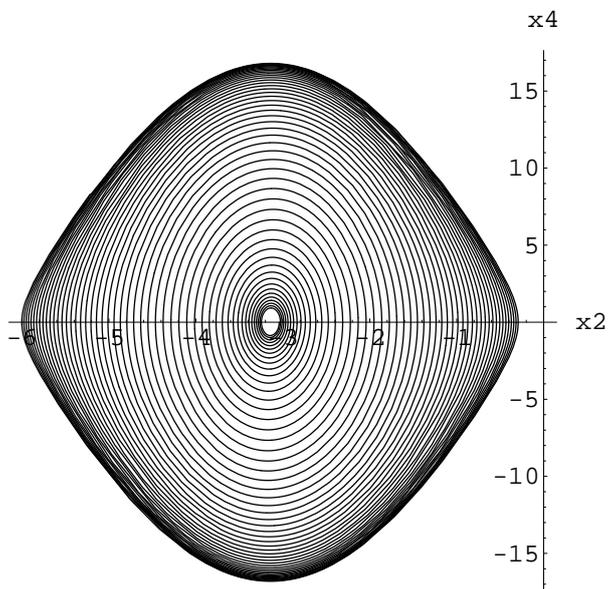


Figura 6.21: La proiezione della traiettoria relativa al punto iniziale $(+\frac{\pi}{2}, -\pi + 0.1, 0, 0)$ nel piano x_2x_4 , per $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$. Notare la lenta convergenza verso le omocline che formano N_0^+ . $t \in [0, 50]$

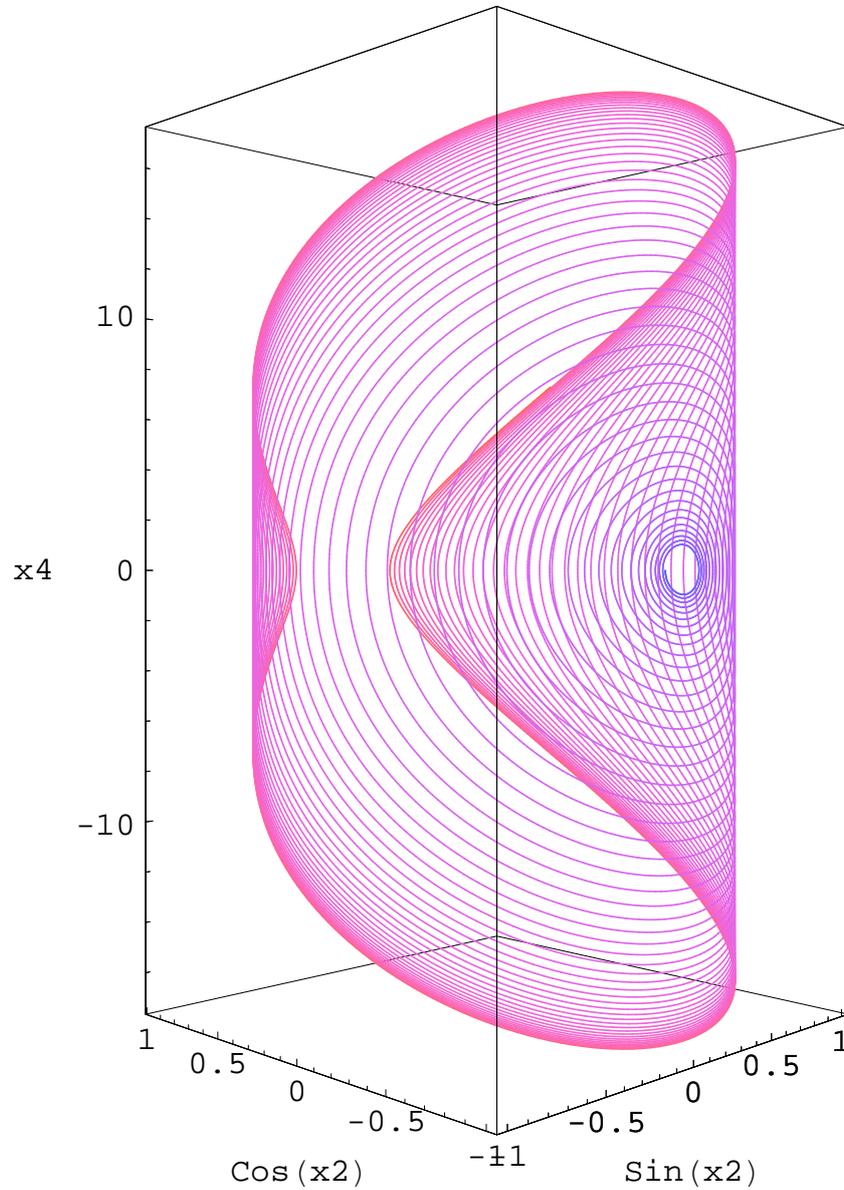


Figura 6.22: La proiezione della traiettoria relativa al punto iniziale $(+\frac{\pi}{2}, -\pi+0.1, 0, 0)$ sul cilindro x_2x_4 (di raggio unitario), per $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$. Notare la non rapida convergenza verso le omocline che formano N_0^+ . Con il passare del tempo il colore tende dal blu verso il viola. Infine $t \in [0, 50]$

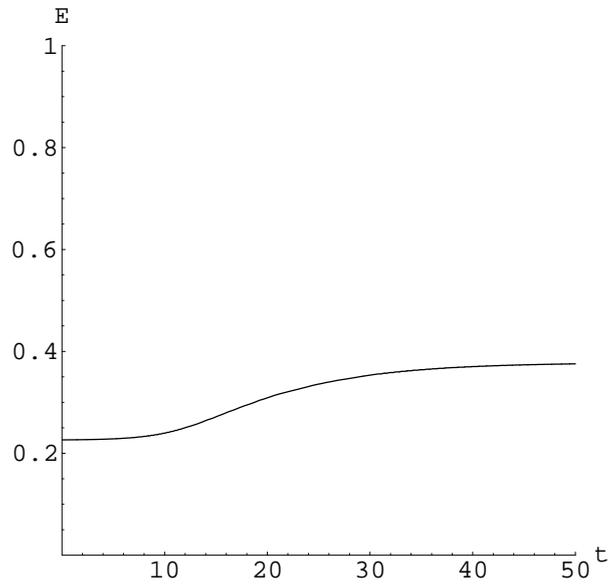


Figura 6.23: L'andamento nel tempo dell'energia relativo allo stato iniziale del sistema $\xi = (+\frac{\pi}{2}, -\pi + 0.1, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$.

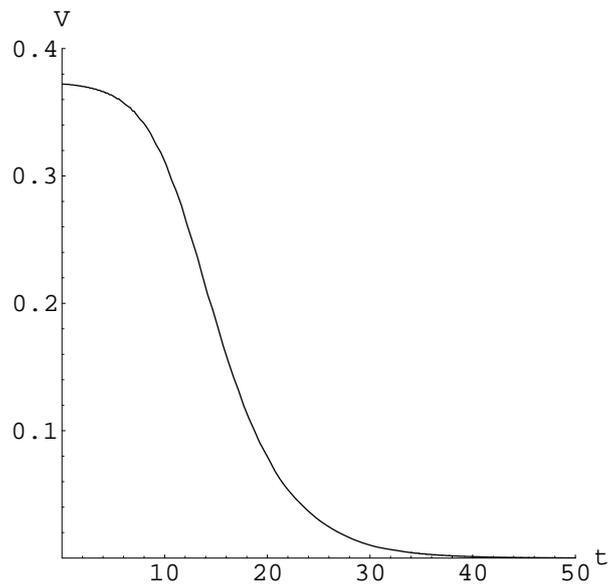


Figura 6.24: L'andamento nel tempo di V relativo allo stato iniziale del sistema $\xi = (+\frac{\pi}{2}, -\pi + 0.1, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$.

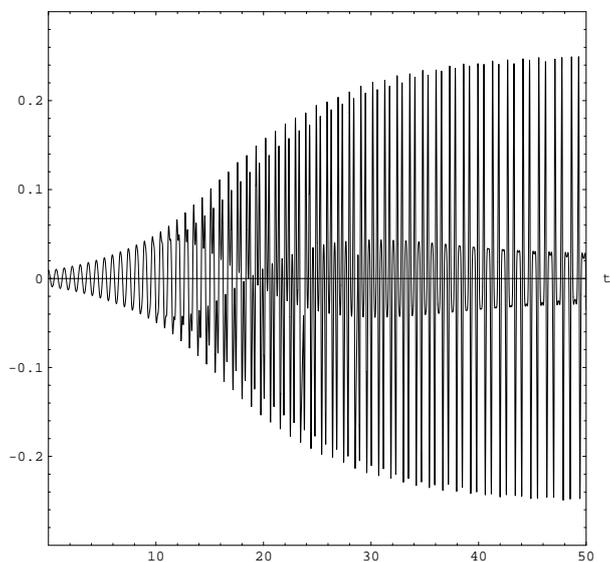


Figura 6.25: L'andamento nel tempo di τ_1 relativo allo stato iniziale del sistema $\xi = (\frac{\pi}{2}, -\pi + 0.1, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$.

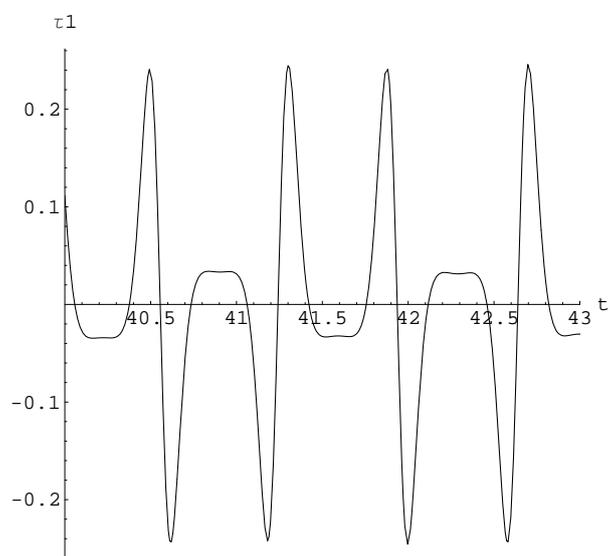


Figura 6.26: L'andamento nel tempo di $\tau_1(\phi(t, \xi))$ nel dettaglio, per $\xi = (\frac{\pi}{2}, -\pi + 0.1, 0, 0)$ e per $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$.

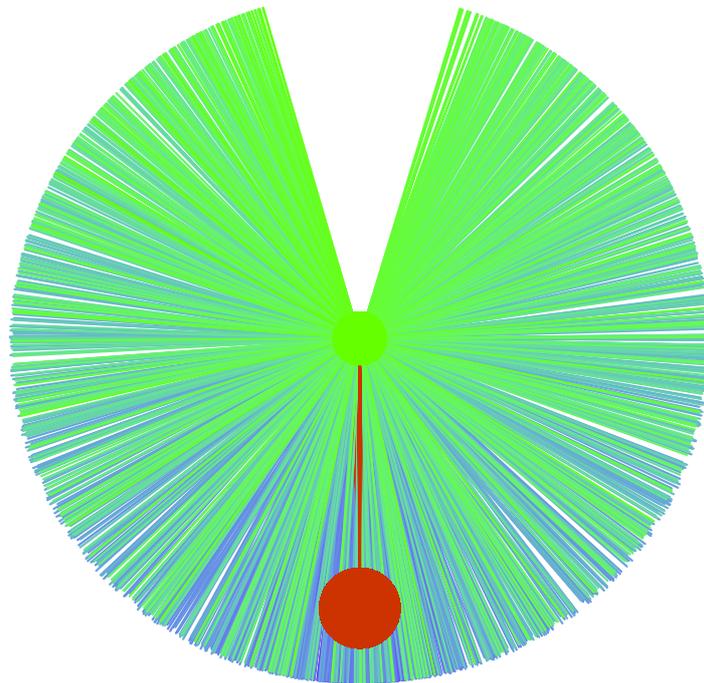


Figura 6.27: Il moto del Pendubot per $\xi = (\frac{\pi}{2}, -\pi + 0.1, 0, 0)$ e per $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$. Il primo link è riportato in rosso, il secondo varia il suo colore nel tempo verso tonalità verdi. Infine $t \in [0, 50]$: si noti la lenta convergenza verso la top position.

6.5 Un'altra evoluzione caratteristica del Pendubot

Consideriamo adesso un altro caso interessante: a tal fine poniamo

$$k_E = k_{E_2} = 50 \quad (6.19)$$

$$k_D = k_{D_2} = 2k_E g \theta_1 (\theta_4 + \theta_5) + 0.01 \simeq 0.168837 \quad (6.20)$$

$$k_P = k_{P_2} = \frac{k_E 2(\theta_4 g)^2 (1 + \frac{\theta_5}{\theta_4})}{\pi} + 0.1 \simeq 3.74143 \quad (6.21)$$

consideriamo inoltre il punto iniziale $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

Si osservino le Figure 6.28, 6.29, 6.30, 6.31, 6.32, 6.33, 6.34, 6.37, 6.35, 6.36, 6.38 e 6.39, 6.40, 6.41, 6.42 e 6.43 e 6.44.

Si nota che la variabile ϕ_2 cresce nel tempo. Ad una analisi superficiale potrebbe sembrare pertanto che l'evoluzione del sistema¹ non tenda verso N_0^+ e questo sarebbe chiaramente un assurdo. Dobbiamo però considerare che in realtà lo spazio di fase è cilindrico in quanto ϕ_2 rappresenta un angolo e pertanto affermare che $\phi_2 = a$ o che $\phi_2 = a + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ è equivalente dal punto di vista della situazione fisica corrispondente, ovvero dello stato fisico del Pendubot. Possiamo anche notare, in alternativa², che se un punto $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in N_0^+$ allora anche $(x_1, x_2 + 2k\pi, x_3, x_4) \in N_0^+$ come si deduce facilmente osservando che nella (5.71) la variabile di stato x_2 compare *solo* come argomento di $\cos x_2$, ossia di una funzione 2π -periodica.

Allora osservando in particolare le Figure 6.36 e 6.38 si deduce facilmente (considerando che i “lobi” delle Figure tendono ad avere gli stessi andamenti quando la ascissa subisce un incremento di $2\pi \simeq 6.28318$) che in realtà la traiettoria ϕ tende ancora ad N_0^+ in accordo con i risultati teorici da noi ottenuti nella precedente sottosezione.

Nel caso considerato il secondo braccio del Pendubot continuerà a girare, anche se dopo ogni giro di 2π radianti avvicinerà la verticale (verso l'alto) con velocità sempre più ridotta, rimanendo sempre più tempo in un intorno della verticale³ stessa: si ricordi che il primo braccio tende in ogni caso a rimanere fermo attorno alla verticale verso l'alto. Per rendersi conto di quanto detto si osservino le Figure, in particolare le Figure 6.33 e 6.33, nonché 6.31 in

¹ovvero la traiettoria $O^+(\xi)$

²ed in modo più rigoroso

³verso l'alto

cui si osserva chiaramente che $\phi_4 = \dot{\phi}_2$ si avvicina, ad ogni giro del secondo braccio, sempre di più all'asse delle ascisse e dunque a zero. In tali momenti ϕ_2 tende a rimanere costante, come si vede dal dettaglio di Figura.

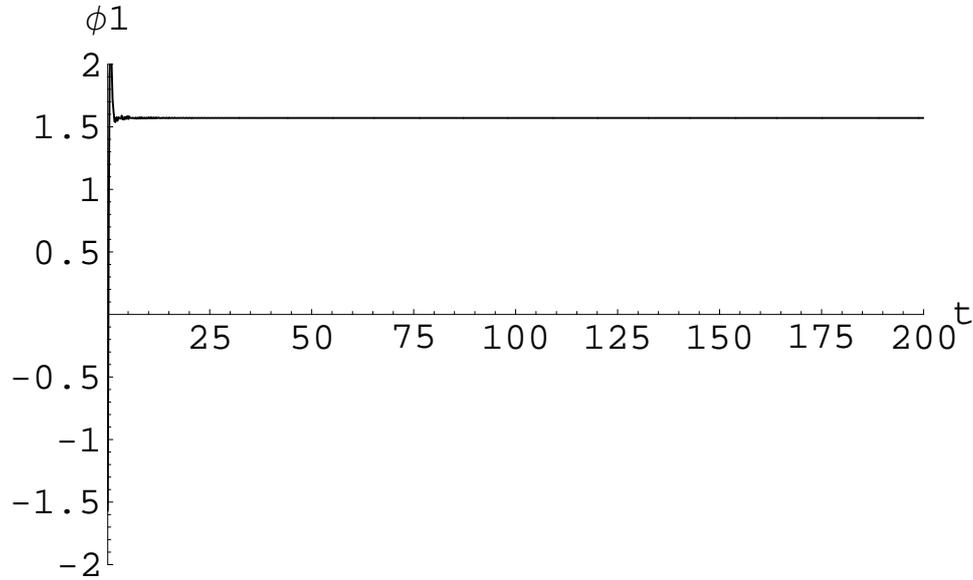


Figura 6.28: L'andamento nel tempo di $\phi_1(t, \xi)$ con $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_2}$, $k_D = k_{D_2}$, $k_P = k_{P_2}$.

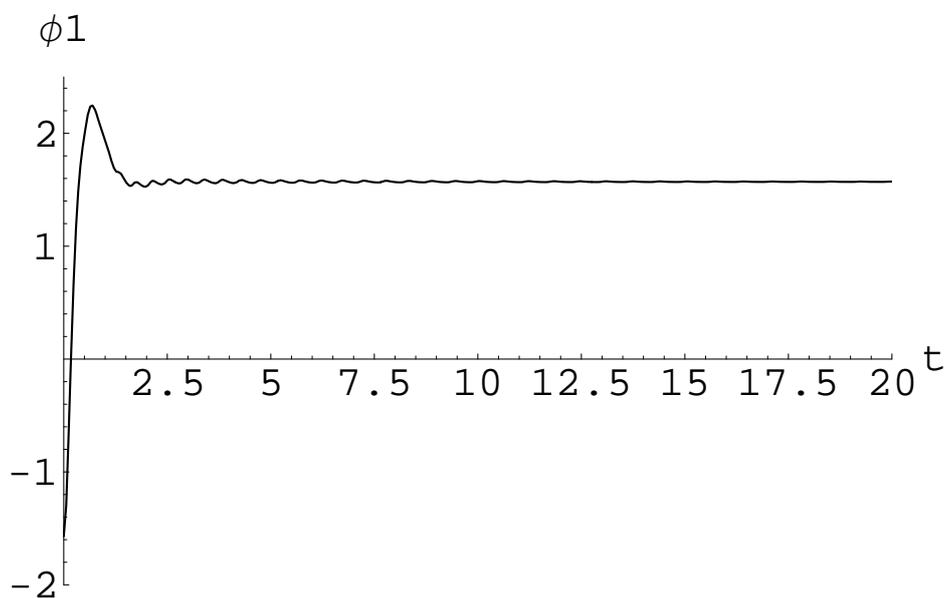


Figura 6.29: L'andamento nel tempo di $\phi_1(t, \xi)$ con $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_2}$, $k_D = k_{D_2}$, $k_P = k_{P_2}$, in dettaglio.

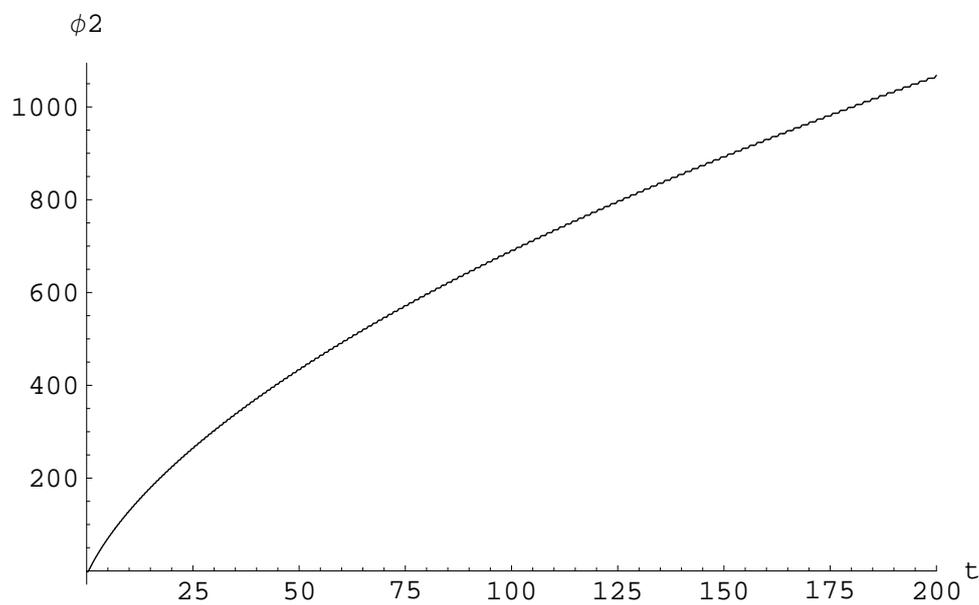


Figura 6.30: L'andamento nel tempo di $\phi_2(t, \xi)$ con $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_2}$, $k_D = k_{D_2}$, $k_P = k_{P_2}$.

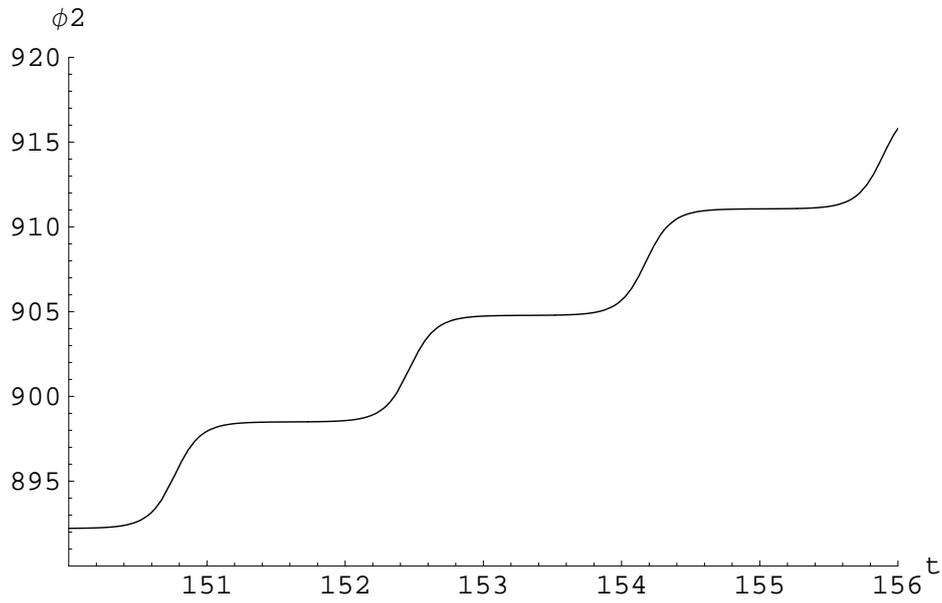


Figura 6.31: L'andamento nel tempo di $\phi_2(t, \xi)$ con $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_2}$, $k_D = k_{D_2}$, $k_P = k_{P_2}$ in dettaglio.

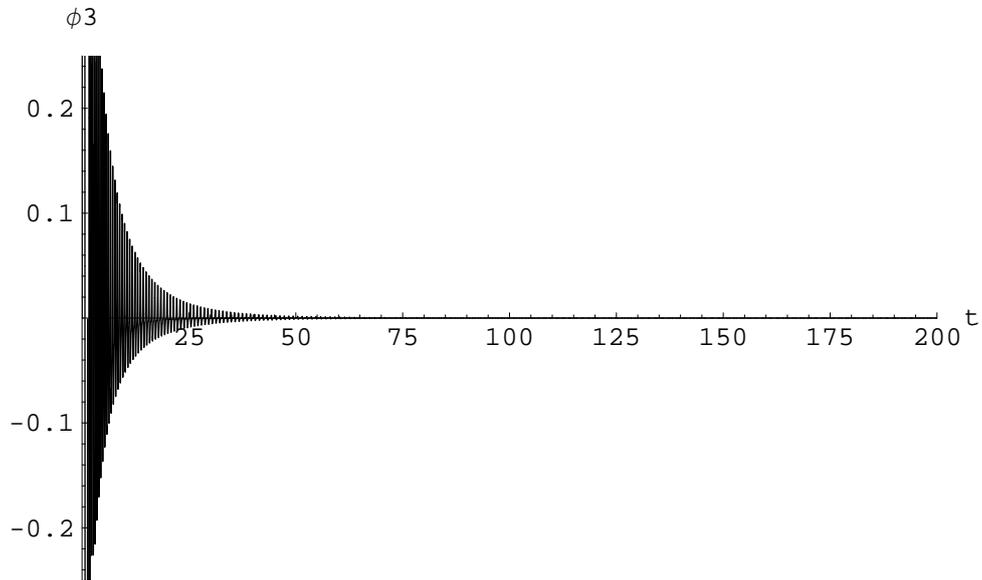


Figura 6.32: L'andamento nel tempo di $\phi_3(t, \xi)$ con $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_2}$, $k_D = k_{D_2}$, $k_P = k_{P_2}$.

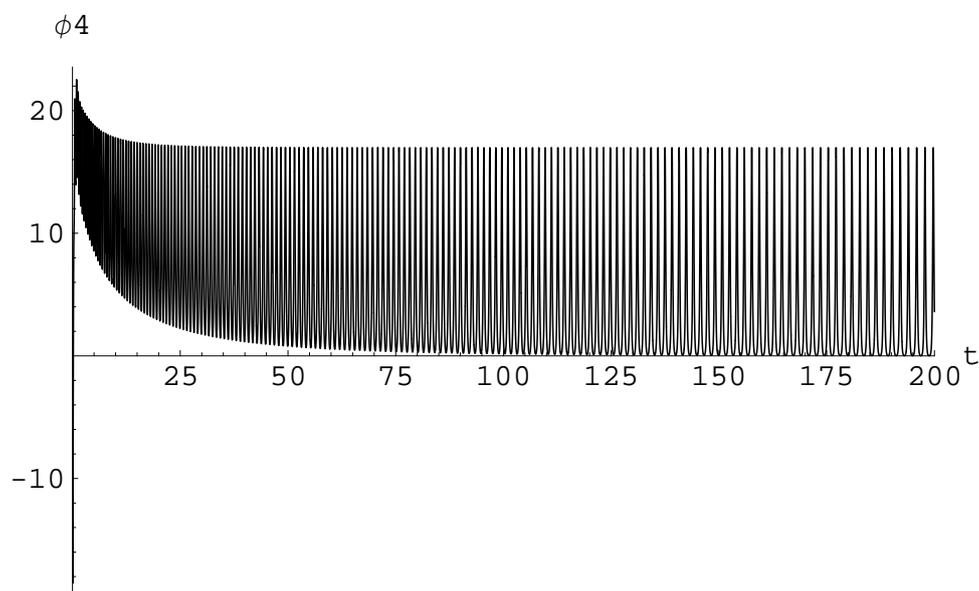


Figura 6.33: L'andamento nel tempo di $\phi_4(t, \xi)$ con $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_2}$, $k_D = k_{D_2}$, $k_P = k_{P_2}$.

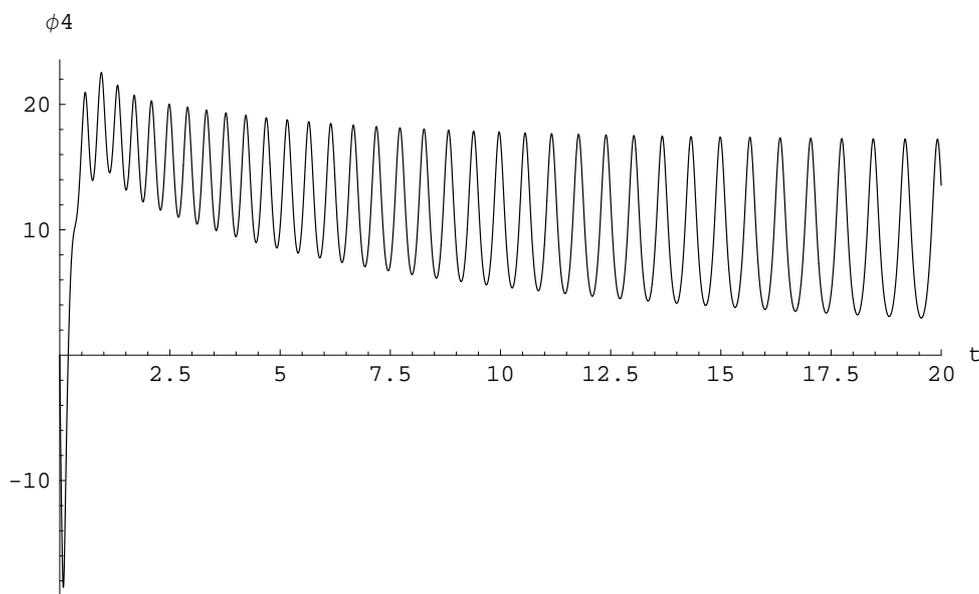


Figura 6.34: L'andamento nel tempo di $\phi_4(t, \xi)$ con $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_2}$, $k_D = k_{D_2}$, $k_P = k_{P_2}$, in dettaglio.

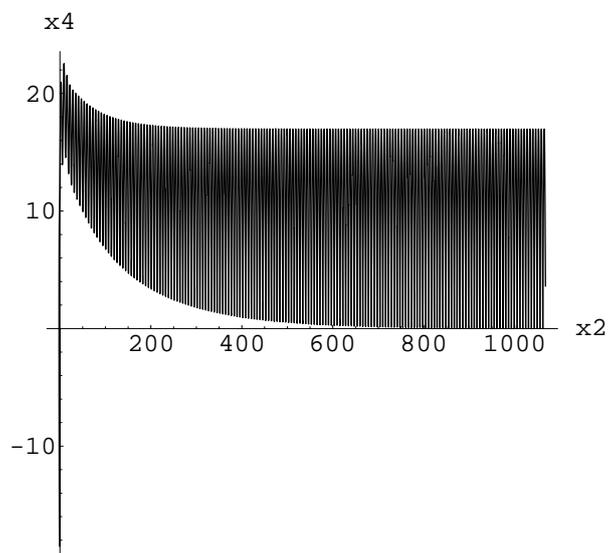


Figura 6.35: La proiezione della traiettoria relativa al punto iniziale $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ nel piano x_2x_4 , per $k_E = k_{E_2}$, $k_D = k_{D_2}$, $k_P = k_{P_2}$. $t \in [0, 200]$

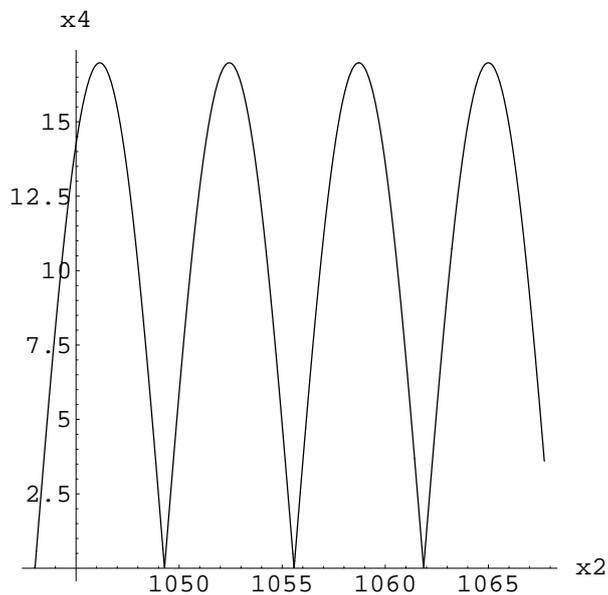


Figura 6.36: La proiezione della traiettoria relativa al punto iniziale $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ nel piano x_2x_4 , per $k_E = k_{E_2}$, $k_D = k_{D_2}$, $k_P = k_{P_2}$, in dettaglio.

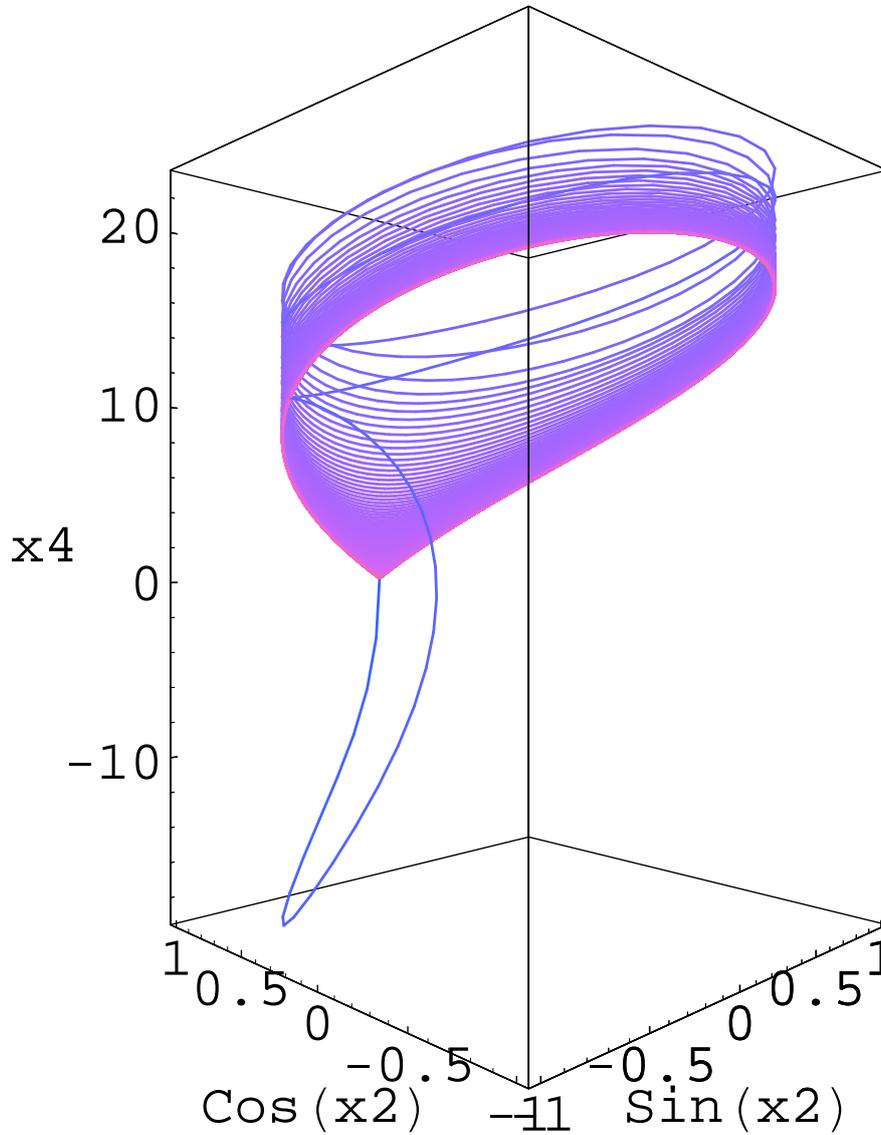


Figura 6.37: La proiezione della traiettoria relativa al punto iniziale $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ sul cilindro x_2x_4 (di raggio unitario), per $k_E = k_{E_2}$, $k_D = k_{D_2}$, $k_P = k_{P_2}$, in dettaglio. Inoltre $t \in [0, 200]$. Per t crescente il colore tende dal blu al viola.

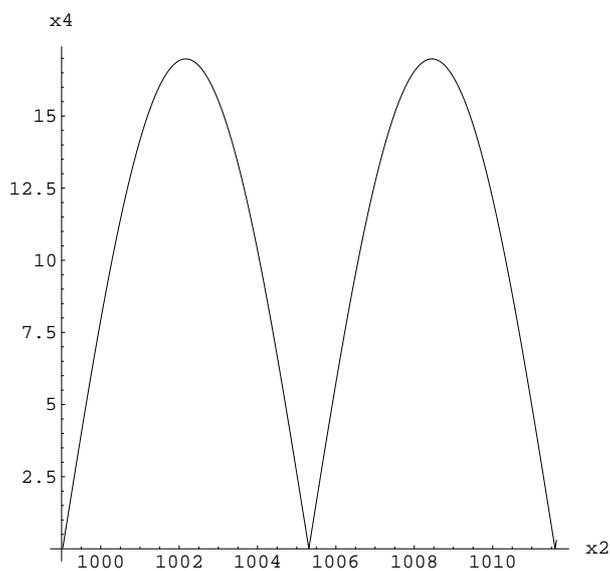


Figura 6.38: La proiezione della traiettoria relativa al punto iniziale $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ nel piano x_2x_4 , per $k_E = k_{E_2}$, $k_D = k_{D_2}$, $k_P = k_{P_2}$, in dettaglio.

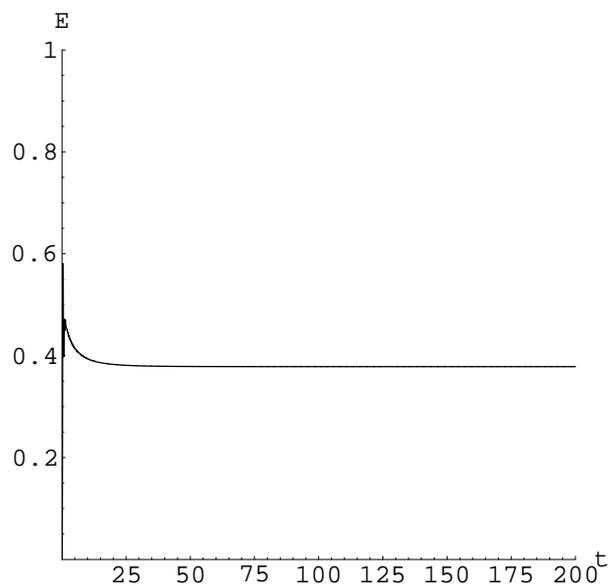


Figura 6.39: L'andamento nel tempo dell'energia relativo allo stato iniziale del sistema $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_2}$, $k_D = k_{D_2}$, $k_P = k_{P_2}$.

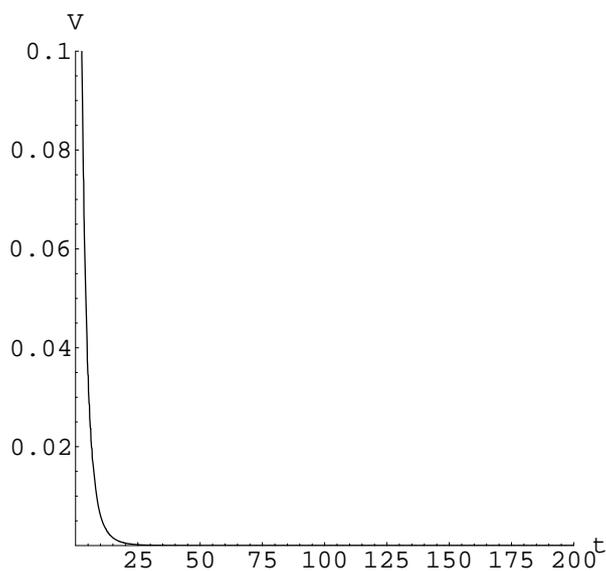


Figura 6.40: L'andamento nel tempo di V relativo allo stato iniziale del sistema $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_2}$, $k_D = k_{D_2}$, $k_P = k_{P_2}$.

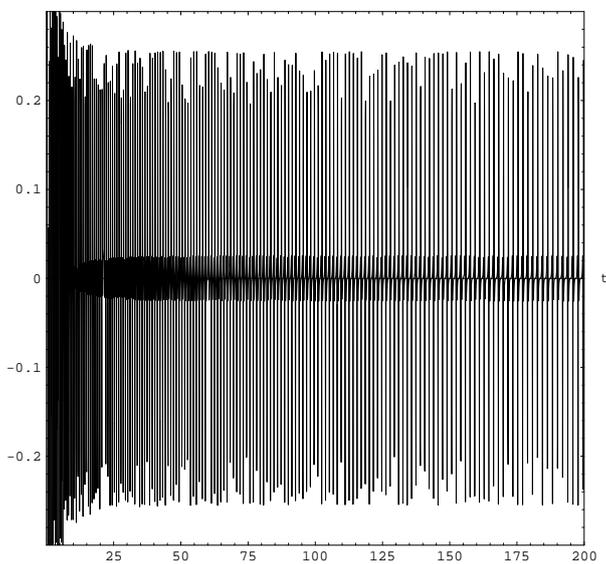


Figura 6.41: L'andamento nel tempo di τ_1 relativo allo stato iniziale del sistema $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_2}$, $k_D = k_{D_2}$, $k_P = k_{P_2}$.

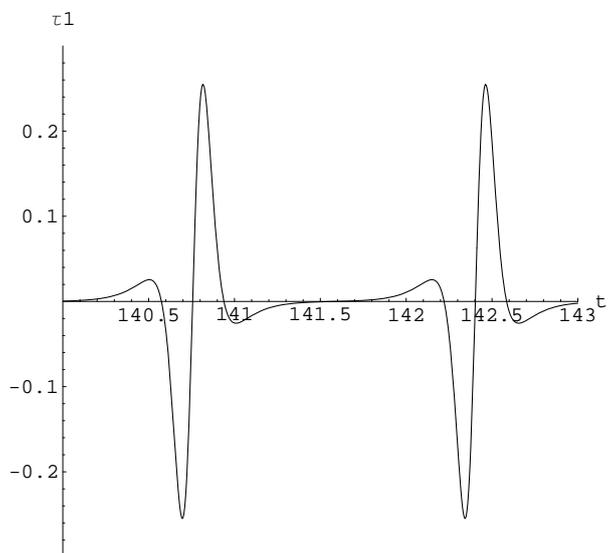


Figura 6.42: L'andamento nel tempo di τ_1 relativo allo stato iniziale del sistema $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_2}$, $k_D = k_{D_2}$, $k_P = k_{P_2}$ in dettaglio.

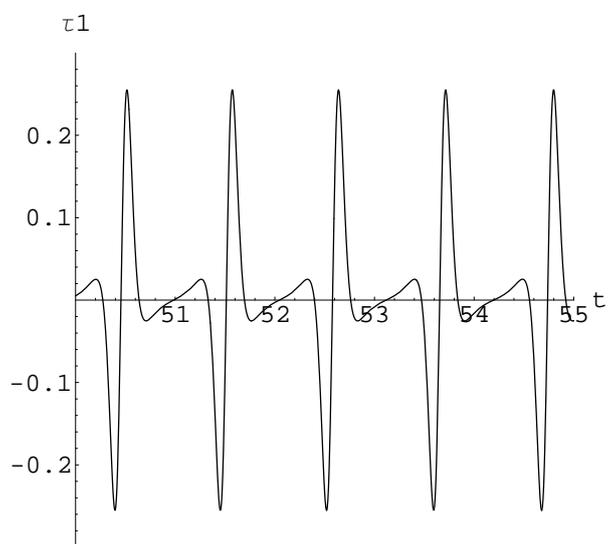


Figura 6.43: L'andamento nel tempo di τ_1 relativo allo stato iniziale del sistema $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$, per $k_E = k_{E_2}$, $k_D = k_{D_2}$, $k_P = k_{P_2}$ in dettaglio.

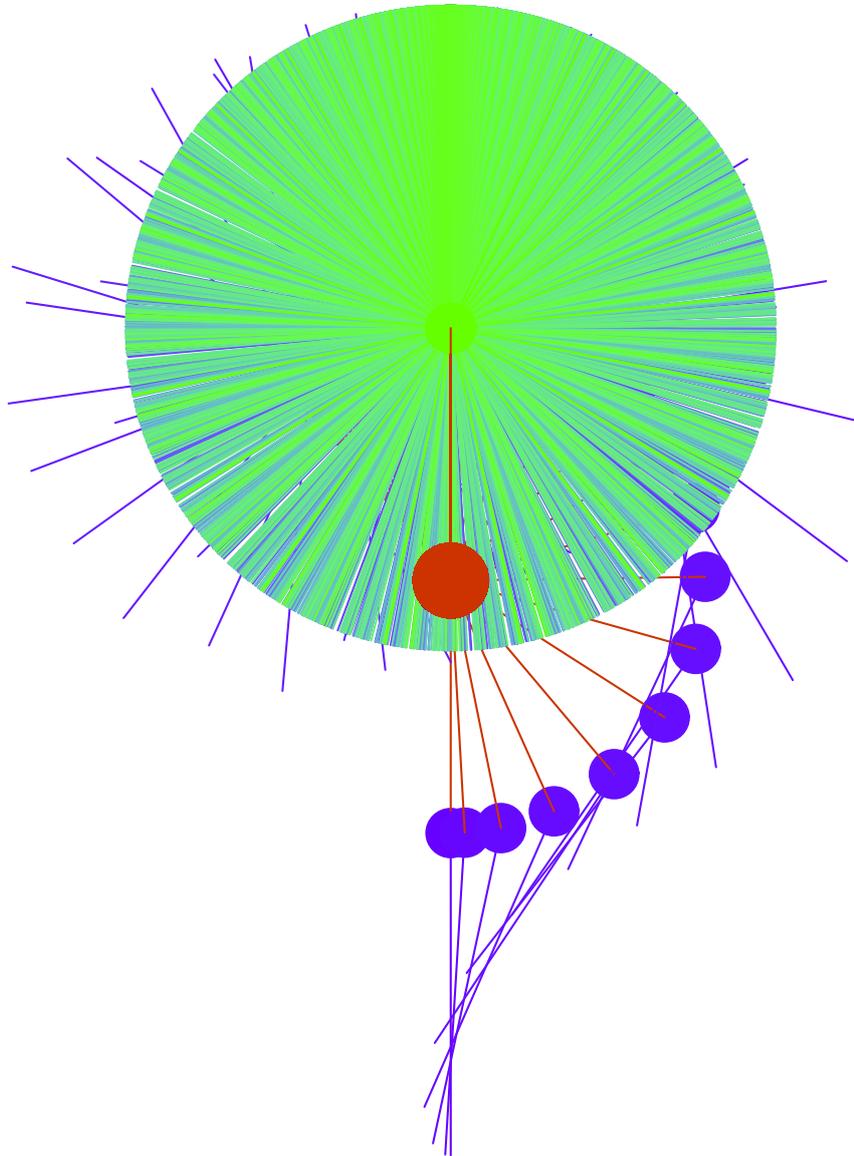


Figura 6.44: Il moto del Pendubot, per $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ e per $k_E = k_{E_2}, k_D = k_{D_2}, k_P = k_{P_2}$, con $t \in [0, 200]$. Il colore del secondo link tende verso il verde.

6.6 Variazione del parametro k_E

Cerchiamo ora di capire, euristicamente, come cambia la risposta del sistema quando si variano i parametri k_E, k_D, k_P . Cominciamo variando il parametro k_E . A tal fine poniamo

$$\begin{cases} k_E = k_{EVAR} \\ k_D = k_{DEVAR} = 2k_{EVAR}g\theta_1(\theta_4 + \theta_5) + 0.01 \\ k_P = k_{PEVAR} = \frac{k_{EVAR}2(\theta_4g)^2(1+\frac{\theta_5}{\theta_4})}{\pi} + 0.1 \end{cases} \quad (6.22)$$

e consideriamo k_{EVAR} variabile tra 10 e 30 con incrementi di 5. Nel seguito i tratti più scuri corrisponderanno a valori di k_{EVAR} più elevati e quelli più chiari a valori più bassi di tale parametro. Scegliamo il punto iniziale $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

Consideriamo le Figure 6.45, 6.46, 6.47, 6.48, 6.49, 6.50, 6.51, 6.52, 6.53, 6.54, 6.55, e 6.56.

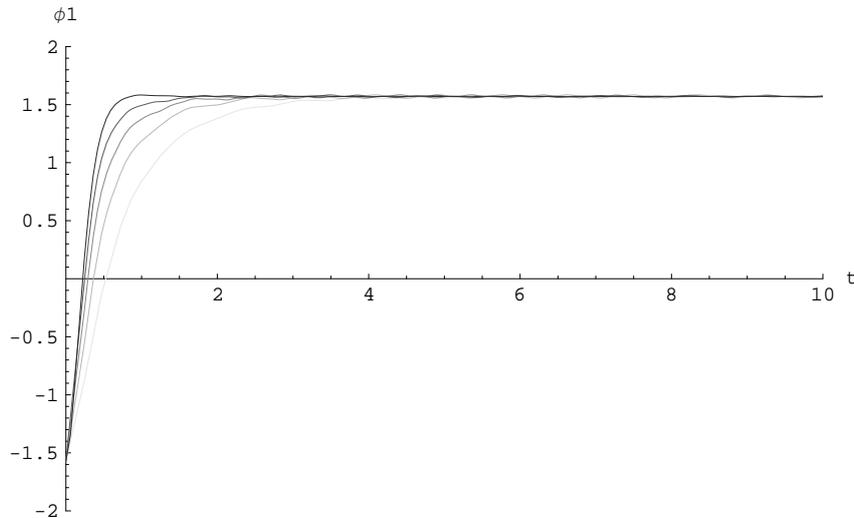


Figura 6.45: L'andamento nel tempo di $\phi_1(t, \xi)$ al variare di $k_E = k_{EVAR}$ tra 10 e 30 con incrementi di 5. Il tratteggio più scuro corrisponde a valori più elevati di k_{EVAR} . Il punto iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $k_D = K_{DEVAR}$ e $K_P = K_{PEVAR}$ secondo le (6.22).

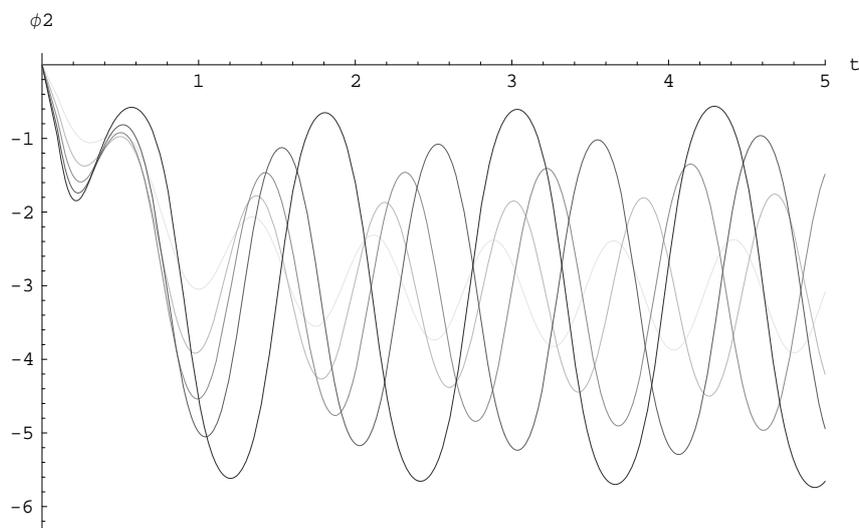


Figura 6.46: L'andamento nel tempo di $\phi_2(t, \xi)$ al variare di $k_E = k_{EVAR}$ tra 10 e 30 con incrementi di 5. Il tratteggio più scuro corrisponde a valori più elevati di k_{EVAR} . Il punto iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $k_D = K_{D_{EVAR}}$ e $K_P = K_{P_{EVAR}}$ secondo le (6.22).

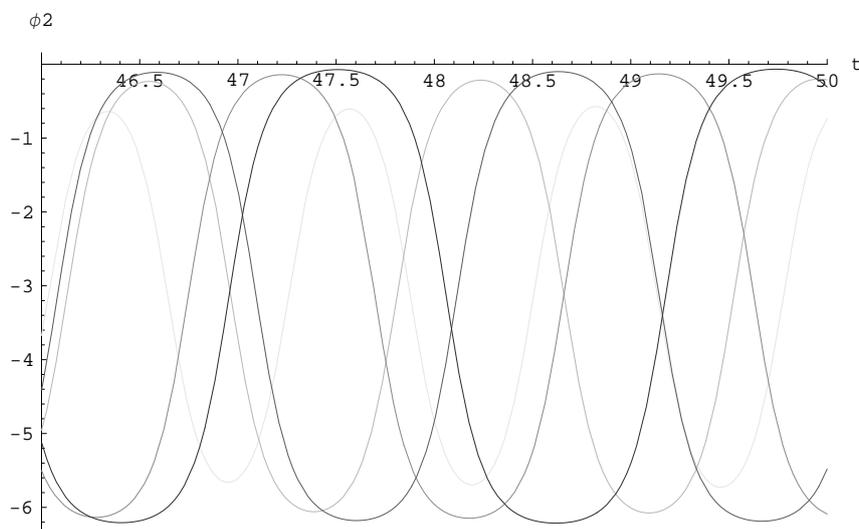


Figura 6.47: L'andamento nel tempo di $\phi_2(t, \xi)$ al variare di $k_E = k_{EVAR}$ tra 10 e 30 con incrementi di 5. Il tratteggio più scuro corrisponde a valori più elevati di k_{EVAR} . Il punto iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $k_D = K_{D_{EVAR}}$ e $K_P = K_{P_{EVAR}}$ secondo le (6.22).

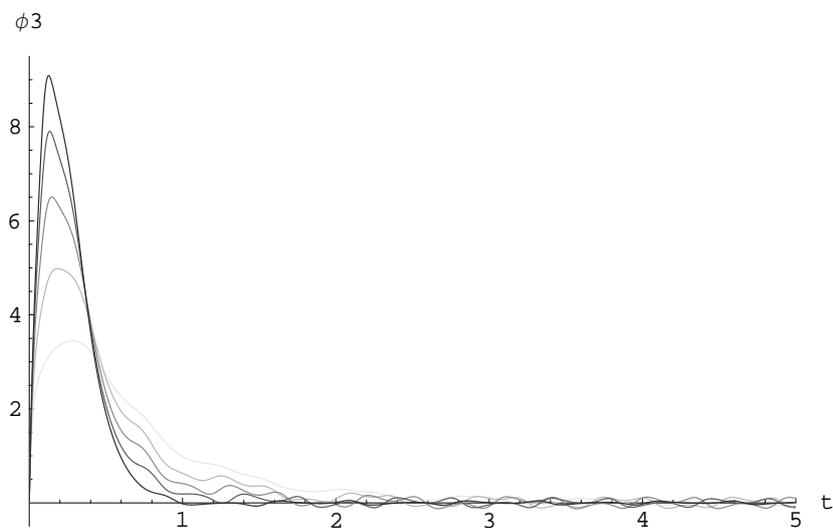


Figura 6.48: L'andamento nel tempo di $\phi_3(t, \xi)$ al variare di $k_E = k_{EVAR}$ tra 10 e 30 con incrementi di 5. Il tratteggio più scuro corrisponde a valori più elevati di k_{EVAR} . Il punto iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $k_D = K_{D_{EVAR}}$ e $K_P = K_{P_{EVAR}}$ secondo le (6.22).

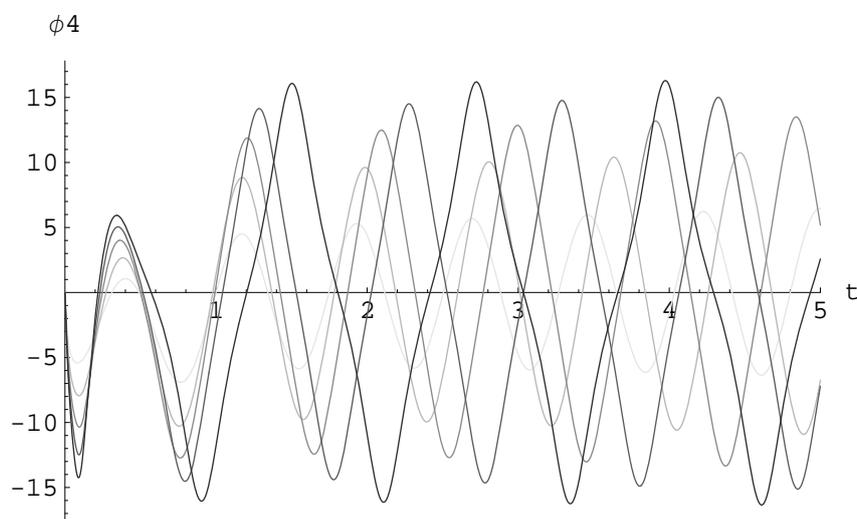


Figura 6.49: L'andamento nel tempo di $\phi_4(t, \xi)$ al variare di $k_E = k_{EVAR}$ tra 10 e 30 con incrementi di 5. Il tratteggio più scuro corrisponde a valori più elevati di k_{EVAR} . Il punto iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $k_D = K_{D_{EVAR}}$ e $K_P = K_{P_{EVAR}}$ secondo le (6.22).

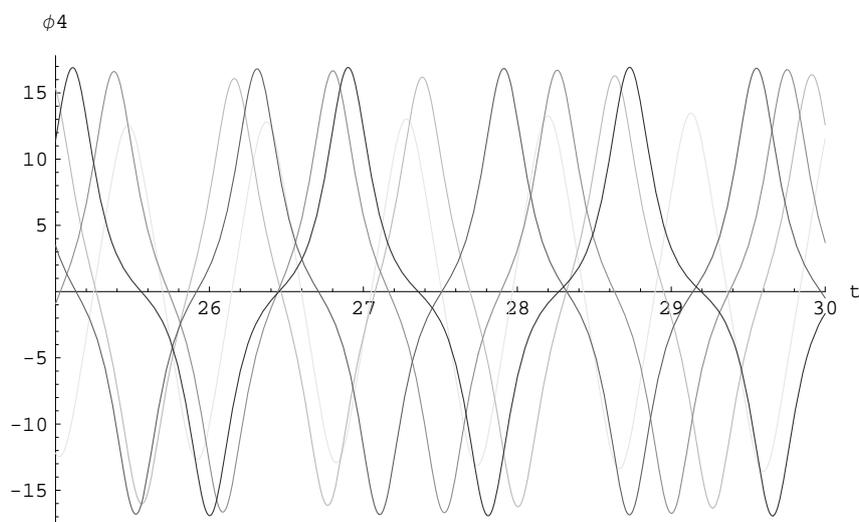


Figura 6.50: L'andamento nel tempo, in dettaglio, di $\phi_4(t, \xi)$ al variare di $k_E = k_{EVAR}$ tra 10 e 30 con incrementi di 5. Il tratteggio più scuro corrisponde a valori più elevati di k_{EVAR} . Il punto iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $k_D = K_{DEVAR}$ e $K_P = K_{PEVAR}$ secondo le (6.22).

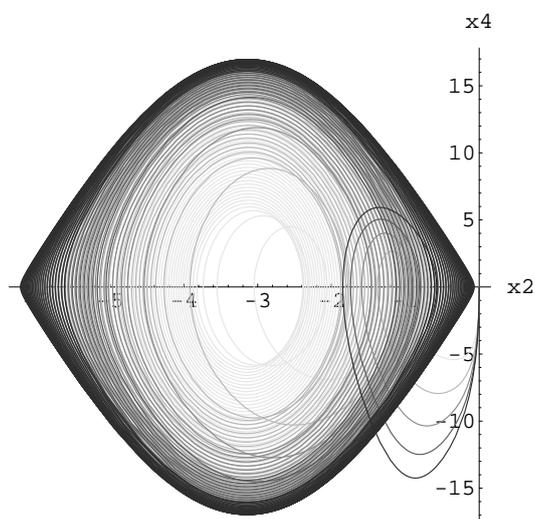


Figura 6.51: La proiezione nel piano x_2x_4 di $O^+(\xi)$, al variare di $k_E = k_{EVAR}$ tra 10 e 30 con incrementi di 5. Il tratteggio più scuro corrisponde a valori più elevati di k_{EVAR} . Il punto iniziale è $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $k_D = K_{DEVAR}$ e $K_P = K_{PEVAR}$ secondo le (6.22). Inoltre $t \in [0, 50]$.

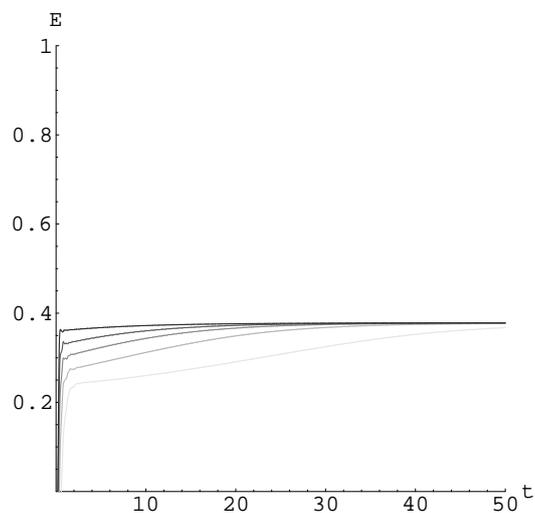


Figura 6.52: L'andamento nel tempo dell'energia, al variare di $k_E = k_{EVAR}$ tra 10 e 30 con incrementi di 5. Il tratteggio più scuro corrisponde a valori più elevati di k_{EVAR} . Il punto iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $k_D = K_{D_{EVAR}}$ e $K_P = K_{P_{EVAR}}$ secondo le (6.22).

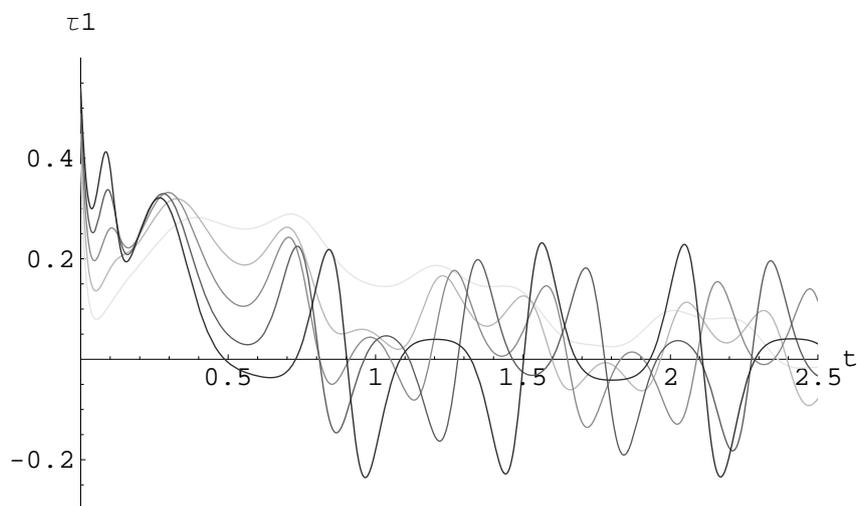


Figura 6.53: L'andamento di τ_1 nel tempo, al variare di $k_E = k_{EVAR}$ tra 10 e 30 con incrementi di 5. Il tratteggio più scuro corrisponde a valori più elevati di k_{EVAR} . Il punto iniziale è $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $k_D = K_{D_{EVAR}}$ e $K_P = K_{P_{EVAR}}$ secondo le (6.22).

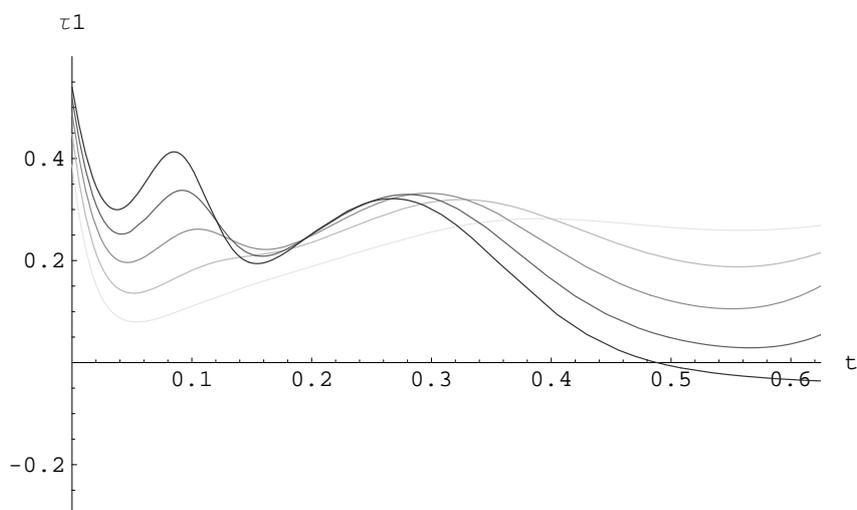


Figura 6.54: L'andamento di τ_1 nel tempo in dettaglio, al variare di $k_E = k_{EVAR}$ tra 10 e 30 con incrementi di 5. Il tratteggio più scuro corrisponde a valori più elevati di k_{EVAR} . Il punto iniziale è $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $k_D = K_{DEVAR}$ e $K_P = K_{PEVAR}$ secondo le (6.22).

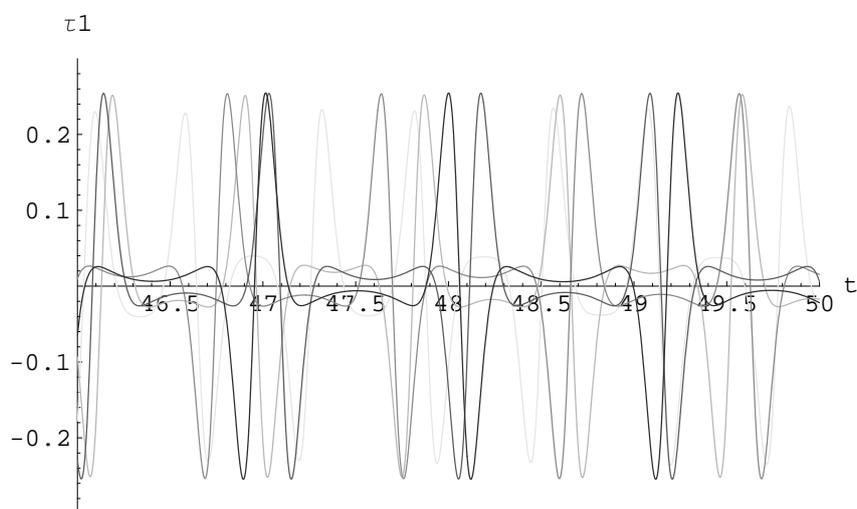


Figura 6.55: L'andamento di τ_1 nel tempo in dettaglio, al variare di $k_E = k_{EVAR}$ tra 10 e 30 con incrementi di 5. Il tratteggio più scuro corrisponde a valori più elevati di k_{EVAR} . Il punto iniziale è $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $k_D = K_{DEVAR}$ e $K_P = K_{PEVAR}$ secondo le (6.22).

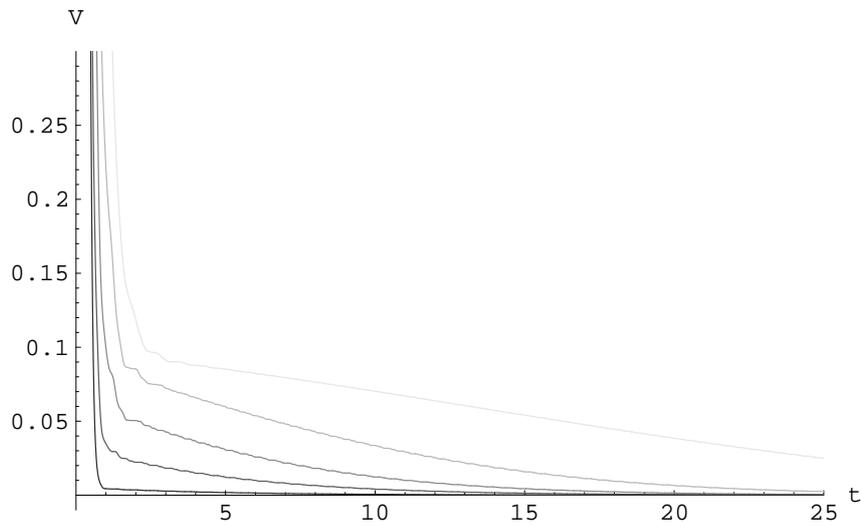


Figura 6.56: L'andamento di V nel tempo in dettaglio, al variare di $k_E = k_{EVAR}$ tra 10 e 30 con incrementi di 5. Il tratteggio più scuro corrisponde a valori più elevati di k_{EVAR} . Il punto iniziale è $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $k_D = K_{DEVAR}$ e $K_P = K_{PEVAR}$ secondo le (6.22).

6.7 Cosa accade per un ulteriore incremento di k_E

Valendo ancora le (6.22), facciamo ora variare k_{EVAR} tra 20 e 60 con incrementi di 5.

Scegliamo ancora il punto iniziale $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

Consideriamo le Figure 6.57, 6.58, 6.59, 6.60, 6.61, 6.62, 6.63, 6.64, 6.65, 6.66, e 6.67.

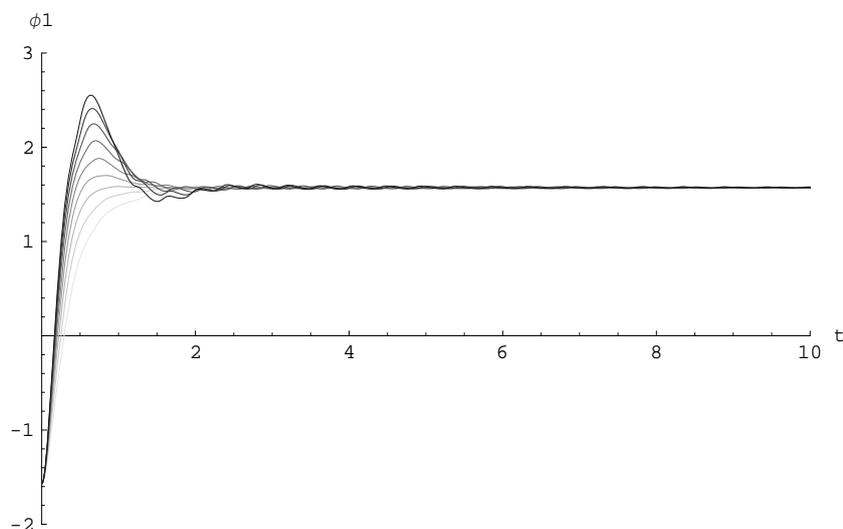


Figura 6.57: L'andamento nel tempo di $\phi_1(t, \xi)$ al variare di $k_E = k_{EVAR}$ tra 20 e 60 con incrementi di 5. Il tratteggio più scuro corrisponde a valori più elevati di k_{EVAR} . Il punto iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $k_D = K_{DEVAR}$ e $K_P = K_{PEVAR}$ secondo le (6.22).

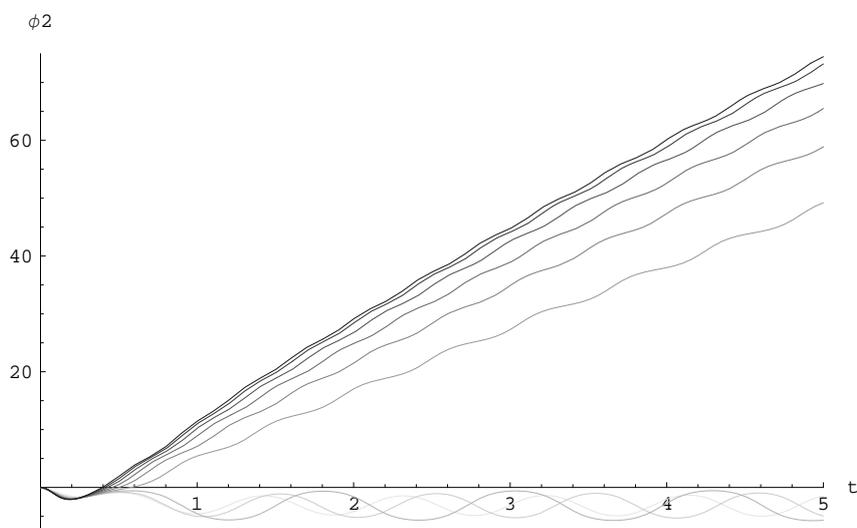


Figura 6.58: L'andamento nel tempo di $\phi_2(t, \xi)$ al variare di $k_E = k_{EVAR}$ tra 20 e 60 con incrementi di 5. Il tratteggio più scuro corrisponde a valori più elevati di k_{EVAR} . Il punto iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $k_D = K_{D_{EVAR}}$ e $K_P = K_{P_{EVAR}}$ secondo le (6.22).

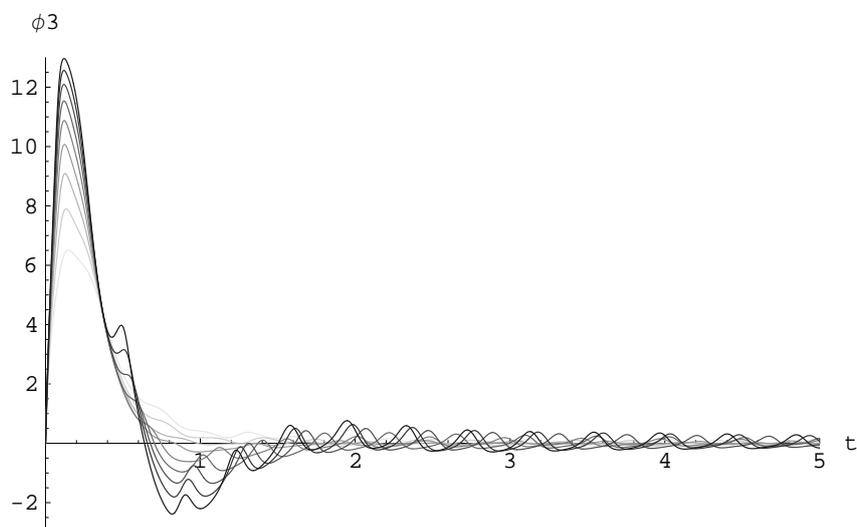


Figura 6.59: L'andamento nel tempo di $\phi_3(t, \xi)$ al variare di $k_E = k_{EVAR}$ tra 20 e 60 con incrementi di 5. Il tratteggio più scuro corrisponde a valori più elevati di k_{EVAR} . Il punto iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $k_D = K_{D_{EVAR}}$ e $K_P = K_{P_{EVAR}}$ secondo le (6.22).

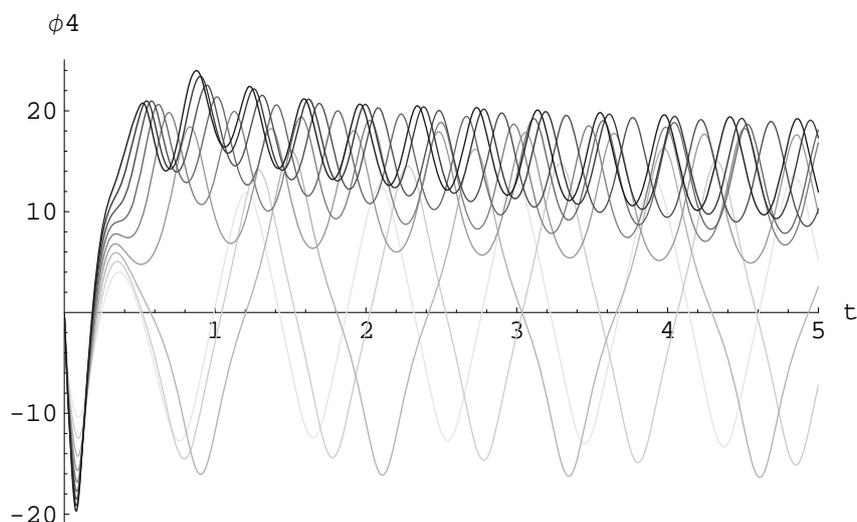


Figura 6.60: L'andamento nel tempo di $\phi_4(t, \xi)$ al variare di $k_E = k_{EVAR}$ tra 20 e 60 con incrementi di 5. Il tratteggio più scuro corrisponde a valori più elevati di k_{EVAR} . Il punto iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $k_D = K_{D_{EVAR}}$ e $K_P = K_{P_{EVAR}}$ secondo le (6.22).

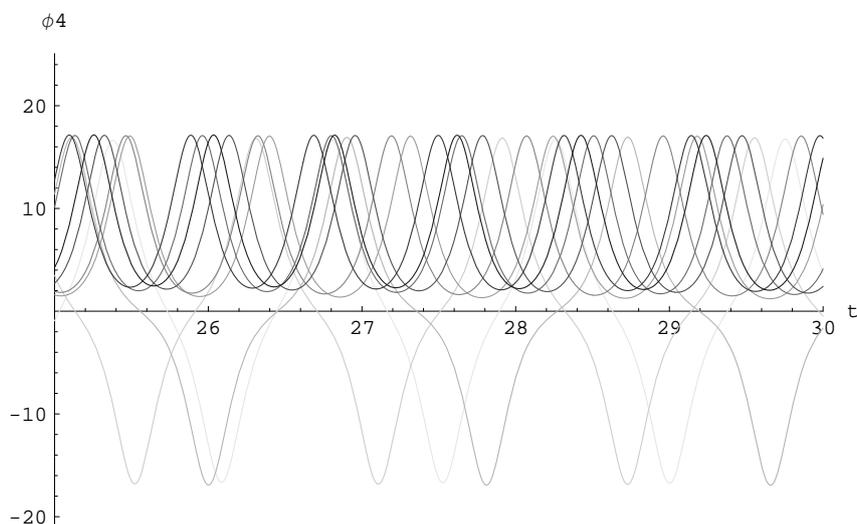


Figura 6.61: L'andamento nel tempo, in dettaglio, di $\phi_4(t, \xi)$ al variare di $k_E = k_{EVAR}$ tra 20 e 60 con incrementi di 5. Il tratteggio più scuro corrisponde a valori più elevati di k_{EVAR} . Il punto iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $k_D = K_{D_{EVAR}}$ e $K_P = K_{P_{EVAR}}$ secondo le (6.22).

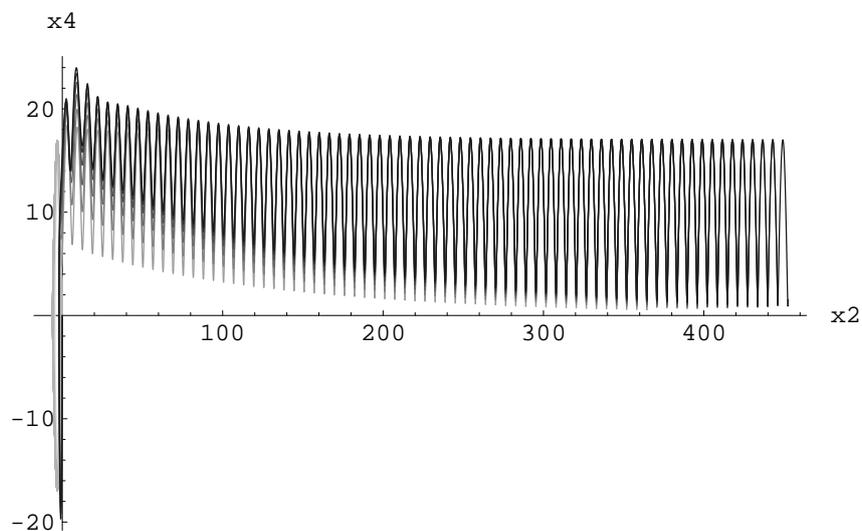


Figura 6.62: La proiezione nel piano x_2x_4 di $O^+(\xi)$, al variare di $k_E = k_{EVAR}$ tra 20 e 60 con incrementi di 5. Il tratteggio più scuro corrisponde a valori più elevati di k_{EVAR} . Il punto iniziale è $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $k_D = K_{D_{EVAR}}$ e $K_P = K_{P_{EVAR}}$ secondo le (6.22). Inoltre $t \in [0, 50]$.

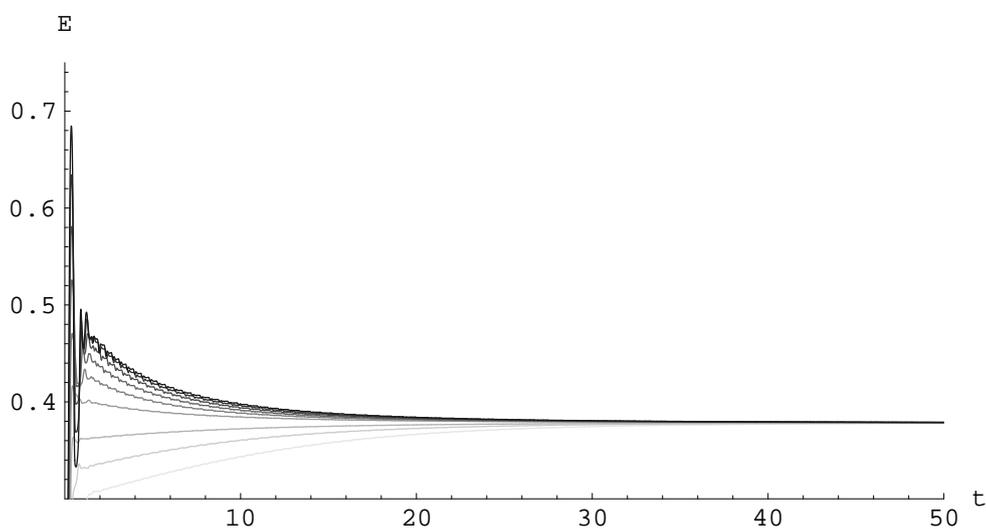


Figura 6.63: L'andamento nel tempo dell'energia, al variare di $k_E = k_{EVAR}$ tra 20 e 60 con incrementi di 5. Il tratteggio più scuro corrisponde a valori più elevati di k_{EVAR} . Il punto iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $k_D = K_{D_{EVAR}}$ e $K_P = K_{P_{EVAR}}$ secondo le (6.22).

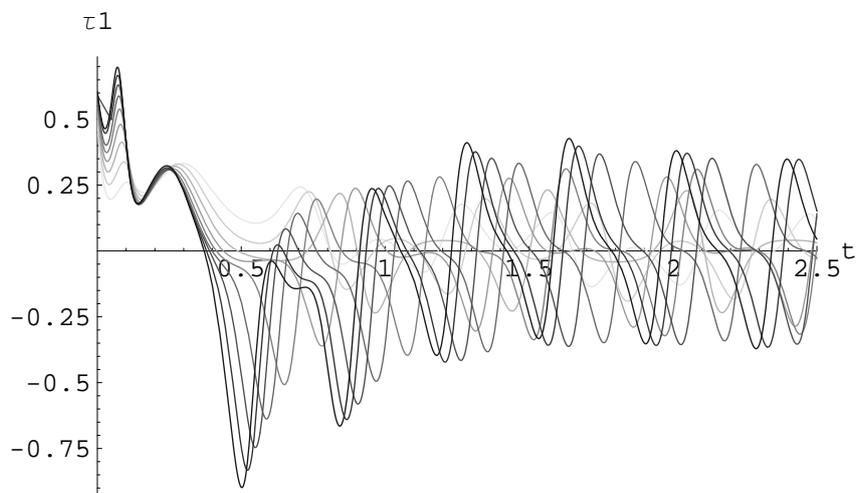


Figura 6.64: L'andamento di τ_1 nel tempo, al variare di $k_E = k_{EVAR}$ tra 20 e 60 con incrementi di 5. Il tratteggio più scuro corrisponde a valori più elevati di k_{EVAR} . Il punto iniziale è $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $k_D = K_{D_{EVAR}}$ e $K_P = K_{P_{EVAR}}$ secondo le (6.22).

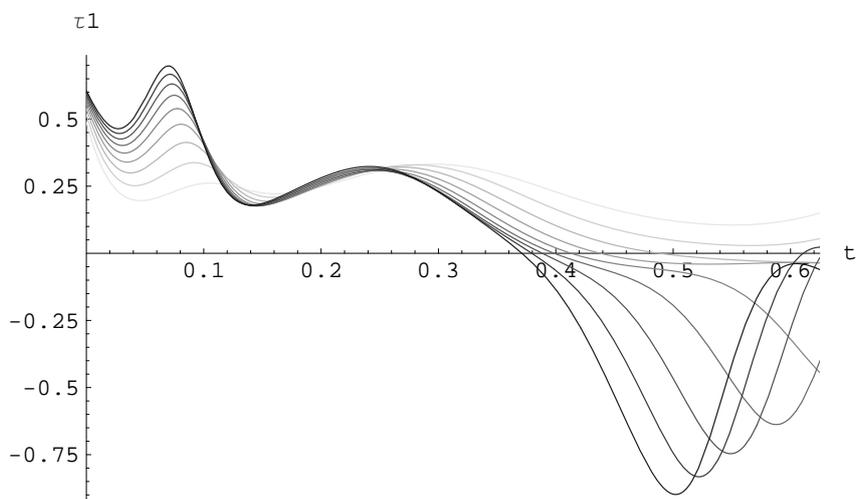


Figura 6.65: L'andamento di τ_1 nel tempo in dettaglio, al variare di $k_E = k_{EVAR}$ tra 20 e 60 con incrementi di 5. Il tratteggio più scuro corrisponde a valori più elevati di k_{EVAR} . Il punto iniziale è $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $k_D = K_{D_{EVAR}}$ e $K_P = K_{P_{EVAR}}$ secondo le (6.22).

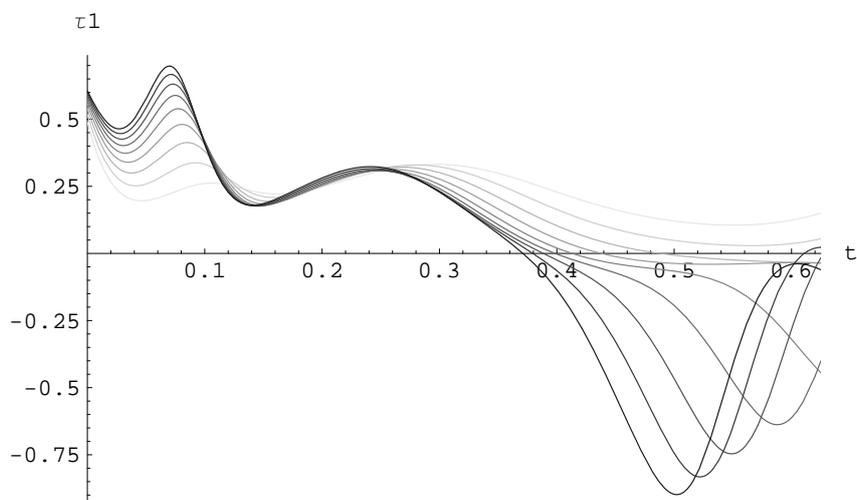


Figura 6.66: L'andamento di τ_1 nel tempo in dettaglio, al variare di $k_E = k_{EVAR}$ tra 20 e 60 con incrementi di 5. Il tratteggio più scuro corrisponde a valori più elevati di k_{EVAR} . Il punto iniziale è $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $k_D = K_{DEVAR}$ e $K_P = K_{PEVAR}$ secondo le (6.22).

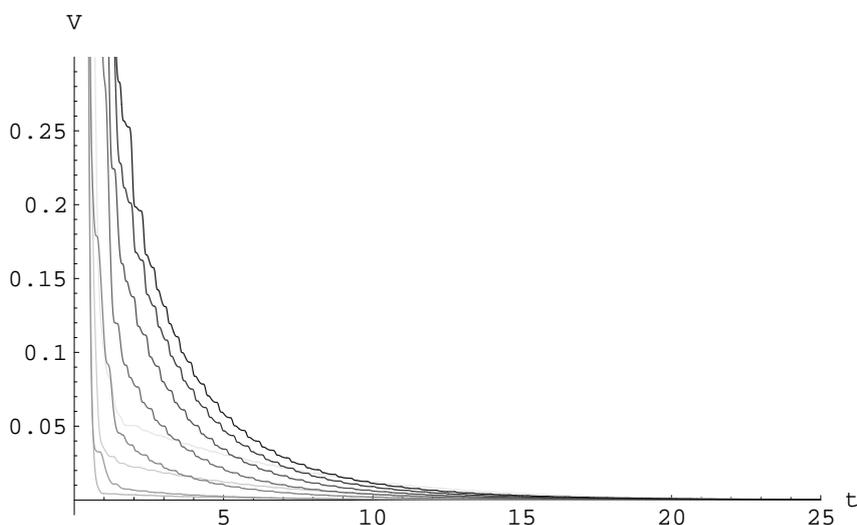


Figura 6.67: L'andamento di V nel tempo in dettaglio, al variare di $k_E = k_{EVAR}$ tra 20 e 60 con incrementi di 5. Il tratteggio più scuro corrisponde a valori più elevati di k_{EVAR} . Il punto iniziale è $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $k_D = K_{DEVAR}$ e $K_P = K_{PEVAR}$ secondo le (6.22).

6.8 Variazione del parametro k_D

Manteniamo ora costanti i parametri k_E e k_P e facciamo variare k_D . A tal fine poniamo

$$k_E = 32.151 = k_{E_1} \quad (6.23)$$

$$k_D = 2k_{E_1}g\theta_1(\theta_4 + \theta_5) + k_{D_{INC}} \quad (6.24)$$

$$k_P = 2.44151 = k_{P_1} \quad (6.25)$$

e facciamo variare l'incremento $k_{D_{INC}}$ tra 0.01 ed 1.81 con incrementi di 0.2. Manteniamo ancora la condizione iniziale $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

Si considerino le Figure relative a questa sezione, osservando anche le didascalie delle Figure stesse.

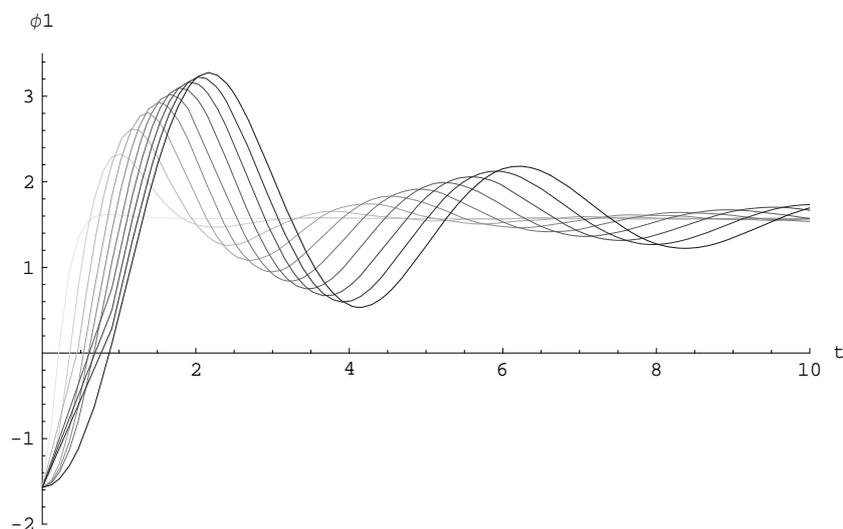


Figura 6.68: L'andamento nel tempo di ϕ_1 con costanti k date da (6.23) per $k_{D_{INC}}$ che varia tra 0.01 e 1.81 con incrementi di 0.2. Ad un tratto più scuro corrisponde un incremento di k_D . La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

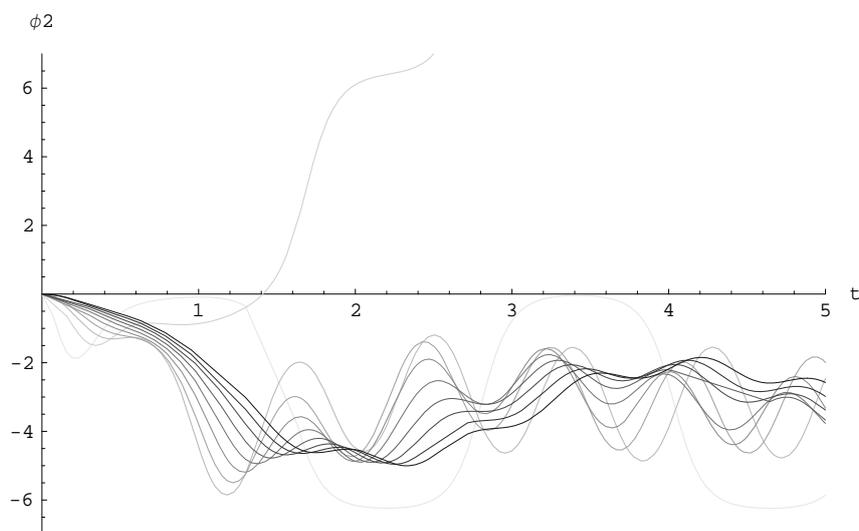


Figura 6.69: L'andamento nel tempo di ϕ_2 con costanti k date da (6.23) per $k_{D_{INC}}$ che varia tra 0.01 e 1.81 con incrementi di 0.2. Ad un tratto più scuro corrisponde un incremento di k_D . La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Notare la curva divergente.

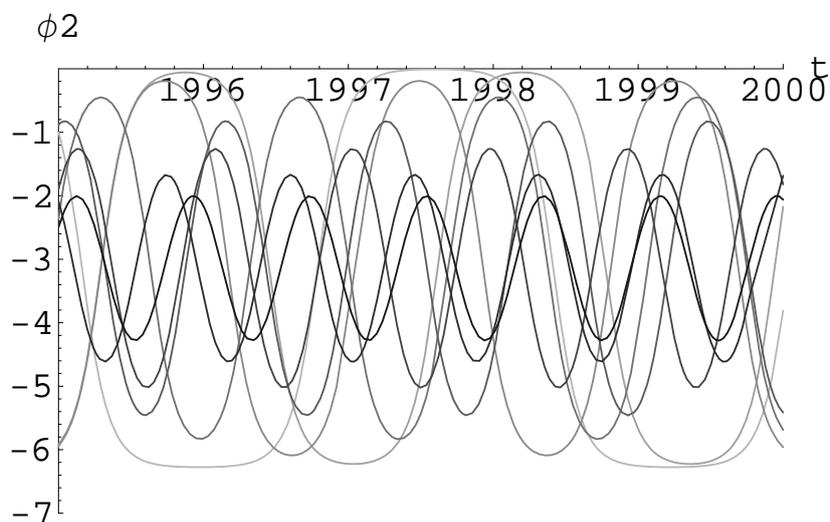


Figura 6.70: L'andamento nel tempo di ϕ_2 in dettaglio con costanti k date da (6.23) per $k_{D_{INC}}$ che varia tra 0.01 e 1.81 con incrementi di 0.2. Ad un tratto più scuro corrisponde un incremento di k_D . La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. La curva divergente non è compresa in Figura.

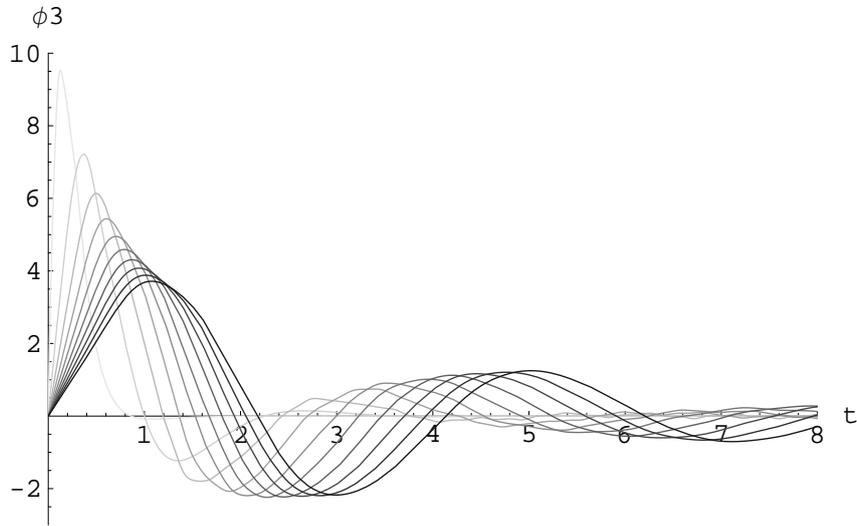


Figura 6.71: L'andamento nel tempo di ϕ_3 con costanti k date da (6.23) per $k_{D_{INC}}$ che varia tra 0.01 e 1.81 con incrementi di 0.2. Ad un tratto più scuro corrisponde un incremento di k_D . La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

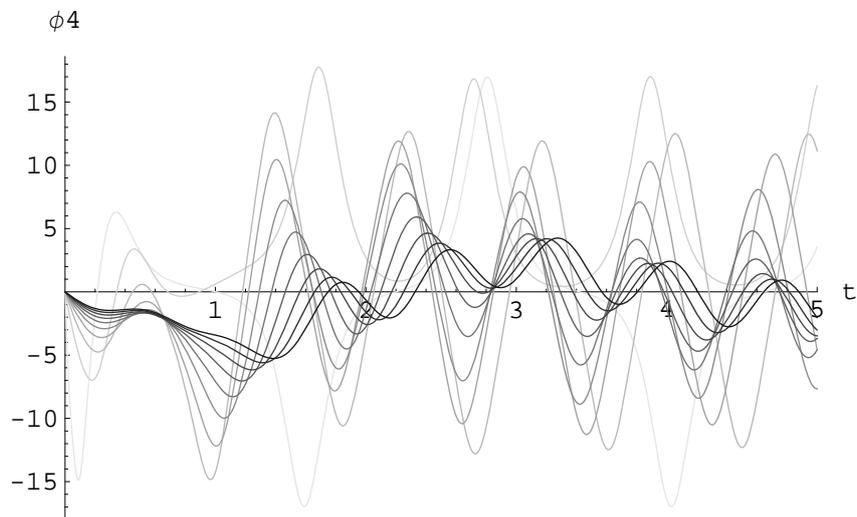


Figura 6.72: L'andamento nel tempo di ϕ_4 con costanti k date da (6.23) per $k_{D_{INC}}$ che varia tra 0.01 e 1.81 con incrementi di 0.2. Ad un tratto più scuro corrisponde un incremento di k_D . La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

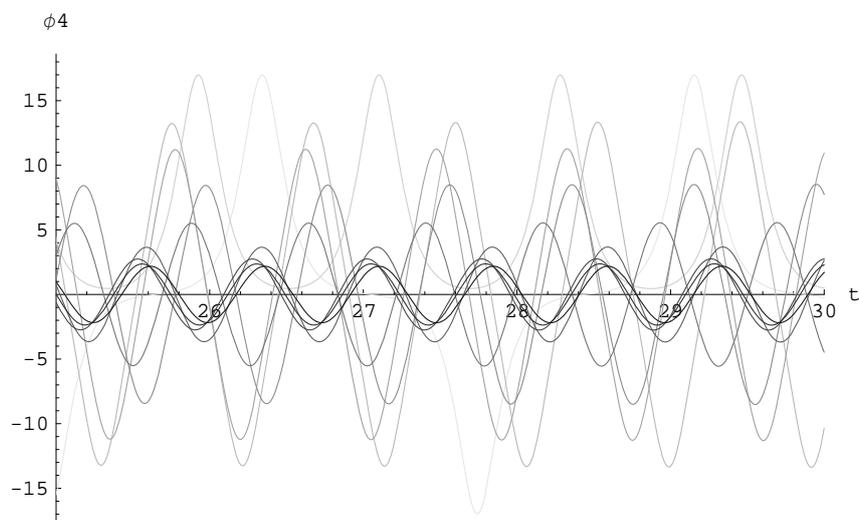


Figura 6.73: L'andamento nel tempo di ϕ_4 in dettaglio con costanti k date da (6.23) per $k_{D_{INC}}$ che varia tra 0.01 e 1.81 con incrementi di 0.2. Ad un tratto più scuro corrisponde un incremento di k_D . La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

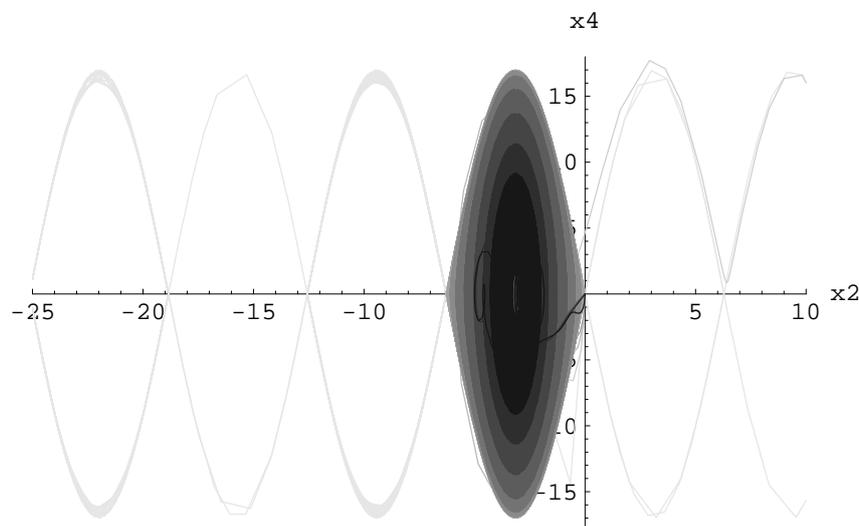


Figura 6.74: La proiezione sul piano x_2x_4 della traiettoria $O^+(\xi)$ per costanti k date da (6.23) con $k_{D_{INC}}$ che varia tra 0.01 e 1.81 con incrementi di 0.2. Ad un tratto più scuro corrisponde un incremento di k_D . La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $t \in [0, 2000]$.

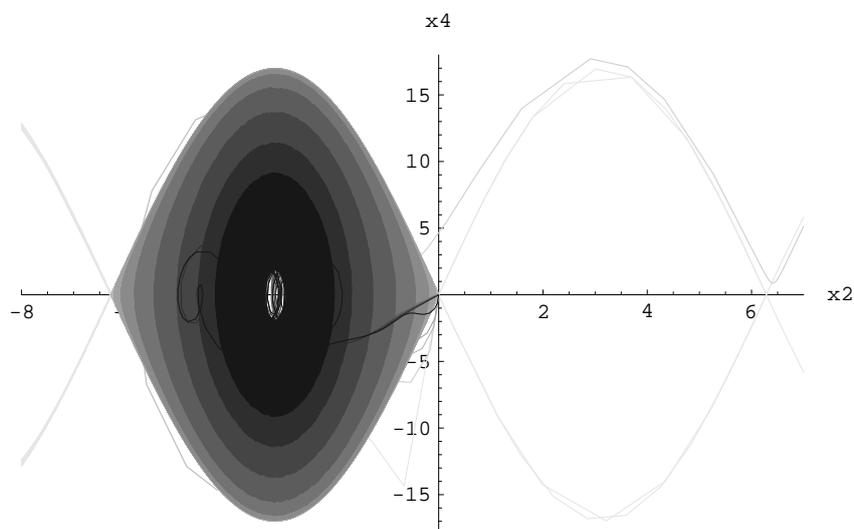


Figura 6.75: La proiezione sul piano x_2x_4 in dettaglio della traiettoria $O^+(\xi)$ per costanti k date da (6.23) con k_{DINC} che varia tra 0.01 e 1.81 con incrementi di 0.2. Ad un tratto più scuro corrisponde un incremento di k_D . La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $t \in [0, 2000]$.

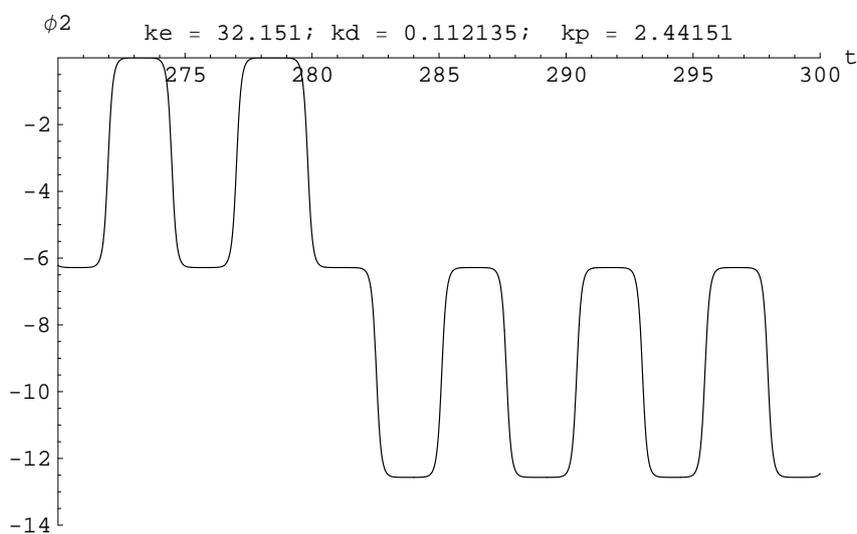


Figura 6.76: Un dettaglio di ϕ_2 per costanti k date da (6.23) con $k_{DINC} = 0.01$. La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

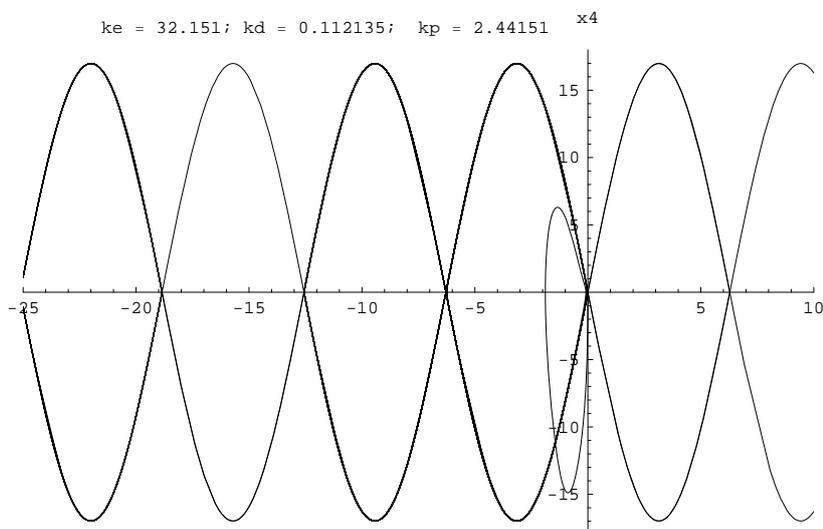


Figura 6.77: La proiezione sul piano x_2x_4 in dettaglio della traiettoria $O^+(\xi)$ per costanti k date da (6.23) con $k_{D_{INC}} = 0.01$. La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $t \in [0, 2000]$.

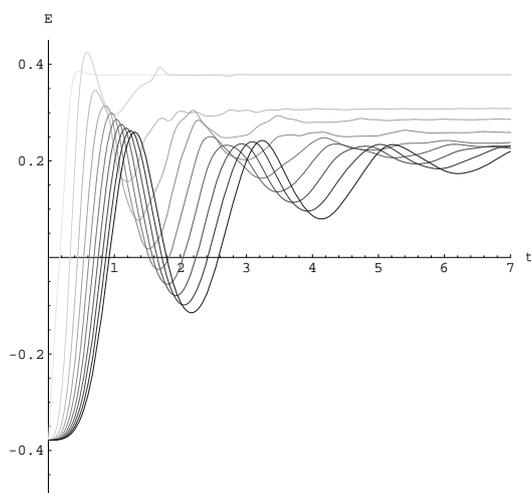


Figura 6.78: L'andamento nel tempo di E , con costanti k date da (6.23) per $k_{D_{INC}}$ che varia tra 0.01 e 1.81 con incrementi di 0.2. Ad un tratto più scuro corrisponde un incremento di k_D . La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

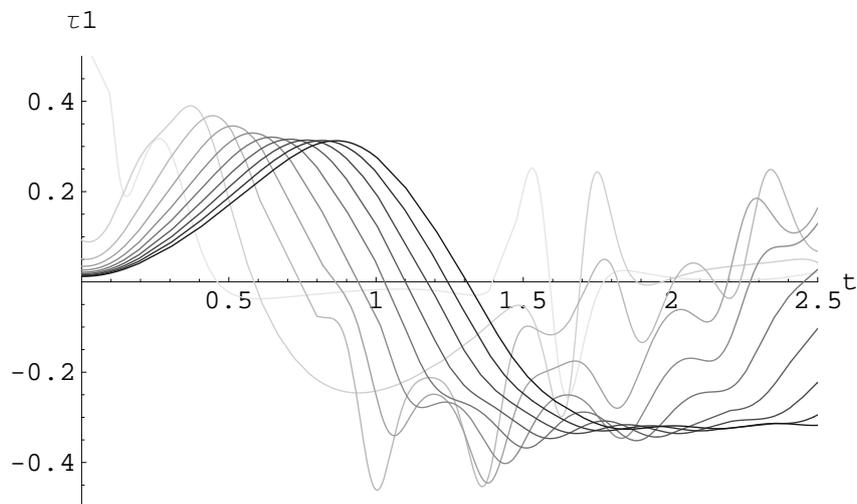


Figura 6.79: L'andamento nel tempo di τ_1 , con costanti k date da (6.23) per $k_{D_{INC}}$ che varia tra 0.01 e 1.81 con incrementi di 0.2. Ad un tratto più scuro corrisponde un incremento di k_D . La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0)$.

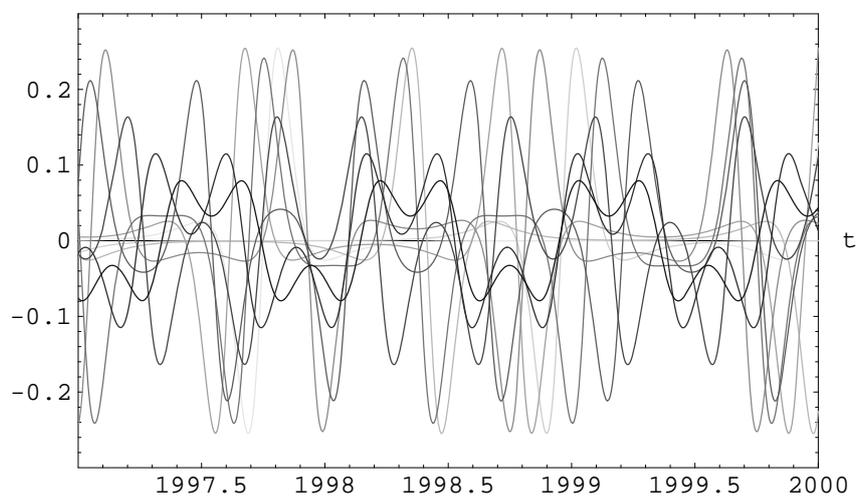


Figura 6.80: L'andamento nel tempo di τ_1 , con costanti k date da (6.23) per $k_{D_{INC}}$ che varia tra 0.01 e 1.81 con incrementi di 0.2. Ad un tratto più scuro corrisponde un incremento di k_D . La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0)$.

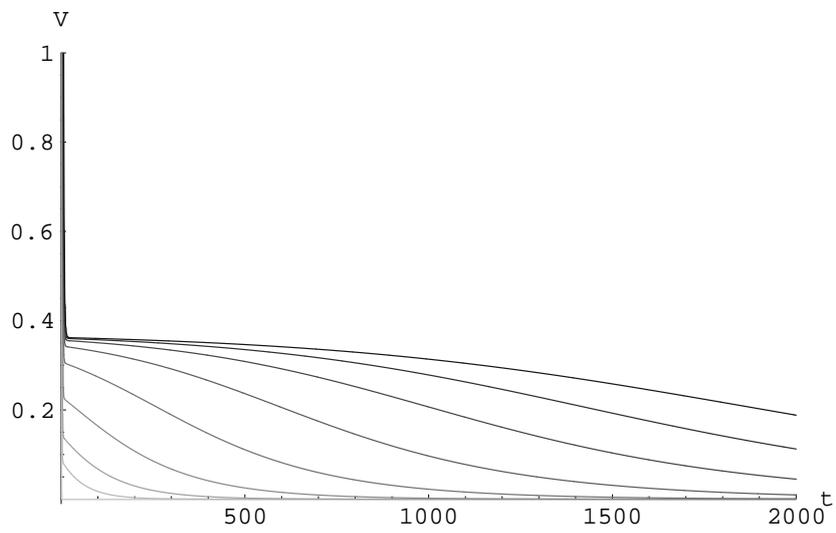


Figura 6.81: L'andamento nel tempo di V , con costanti k date da (6.23) per $k_{D_{INC}}$ che varia tra 0.01 e 1.81 con incrementi di 0.2. Ad un tratto più scuro corrisponde un incremento di k_D . La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

6.9 Variazione del parametro k_P

Manteniamo ora costanti i parametri k_E e k_D e facciamo variare k_P . A tal fine poniamo

$$k_E = k_{E_3} := 31 \quad (6.26)$$

$$k_D = 2k_{E_3}g\theta_1(\theta_4 + \theta_5) + 0.01 \quad (6.27)$$

$$k_P = \frac{k_{E_3}2(\theta_4g)^2(1 + \frac{\theta_5}{\theta_4})}{\pi} + k_{P_{INC}} \quad (6.28)$$

e facciamo variare $k_{P_{INC}}$ tra 0.1 ed 1 con incrementi di 0.1. Manteniamo ancora la condizione iniziale $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

Si considerino le Figure relative a questa sezione ed anche le didascalie relative alle Figure stesse.

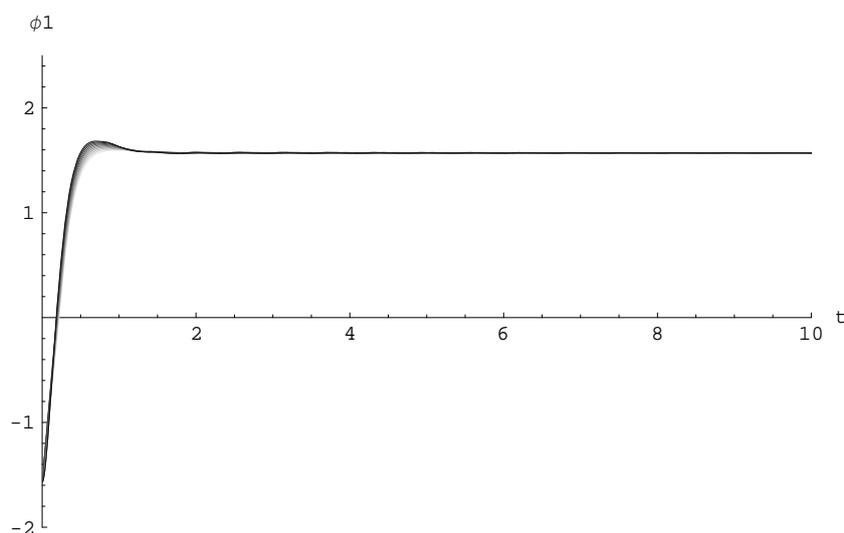


Figura 6.82: L'andamento nel tempo di ϕ_1 con costanti k date da (6.26) per $k_{P_{INC}}$ che varia tra 0.1 e 1 con incrementi di 0.1. Ad un tratto più scuro corrisponde un incremento di k_P . La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

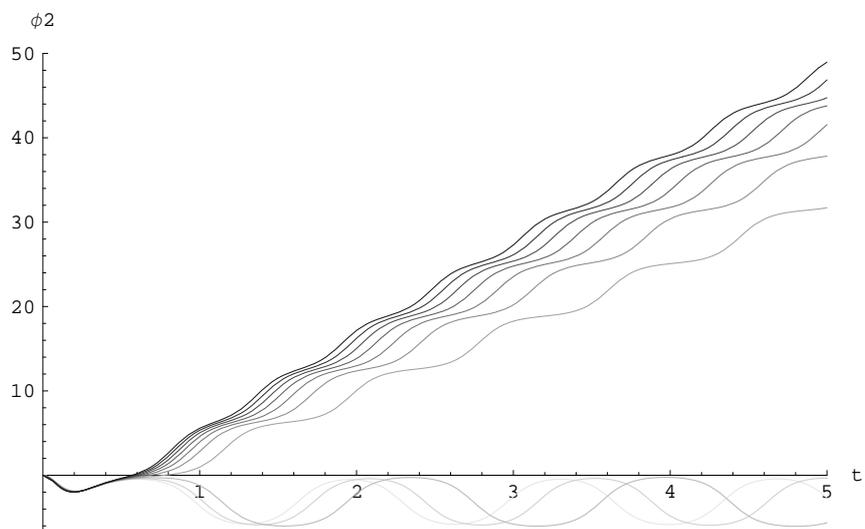


Figura 6.83: L'andamento nel tempo di ϕ_2 con costanti k date da (6.26) per $k_{P_{INC}}$ che varia tra 0.1 e 1 con incrementi di 0.1. Ad un tratto più scuro corrisponde un incremento di k_P . La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

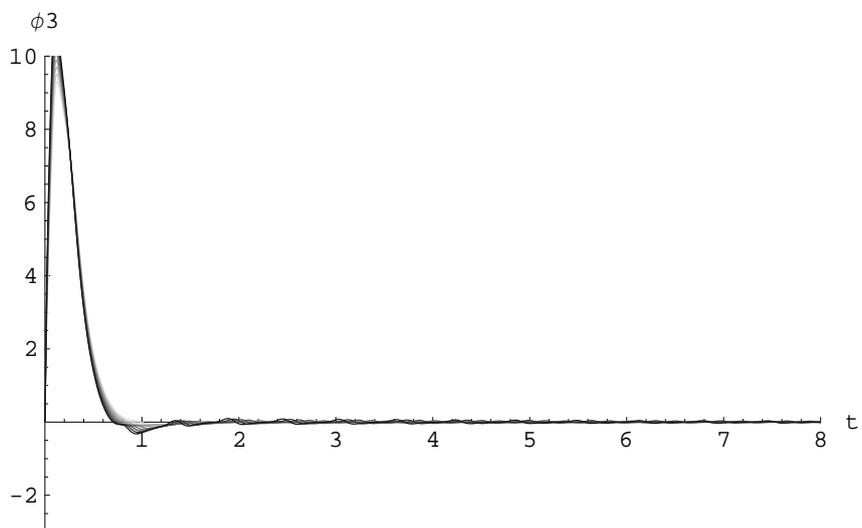


Figura 6.84: L'andamento nel tempo di ϕ_3 con costanti k date da (6.26) per $k_{P_{INC}}$ che varia tra 0.1 e 1 con incrementi di 0.1. Ad un tratto più scuro corrisponde un incremento di k_P . La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

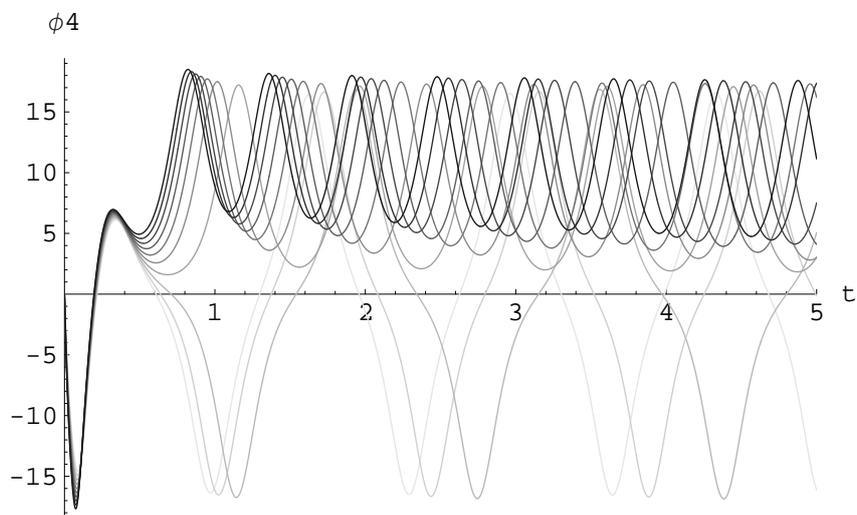


Figura 6.85: L'andamento nel tempo di ϕ_4 con costanti k date da (6.26) per $k_{P_{INC}}$ che varia tra 0.1 e 1 con incrementi di 0.1. Ad un tratto più scuro corrisponde un incremento di k_P . La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

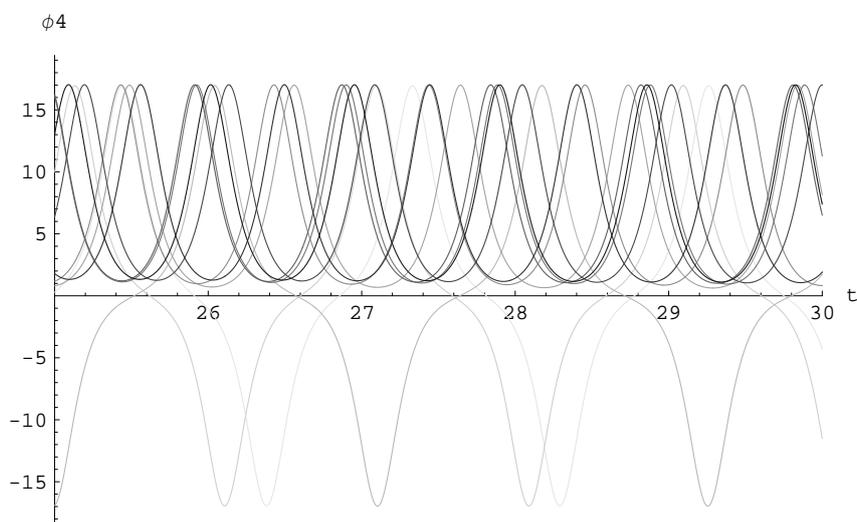


Figura 6.86: L'andamento nel tempo di ϕ_4 con costanti k date da (6.26) per $k_{P_{INC}}$ che varia tra 0.1 e 1 con incrementi di 0.1. Ad un tratto più scuro corrisponde un incremento di k_P . La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

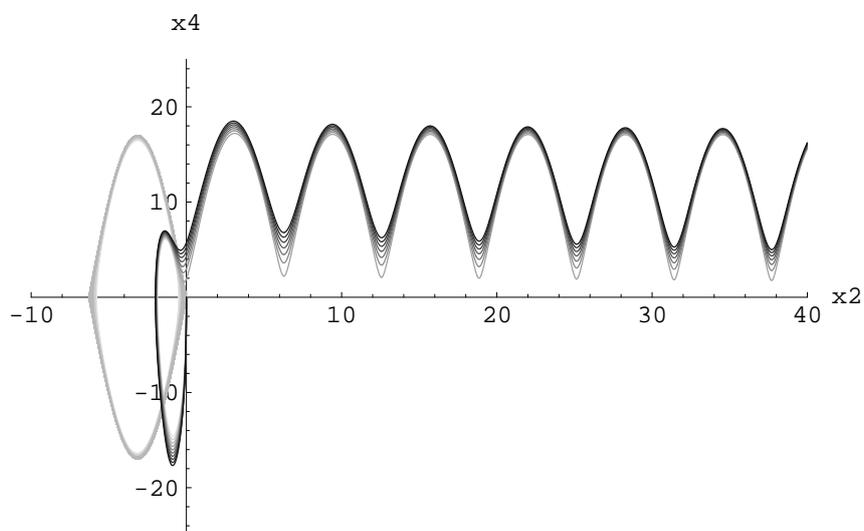


Figura 6.87: La proiezione sul piano x_2x_4 della traiettoria $O^+(\xi)$ per costanti k date da (6.26) con k_{PINC} che varia tra 0.1 e 1 con incrementi di 0.1. Ad un tratto più scuro corrisponde un incremento di k_P . La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $t \in [0, 100]$.

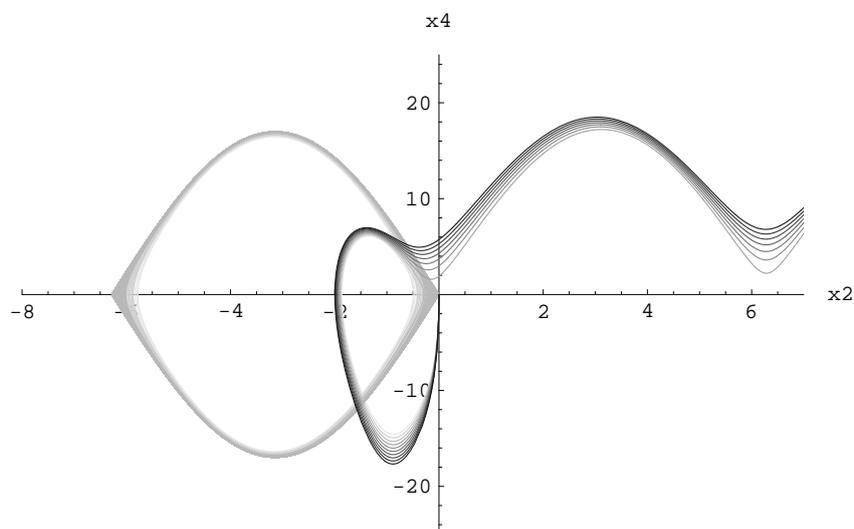


Figura 6.88: La proiezione sul piano x_2x_4 della traiettoria $O^+(\xi)$ per costanti k date da (6.26) con k_{PINC} che varia tra 0.1 e 1 con incrementi di 0.1. Ad un tratto più scuro corrisponde un incremento di k_P . La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Inoltre $t \in [0, 100]$.

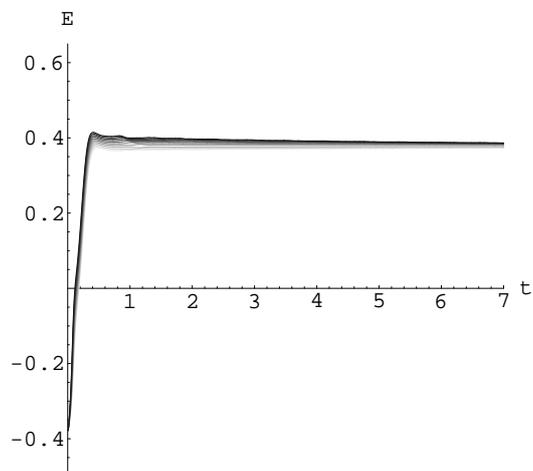


Figura 6.89: L'andamento nel tempo di E , con costanti k date da (6.26) per $k_{P_{INC}}$ che varia tra 0.1 e 1 con incrementi di 0.1. Ad un tratto più scuro corrisponde un incremento di k_P . La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

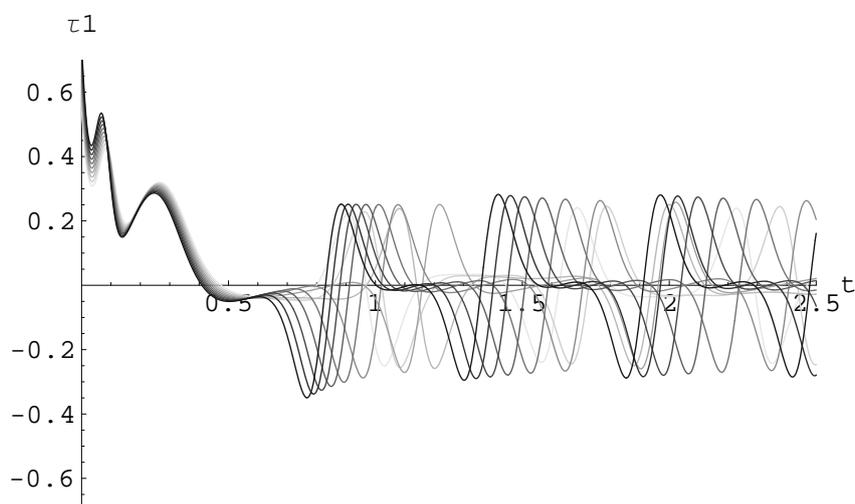


Figura 6.90: L'andamento nel tempo di τ_1 , con costanti k date da (6.26) per $k_{P_{INC}}$ che varia tra 0.1 e 1 con incrementi di 0.1. Ad un tratto più scuro corrisponde un incremento di k_P . La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

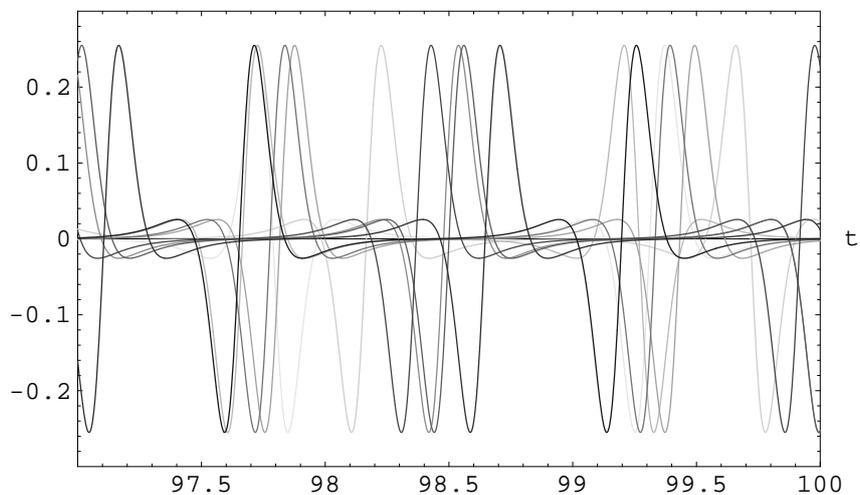


Figura 6.91: L'andamento nel tempo di τ_1 , con costanti k date da (6.26) per $k_{P_{INC}}$ che varia tra 0.1 e 1 con incrementi di 0.1. Ad un tratto più scuro corrisponde un incremento di k_P . La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

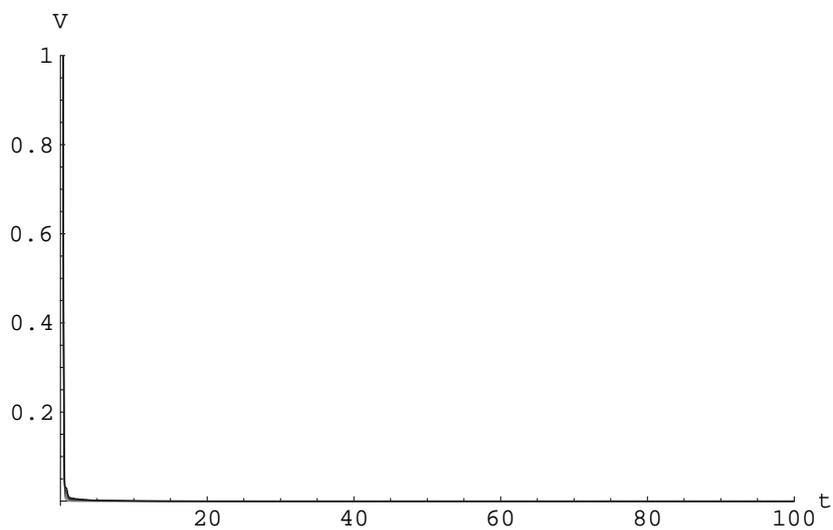


Figura 6.92: L'andamento nel tempo di V , con costanti k date da (6.26) per $k_{P_{INC}}$ che varia tra 0.1 e 1 con incrementi di 0.1. Ad un tratto più scuro corrisponde un incremento di k_P . La condizione iniziale è $(-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

6.10 Alcune considerazioni sul funzionamento del Pendubot retroazionato

Da quanto visto si consiglia pertanto di mantenere k_D e k_P ai valori più bassi possibili, compatibilmente con le condizioni espresse nella Proposizione 5.2.8, mentre k_E dovrebbe essere elevato, per garantire una rapida risposta del Pendubot, ma eventualmente non troppo elevato se si vuole che ϕ_2 sia limitato.

Per intuire il funzionamento del controllore del Pendubot si osservi la seguente Figura 6.93 che si riferisce al caso con $\xi = (-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$ e con $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$, secondo quanto univocamente definito in (6.18).

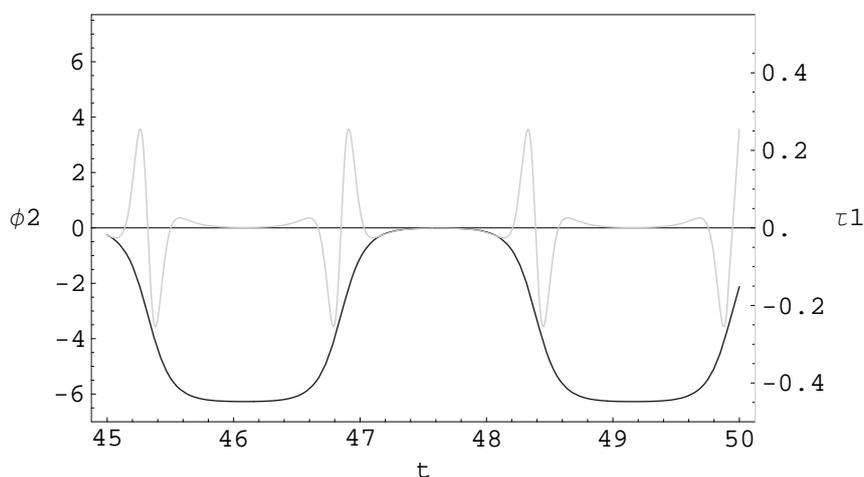


Figura 6.93: Funzionamento del controllore del Pendubot.

Come si intuisce, il controllore dà “una botta al momento giusto” al primo braccio del Pendubot, al fine di aumentare (o diminuire a seconda dei casi) l’energia del Pendubot per farla tendere verso i valori desiderati.

Abbiamo osservato sostanzialmente due tipi di convergenza verso l’insieme N_0^+ : in un caso ϕ_2 resta limitato, ossia il secondo braccio non raggiunge la top position (né fermo né in moto) e continua ad oscillare, in modo simile a quanto fa un pendolo semplice, ma ad ogni oscillazione il secondo braccio raggiunge (fermo) posizioni sempre più vicine alla top position, per effetto dell’azione del controllore.

Nell'altro caso tipico, il secondo braccio continua a ruotare sempre su sè stesso, e dunque ad ogni giro raggiunge la top position con velocità non nulla, ma decrescente ad ogni "giro".

Tutto ciò si deduce facilmente dall'osservazione delle Figure relative alle simulazioni fatte.

Tuttavia non è detto che questi comportamenti tipici non mutino con il passare del tempo: a tal fine si osservi in particolare la Figura 6.76 a pagina 173. In modo inaspettato, ad un certo istante, il secondo braccio compie un giro completo (e dunque raggiunge la top position con velocità non nulla), mentre sia in precedenza, sia successivamente, non raggiungeva la top position. Tali "salti" si potrebbero ripetere all'infinito in modo apparentemente irregolare, come indica anche la Figura 6.77.

Le altre figure presentate sono di facile interpretazione e dunque non saranno ulteriormente commentate (si osservino sempre le relative didascalie): si osservi che, comunque, si ha, come previsto, in ogni caso, la convergenza a N_0^+ .

Vogliamo mostrare che questo è vero, infine, anche se il Pendubot parte in moto: a tal fine scegliamo $\xi = (-\frac{\pi}{2}, \pi, 2, 3)$, con $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$ date da (6.18). La convergenza ad N_0^+ viene corroborata dal risultato presentato in Figura 6.94 e da quello presentato in Figura 6.95.

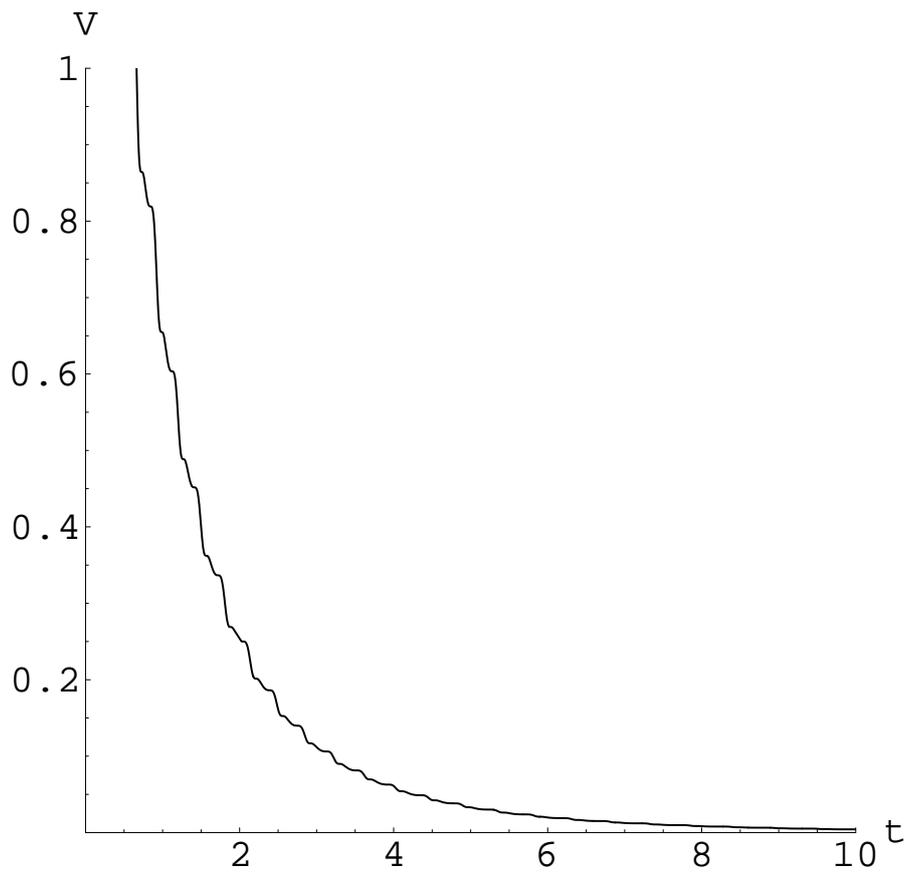


Figura 6.94: La funzione di Lyapunov V per l'evoluzione relativa a $\xi = (-\frac{\pi}{2}, \pi, 2, 3)$ con $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$.

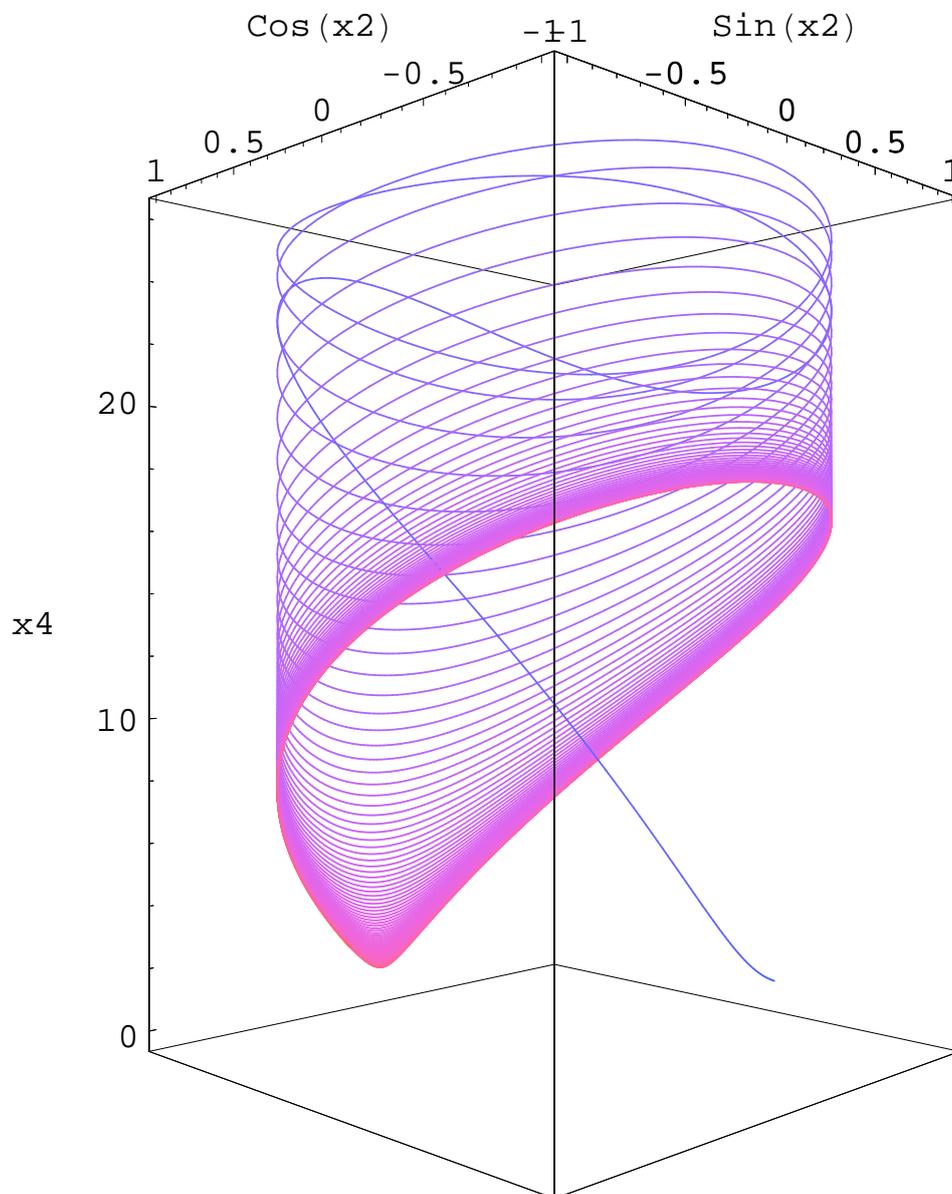


Figura 6.95: La proiezione della traiettoria del Pendubot sul cilindro (di raggio unitario) x_2x_4 relativa al punto iniziale $\xi = (-\frac{\pi}{2}, \pi, 2, 3)$ per $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$, $k_P = k_{P_1}$. Inoltre $t \in [0, 50]$. Con il passare del tempo il colore tende al viola dal blu.

6.11 Il Pendubot potrebbe anche non convergere a N_0^+

Fino ad ora abbiamo dato l'idea che per qualsiasi condizione iniziale diversa da $(\frac{\pi}{2}, -\pi, 0, 0)$ il Pendubot converga a N_0^+ , purché valgano le (5.125) e (5.126). Ma questo in realtà non è vero in generale. Infatti si potrebbe avere anche una convergenza a $x_{E_{IND}} = (\frac{\pi}{2}, -\pi, 0, 0)$, come non escluso dalla Proposizione 5.2.8. La Proposizione 5.2.9 ci assicura che comunque, nelle ipotesi fatte, $x_{E_{IND}}$ è instabile: ma tale punto di equilibrio indesiderato non è in generale una sorgente e dunque potrà esistere una varietà stabile e dunque delle traiettorie che convergono verso $x_{E_{IND}}$ stesso.

Nella Dimostrazione della Proposizione 5.2.9 avevamo detto che è molto facile trovare una situazione in cui valgano le (5.125) e (5.126), ma in cui $x_{E_{IND}}$ è un punto di sella (iperbolico). E dunque, in tale situazione, esisteranno delle traiettorie che convergono a $x_{E_{IND}}$.

L'autore di questo testo ha eseguito alcune valutazioni numeriche usando il software Mathematica ed ha ottenuto sempre che, con chiaro significato di simboli, $Df(x_{E_{IND}})$ presenta una coppia di autovalori complessi e coniugati a parte reale negativa ed una coppia di autovalori complessi e coniugati a parte reale positiva.

Illustreremo adesso un caso nel dettaglio, eseguendo opportune simulazioni con il software Mathematica. Consideriamo dunque sempre lo stesso Pendubot presso il Dipartimento di Informatica e Sistemistica Antonio Ruberti dell'Università La Sapienza di Roma⁴, per cui valgono sempre le (6.10)-(6.14).

Poniamo inoltre $k_E = k_{E_1}$, $k_D = k_{D_1}$ e $k_P = k_{P_1}$ secondo le (6.18).

Si verifica intanto che gli autovalori dello jacobiano⁵ calcolati nel punto di equilibrio indesiderato $x_{E_{IND}} = (\frac{\pi}{2}, -\pi, 0, 0)$ sono:

$$\begin{array}{ll} 0.19326 + 8.42077 i, & 0.19326 - 8.42077 i \\ -5.30614 - 3.55151 i, & -5.30614 + 3.55151 i \end{array}$$

Pertanto il punto di equilibrio indesiderato è un punto di sella iperbolico (per il sistema non lineare del Pendubot retroazionato come per quello linearizzato) e dunque esiste una varietà stabile⁶ per $x_{E_{IND}}$.

Scegliamo la condizione iniziale

$$\xi = \xi_I = (68.3, -133.398, 86.0473, -64.5788) \quad (6.29)$$

⁴in data Febbraio 2006.

⁵del sistema retroazionato

⁶non vuota

che con metodi numerici (usando il software Mathematica) abbiamo stimato essere nelle vicinanze della varietà stabile di x_{EIND} .

Per tali valori otteniamo gli andamenti della soluzione riportati nelle Figure che seguono.

Una simulazione numerica non è capace, per ovvi motivi, di rendere conto esattamente dell'andamento delle traiettorie su una varietà stabile di un punto di sella (iperbolico) di un sistema non lineare. Pertanto, prolungando a sufficienza l'intervallo temporale relativo alla simulazione si noterà una convergenza a V_0 , tanto meno evidente e tanto più ritardata, quanto più accuratamente il punto iniziale sarà scelto (stimato) vicino alla varietà stabile di cui si parla.

Nel caso in esame, abbiamo linearizzato il sistema attorno ad x_{EIND} trovando un punto κ sulla varietà stabile del punto di sella (iperbolico) del sistema linearizzato, con κ molto vicino ad x_{EIND} stesso. Abbiamo poi numericamente individuato $O^-(\kappa)$ per il sistema non lineare del Pendubot retroazionato, trovando un punto $\phi(-T_m a x, \kappa)$. Successivamente abbiamo posto come condizione iniziale $\xi = \xi_I = \phi(-T_m a x, \kappa)$ ed abbiamo avviato la simulazione numerica per $t \in [0, 2T_{max}]$, $T_{max} > 0$. Abbiamo così ottenuto le figure riportate.

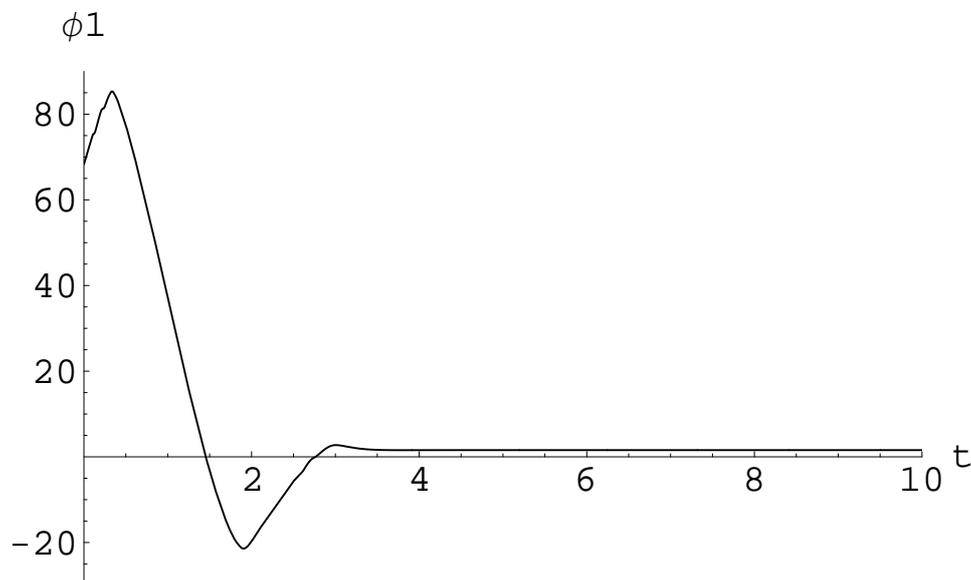


Figura 6.96: L'andamento nel tempo di ϕ_1 per il Pendubot retroazionato e per la condizione iniziale descritti nella Sezione 6.11.

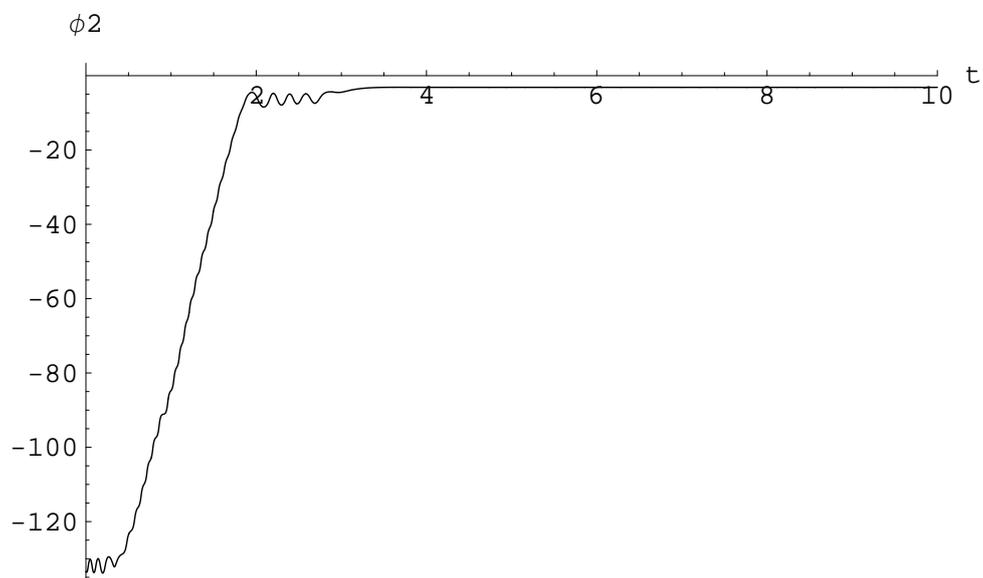


Figura 6.97: L'andamento nel tempo di ϕ_2 per il Pendubot retroazionato e per la condizione iniziale descritti nella Sezione 6.11.

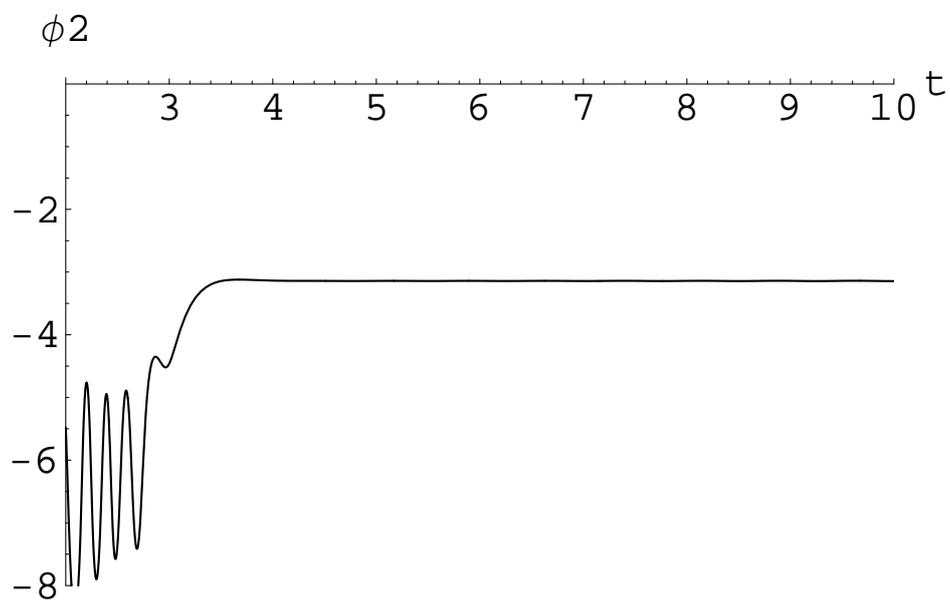


Figura 6.98: L'andamento nel tempo di ϕ_2 , in dettaglio, per il Pendubot retroazionato e per la condizione iniziale descritti nella Sezione 6.11.

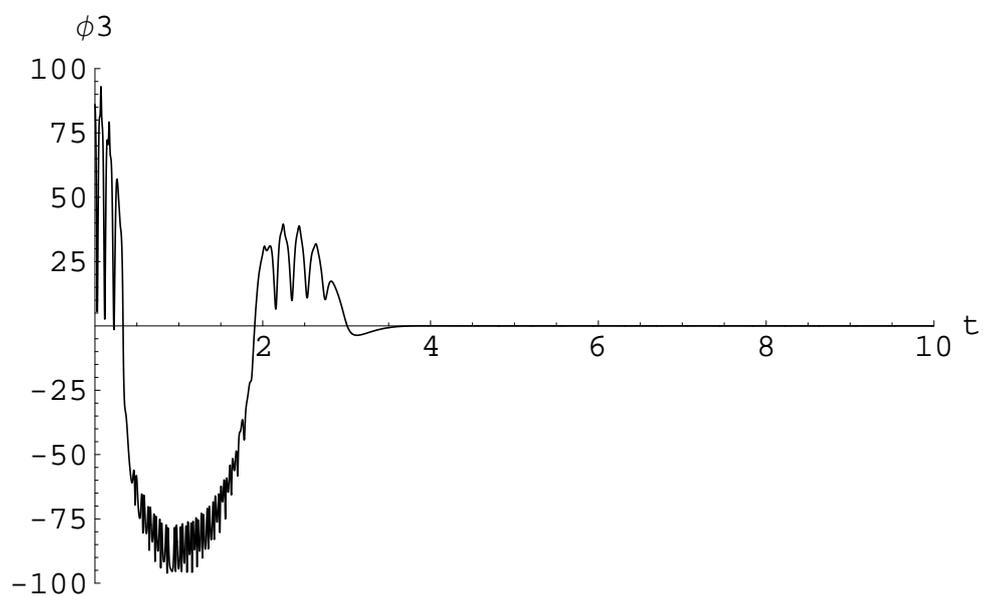


Figura 6.99: L'andamento nel tempo di ϕ_3 per il Pendubot retroazionato e per la condizione iniziale descritti nella Sezione 6.11.

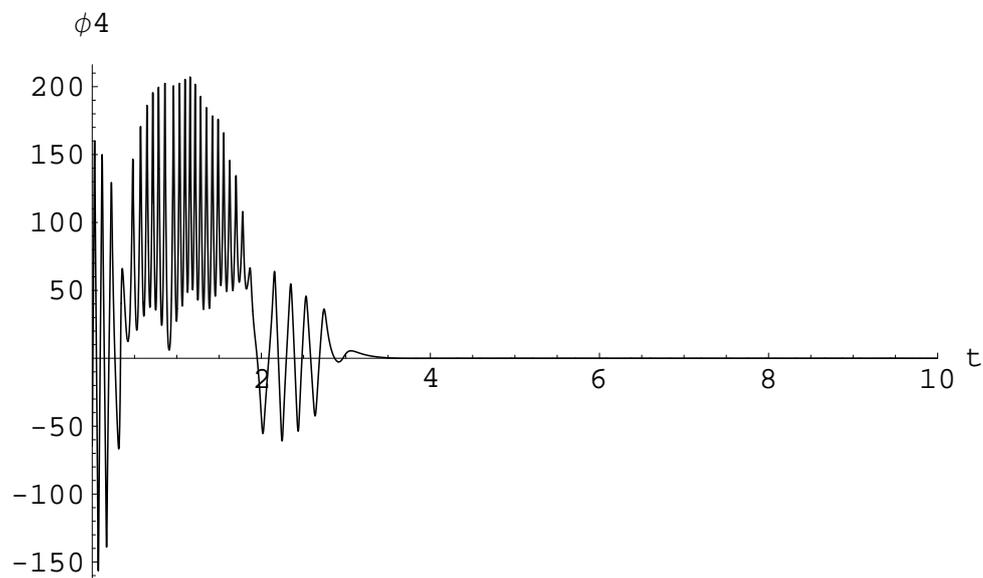


Figura 6.100: L'andamento nel tempo di ϕ_4 per il Pendubot retroazionato e per la condizione iniziale descritti nella Sezione 6.11.

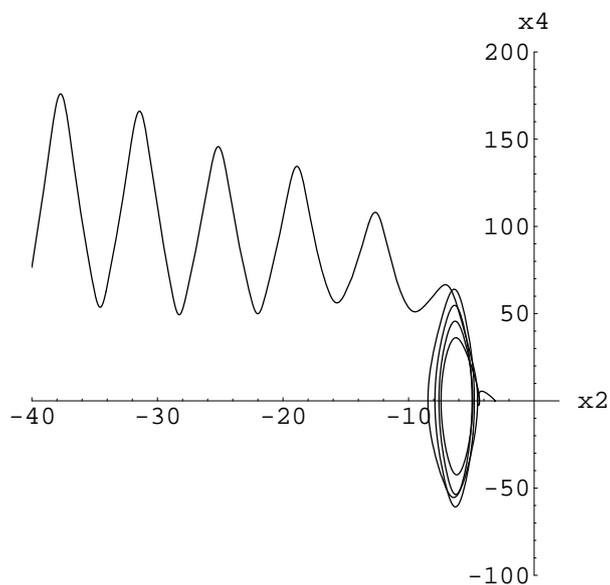


Figura 6.101: La proiezione della traiettoria relativa alla condizione iniziale ed ai parametri descritti nella Sezione 6.11 sul piano x_2x_4 . $t \in [0, 10]$

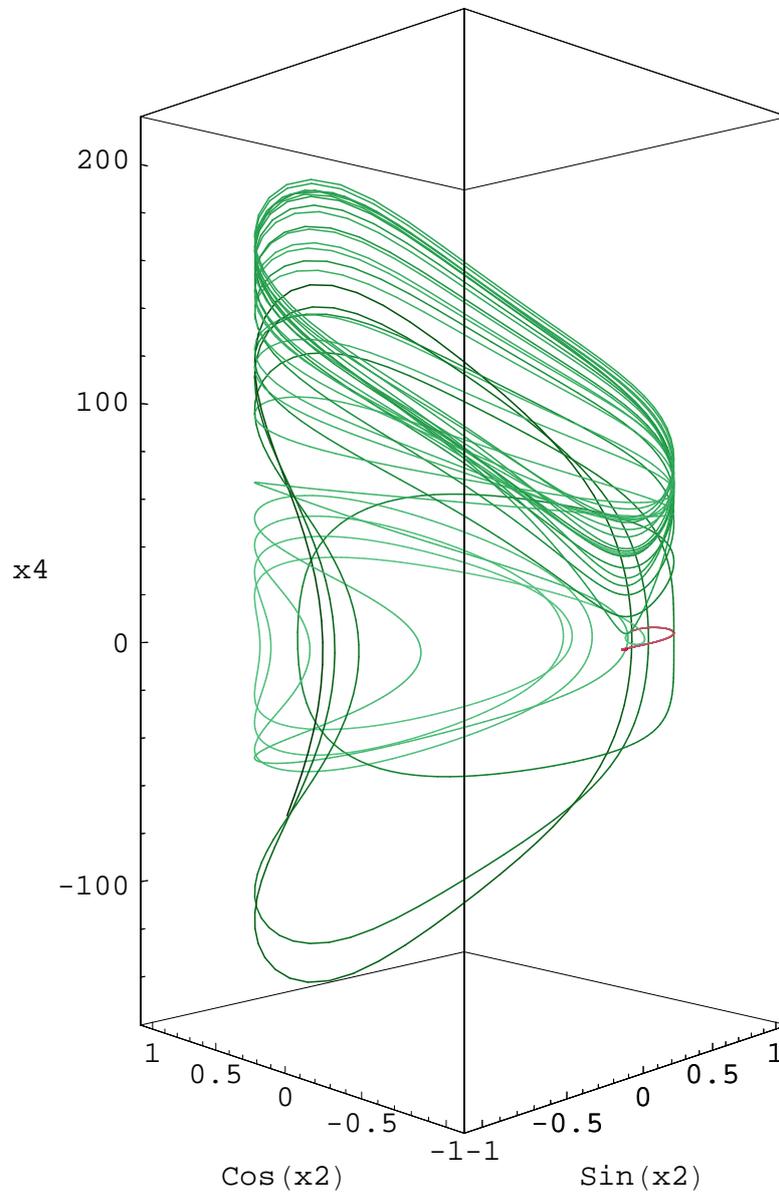


Figura 6.102: La proiezione della traiettoria relativa alla condizione iniziale ed ai parametri descritti nella Sezione 6.11 (rappresentata) sul cilindro (di raggio unitario) x_2x_4 . $t \in [0, 10]$ I colori mutano dal verde al rosso.

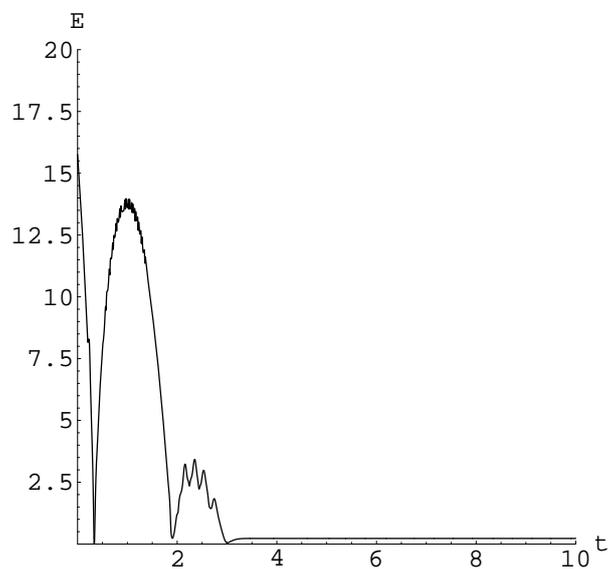


Figura 6.103: L'andamento temporale dell'energia per il sistema descritto nella Sezione 6.11.

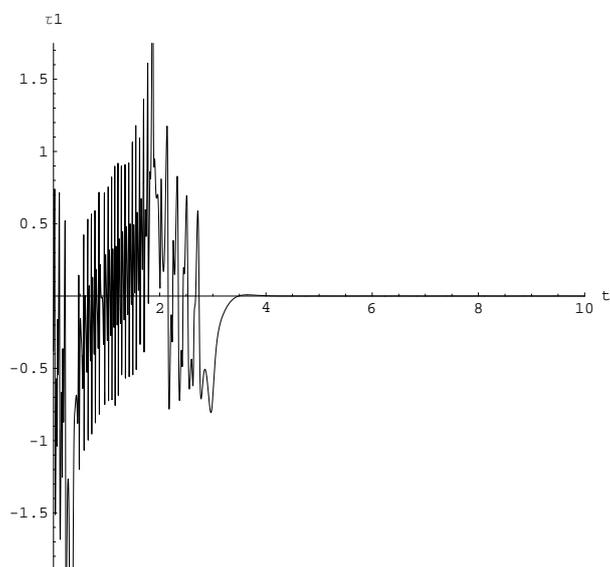


Figura 6.104: L'andamento temporale dell'ingresso di controllo τ_1 per il sistema descritto nella Sezione 6.11.

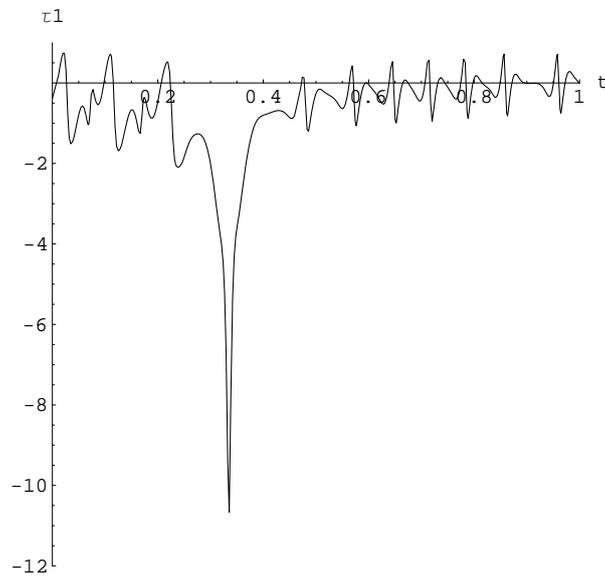


Figura 6.105: L'andamento temporale dell'ingresso di controllo τ_1 per il sistema descritto nella Sezione 6.11, in dettaglio.

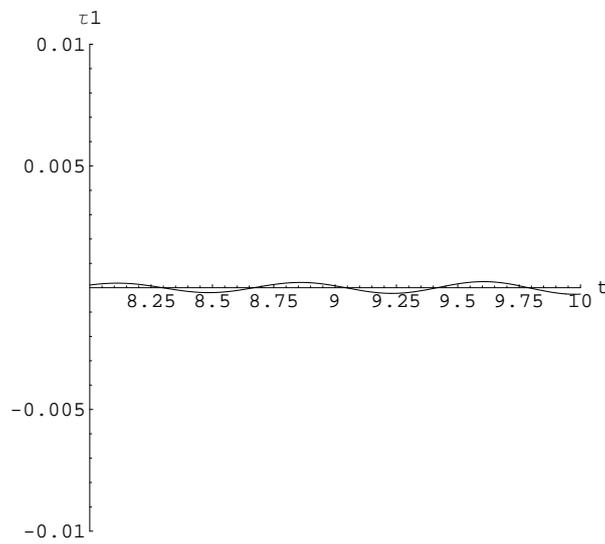


Figura 6.106: L'andamento temporale dell'ingresso di controllo τ_1 per il sistema descritto nella Sezione 6.11, in dettaglio.

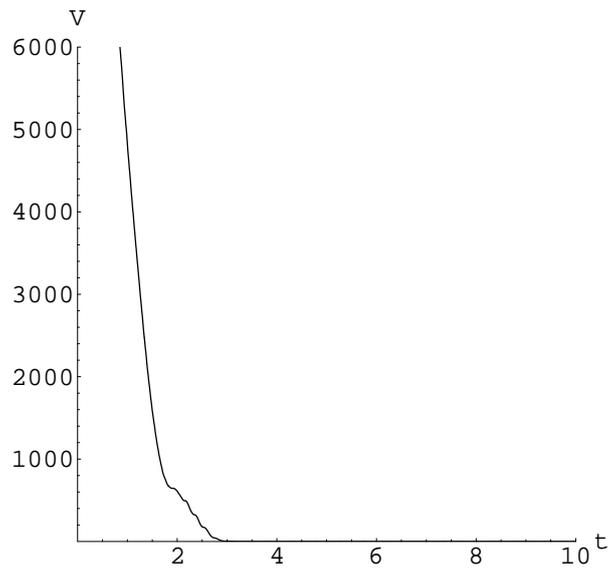


Figura 6.107: L'andamento temporale della funzione di Lyapunov per il sistema descritto nella Sezione 6.11.

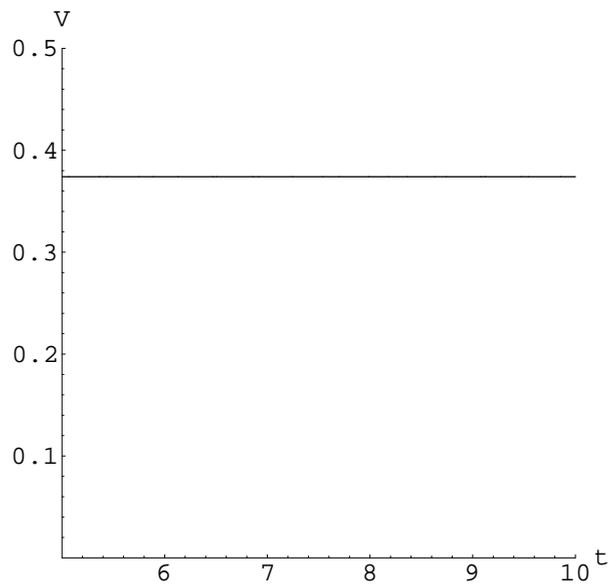


Figura 6.108: L'andamento temporale della funzione di Lyapunov per il sistema descritto nella Sezione 6.11, in dettaglio. Notare che V non sembra avvicinarsi a $V_0 = N_0^+$.

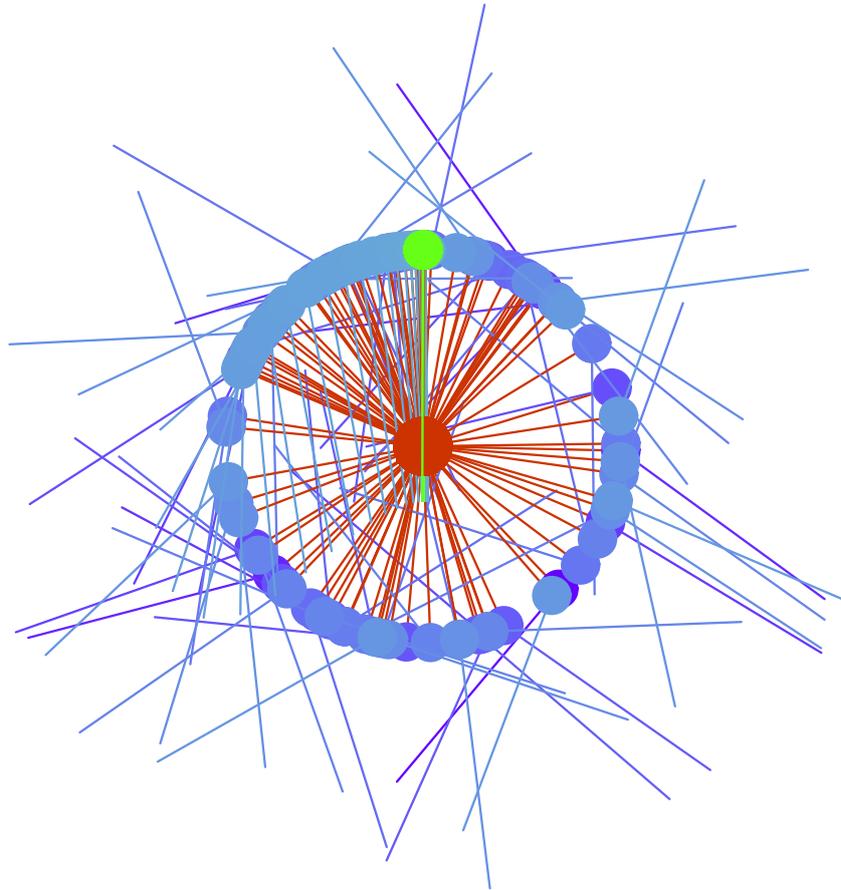


Figura 6.109: L'andamento del Pendubot per la situazione descritta nella Sezione 6.11. Per t crescente il secondo link tende al colore verde. Notare la chiara convergenza verso il punto di equilibrio indesiderato.

6.12 Conclusioni

In conclusione nel presente capitolo si è mostrato attraverso una ampia serie di simulazioni numeriche l'efficienza del controllore proposto per il Pendubot nel Capitolo 5. Abbiamo visto come l'evoluzione del sistema converga, come desiderato, verso l'insieme N_0^+ : tale convergenza può avvenire tipicamente in due modi differenti: o il secondo braccio del Pendubot continua a girare⁷ e ad ogni giro la *top position* viene avvicinata con sempre minore velocità (e pertanto il sistema tende a restare più a lungo nelle vicinanze della top position) oppure il secondo braccio oscilla⁸, invertendo il suo moto, e raggiungendo ad ogni oscillazione una quota sempre più vicina alla top position. Tuttavia non è detto che tali comportamenti tipici rimangano inalterati all'infinito nel tempo: abbiamo visto infatti un caso in cui dopo molte volte che il secondo braccio ha invertito il suo moto, all'improvviso lo stesso compie un giro completo, oltrepassando in moto la top position: si veda ancora a tale proposito la Figura 6.76 a pag. 173.

Abbiamo peraltro mostrato come possano esistere delle varietà stabili relative ad $x_{E_{IND}}$ e l'esistenza di tali varietà stabili è stata corroborata da opportune simulazioni numeriche, entro i limiti di validità di una simulazione numerica in questi casi: infatti abbiamo precisato come una simulazione numerica non sia adatta per mostrare traiettorie appartenenti a varietà stabili di punti di sella, poiché la inevitabile imprecisione della simulazione stessa, nonché l'impossibilità di stimare in generale esattamente le condizioni iniziali⁹, farà inevitabilmente sì che per $t \rightarrow \infty$ i risultati della simulazione siano completamente inattendibili.

Se un punto ξ appartenesse alla varietà stabile di $x_{E_{IND}}$ per una data scelta dei parametri k_E, k_D, k_P basterà provare a variare tali parametri per fare sì che $O(\xi)$ converga a N_0^+ . Chiaramente, come sempre, devono valere le (5.125) e (5.126) e si tenga sempre a mente la Proposizione 5.2.8.

Il controllore proposto dunque è globale, eccetto che per i punti appartenenti alla varietà stabile di $x_{E_{IND}}$: nella pratica però basterà una minima perturbazione per fare convergere in ogni caso l'evoluzione del sistema $\phi(t, \xi)$ verso N_0^+ .

⁷e dunque ϕ_2 mostra la tendenza ad essere illimitato.

⁸con ϕ_2 che, in tali condizioni, è limitato.

⁹in modo t.c. queste condizioni appartengano alla varietà stabile del punto di sella non lineare

Le costanti k_D e k_P dovrebbero essere appena sufficienti a garantire la verità delle ipotesi della Proposizione 5.2.8, se si vuole avere un controllore con una risposta soddisfacente: tale risultato discende, euristicamente, dalle simulazioni effettuate facendo variare i parametri k del controllore.

Il Lettore osservi, infine, come gli strumenti messi a disposizione dalla prima parte del testo abbiano permesso, con opportune considerazioni costruttive, la teorizzazione del controllore del Pendubot: tale teorizzazione non è comunque una semplice *applicazione* al caso particolare di risultati generali, ma costituisce un discorso positivo, non banale, in cui si sono *adoperati* gli strumenti teorici appresi per costruire risultati nuovi, con un ragionamento specifico.

Considerazioni finali

In questo testo si sono presentati i concetti di base della Teoria dei Sistemi Dinamici non lineari. Le definizioni essenziali ed i principali risultati propedeutici, quali il concetto di soluzione e di punto di equilibrio e il Teorema di riduzione a sistemi del primo ordine, sono stati presentati nei Capitoli **1** e **2**, in cui si è data anche una classificazione dei punti di equilibrio e delle traiettorie. Nel Capitolo **4** si sono introdotte le funzioni di Lyapunov e si è presentato il teorema di invarianza e di LaSalle. Nel Capitolo **3** si è parlato di sistemi planari integrabili.

I risultati presentati sono stati usati, in modo costruttivo, per giungere a teorizzare un controllore di un sistema sottoattuato, il Pendubot, al fine di realizzarne lo swing up.

Come già accennato nella prefazione, chiaramente, gli argomenti *non* trattati nel presente testo sono innumerevoli: non si è parlato di sistemi integrabili in \mathbb{R}^n , non si è accennato alle mappe, non si è parlato della possibilità di studiare sistemi debolmente non lineari come perturbazioni di sistemi lineari, non si sono affrontati i temi legati al controllo di un sistema dinamico non lineare per sistemi generici. Non è stato affrontato il problema della ricerca di soluzioni periodiche e non si è parlato di teoria delle biforcazioni, per studiare come variano le caratteristiche di un sistema dinamico nello spazio dei parametri dello stesso.

Inoltre, come ricordato nel Capitolo **1** e nella Introduzione, lo studio di un sistema dinamico varia da caso a caso e non è sufficiente sapere quali sono gli strumenti disponibili, ma occorre anche acquisire la perizia, l'esperienza e l'intuito necessari ad usarli, come si intuisce anche dall'esempio del Pendubot. E, come in tutte le cose, occorre anche una buona dose di fortuna per giungere a risultati pienamente soddisfacenti. Inoltre lo studio di un sistema dinamico richiede sempre un approccio cosiddetto "interdisciplinare" nel quale confluiscono conoscenze di Analisi Matematica e Funzionale, di

Fisica, di Calcolo Variazionale, di Topologia, di Calcolo numerico¹⁰ oltre che strettamente di Teoria dei Sistemi: infatti la Teoria dei Sistemi trae beneficio da risultati provenienti da tutti questi campi del Sapere che non possono, ovviamente, considerarsi, ai fini pratici, l'uno indipendente dall'altro.

Nella Bibilografia il Lettore troverà una scelta di testi utili per completare ed approfondire gli argomenti trattati in questo scritto, nonchè per apprendere quanto qui è stato tralasciato.

¹⁰e di Logica e di Filosofia...

Bibliografia

- [1] Bernd Aulbach: Gewöhnliche Differenzialgleichungen, Spektrum Akademischer Verlag, 2. ed, 2004.
- [2] Ferdinand Verhulst: Nonlinear differential equations and dynamical systems, Berlin, Springer Verlag, 2. ed, 1996.
- [3] Edward Scheinerman: Invitation to dynamical systems. Disponibile su <http://www.mts.jhu.edu/~ers/book.pdf>
- [4] John Guckenheimer, Philip Holmes: Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields, New York, Springer-Verlag, 3. ed, 1993.
- [5] Gerald Teschl: Ordinary differential equations and dynamical systems, disponibile su <http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-ode/>
- [6] Nam Parshab Bhatia, Giorgio Szegő: Stability Theory of Dynamical Systems, Berlin, Springer Verlag, 1970.
- [7] Cvitanović et al.: Chaos Book (Part I: Deterministic Chaos), disponibile su <http://www.chaosbook.org/>
- [8] A. A. Andronov, A. A. Vitt e S. E. Khaikin: Theory of oscillators; tradotto dal russo da F. Immirzi. La traduzione è edita da W. Fishwick. - Oxford [etc.]: Pergamon press, 1966.
- [9] Michael Tabor: Chaos and integrability in nonlinear dynamics, Wiley, New York, 1989.
- [10] Hassan Khalil: Nonlinear Systems, Macmillan Publishing Company, 1992.
- [11] Isabelle Fantoni, Rogelio Lozano e Mark W. Spong: Energy Based Control of the Pendubot, IEEE transactions on Automatic Control Vol 45, n. 4, April 2000.

- [12] Shiriaev e Kolesnichenko: On global properties of passivity based control for swinging pendubot, IEEE, Proc 39th IEEE Conference on Control of Oscillations and Chaos, p.33-36 Vol. 1, 2000.
- [13] Shiriaev: On Passivity Based Control for Partial Stabilization of Underactuated Systems, Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, Sydney, Australia, Dicembre 2000.
- [14] O. Kolesnichenko, A.S. Shiriaev: Partial stabilization of underactuated Euler-Lagange systems via a class of feedback transformations, Systems & Control Letters 45 (2002) 121-132, Elsevier Science B.V., 2002.