

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ROMA  
TOR VERGATA

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Corso di Laurea in Ingegneria dei Modelli e dei Sistemi

Tesi di Laurea di Primo Livello

**Statica dei Gusci Cilindrici in  
Regime Membranale**

Relatore

**Prof. Paolo Podio-Guidugli**

Laureando

**Francesco Bonaldi**

**Anno Accademico 2008/2009**



# Ringraziamenti

Desidero ringraziare sentitamente, oltre al Prof. Podio-Guidugli per aver creduto nelle mie capacità, l'Ing. Antonino Favata, che ha dimostrato una grandissima disponibilità nel seguirmi in questo lavoro, che senza il suo prezioso supporto sarebbe stato difficile portare a termine con successo.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Aspetti geometrici e cinematici</b>	<b>1</b>
1.1 Regione a forma di guscio . . . . .	1
1.2 Richiami di Geometria Differenziale . . . . .	3
1.3 Richiami di Cinematica . . . . .	8
<b>2 Stato tensionale ed equilibrio</b>	<b>11</b>
2.1 Descrittori superficiali di sforzo e coppia . . . . .	11
2.2 Legame costitutivo . . . . .	15
2.3 Caratteristiche di sollecitazione . . . . .	15
2.4 Equazioni di bilancio in forma locale . . . . .	17
2.4.1 Considerazioni sul tensore di sforzo superficiale . . . . .	20
2.5 Regime di sforzo membranale . . . . .	20
<b>3 Gusci cilindrici</b>	<b>25</b>
3.1 Geometria e cinematica . . . . .	25
3.2 Equazioni di equilibrio . . . . .	28
3.3 Gusci cilindrici in pressione . . . . .	30
<b>Bibliografia</b>	<b>37</b>



# Introduzione

Obiettivo di questo lavoro è esporre un modello matematico per lo studio dello stato di spostamento, deformazione e sforzo in una struttura a guscio che si trovi in un regime di equilibrio speciale e semplice, quello *membranale*. Pur non potendo né volendo compiere un completo percorso deduttivo, nei primi due capitoli raccoglieremo, nel modo più sintetico possibile, i concetti indispensabili per comprendere gli sviluppi successivi, discutendo in particolare la nozione di equilibrio membranale. Nel terzo e ultimo capitolo concentreremo l'attenzione sui gusci cilindrici e, dopo averne passato in rivista le principali proprietà, esporremo in dettaglio la soluzione esatta ed esplicita del problema di equilibrio membranale che abbiamo risolto, quello in cui, come accade nelle coperture pneumatiche per impianti sportivi, *il guscio si sostiene per effetto della sovrappressione che viene creata all'interno*.

I gusci costituiscono una classe di corpi continui tridimensionali nei quali due dimensioni prevalgono sulla terza, lo spessore; dal punto di vista geometrico, possono essere riguardati come regioni tridimensionali sottili, modellate su superfici. La superficie su cui un guscio viene modellato è detta *superficie media*; la geometria di una struttura a guscio ne risulta completamente determinata. L'idea che sottende tutta la meccanica delle strutture sottili, quindi anche qualunque teoria dei gusci, è quella che le equazioni che ne regolano il comportamento debbono

risultare alquanto più semplici di quelle che occorrerebbe risolvere se li si considerasse corpi tridimensionali di forma particolare. Ovvio che ogni semplificazione si paghi in termini di dettaglio dell'informazione che si consegue: la difficoltà da affrontare e risolvere è conseguire un bilanciamento ottimo tra la complicazione residua del problema che si sa come risolvere, una volta effettuata la prescelta semplificazione del problema tridimensionale originale, e la rilevanza tecnica dell'informazione che la soluzione di quel problema semplificato fornisce.

Il metodo di attacco che adoperiamo per ottenere le equazioni della meccanica dei gusci è un metodo di deduzione sistematica dal problema tridimensionale che ha due caratteri distintivi: il primo, *postulare una rappresentazione a priori del campo di spostamenti possibili* (nel nostro caso, quella proposta da Kirchhoff e ripresa da Love), parametrizzata da poche funzioni di forma definite sulla superficie media; il secondo, *ridurre per equipollenza* alla superficie media sia i carichi applicati sia lo stato di sforzo del problema tridimensionale. Con questo metodo, le equazioni di equilibrio vengono formulate sulla superficie media in termini di due campi tensoriali, l'uno di *sforzo* l'altro di *momento*, che descrivono lo stato di sollecitazione interna; tramite equazioni costitutive tridimensionali che descrivono una risposta elastica lineare compatibile con i vincoli interni inerenti alla rappresentazione prescelta per il campo di spostamenti, quelle equazioni di equilibrio possono poi essere trasformate in un sistema di equazioni alle derivate parziali, che consentono di determinare tanto le funzioni parametro della rappresentazione che quelle eventuali componenti dello stato di sollecitazione interna che hanno natura di reazioni vincolari necessarie per mantenere la forma prescritta del campo di spostamenti.

Nel nostro caso, il sistema da risolvere è composto da cinque equazioni differenziali alle derivate parziali in cinque incognite scalari: i tre campi che para-



metrizzano il campo di spostamenti di Kirchhoff-Love (due per gli spostamenti estensionali e uno per quelli flessionali) e i due che forniscono le componenti reattive del tensore di sforzo. Questo sistema non è in generale facilmente risolubile in forma chiusa. Si può tuttavia individuare un particolare stato di sollecitazione interna, il cosiddetto *regime membranale*, in presenza del quale il campo tensoriale di sforzo, che si riduce alle sole tre componenti attive, è calcolabile senza dover introdurre il legame costitutivo. Inoltre, una delle tre equazioni di equilibrio non è di carattere differenziale, ma algebrico, mentre le due equazioni di bilancio dei momenti si riducono a condizioni di compatibilità sui carichi esterni. Per definizione, il regime membranale si ottiene quando il campo tensoriale di momento è nullo, così come le componenti reattive dello sforzo. Com'era da attendersi, restrizioni a priori così forti sul tipo di soluzioni del problema che si vuol risolvere non consentono di assegnare i dati liberamente: soluzioni del tipo cercato sono possibili soltanto se i carichi applicati soddisfano precise condizioni necessarie di compatibilità. Nel Capitolo 3, come anticipato, determiniamo la soluzione membranale del problema di equilibrio di un guscio cilindrico in pressione. L'aspetto particolarmente semplice di questa soluzione riduce il calcolo di una struttura siffatta all'applicazione di due formule molto semplici, che forniscono gli sforzi assiale e circonferenziale in termini di pochi parametri: raggio e spessore del guscio, pressione applicata, e modulo di Poisson del materiale impiegato.



# Capitolo 1

## Aspetti geometrici e cinematici

### 1.1 Regione a forma di guscio

Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $\{O; \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\}$  per lo spazio euclideo tridimensionale  $\mathcal{E}$ . Scelta l'origine  $O \in \mathcal{E}$ , si instaura una corrispondenza biunivoca tra i punti  $P$  dello spazio euclideo  $\mathcal{E}$  e i vettori  $\mathbf{p}$  dello spazio vettoriale delle traslazioni  $\mathcal{V}$  ad esso associato; in virtù di questo fatto, nel seguito scriveremo  $\mathbf{p}$  in luogo di  $P$ , nonostante si tratti di elementi appartenenti ad insiemi differenti.

Consideriamo una superficie  $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ , che sia compatta, regolare ed orientata, con  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  il campo di versori normali  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}$ . Ammettiamo inoltre che  $\mathcal{S}$  possieda in  $\mathcal{E}$  un intorno “tubolare” (cf. [2], §2.2) e che sia dotata di una *parametrizzazione globale*

$$\mathcal{E} \supset \mathcal{S} \ni \mathbf{x} \leftrightarrow (z^1, z^2) \in S \subset \mathbb{R}^2.$$

Definiamo *regione a forma di guscio*, modellata sulla superficie  $\mathcal{S}$  ed avente

spessore  $2\varepsilon$ , un sottoinsieme  $\mathcal{G}(\varepsilon) \subset \mathcal{E}$  tale che l'applicazione

$$(z^1, z^2, \zeta) \leftrightarrow \mathbf{p} = \mathbf{p}(z^1, z^2, \zeta) := \mathbf{x}(z^1, z^2) + \zeta \mathbf{n}(\mathbf{x}(z^1, z^2)), \quad \zeta \in (-\varepsilon, \varepsilon), \quad (1.1)$$

sia una parametrizzazione ortogonale globale su  $\mathcal{G}(\varepsilon)$  (si veda la fig. (1.1)). Il fatto che la parametrizzazione globale debba essere anche ortogonale non è essenziale ai fini della definizione di regione a forma di guscio, ma renderà più semplici le espressioni analitiche di sforzi, spostamenti e deformazioni in termini di componenti. Dalla definizione di  $\mathbf{p}$ , si nota che esso è interpretabile geometricamente come il generico punto della fibra materiale di  $\mathcal{G}(\varepsilon)$  ortogonale a  $\mathcal{S}$  e passante per  $\mathbf{x}$ ; il significato geometrico di  $|\zeta|$  è la distanza di  $\mathbf{p} \in \mathcal{G}(\varepsilon)$  dalla sua unica proiezione ortogonale  $\mathbf{x}$  su  $\mathcal{S}$ . Per individuare il generico punto  $\mathbf{p}$  della regione a forma di guscio, abbiamo scelto un sistema di coordinate dette *normali*. Lo spessore di  $\mathcal{G}(\varepsilon)$  dev'essere scelto in modo tale che

$$\varepsilon \leq \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} \left\{ \frac{1}{k_1(\mathbf{x})}, \frac{1}{k_2(\mathbf{x})} \right\}$$

dove  $k_1$  e  $k_2$  sono le curvatures principali di  $\mathcal{S}$  in  $\mathbf{x}$ , altrimenti a un fissato punto  $\mathbf{p} \in \mathcal{G}(\varepsilon)$  potrebbero corrispondere più proiezioni ortogonali su  $\mathcal{S}$ , e dunque la parametrizzazione di  $\mathcal{G}(\varepsilon)$  non sarebbe una corrispondenza biunivoca tra terne di coordinate e punti di  $\mathcal{G}(\varepsilon)$ . Un'ulteriore condizione su  $\varepsilon$  è che tale quantità sia minore del minimo dei raggi delle sfere tangenti a  $\mathcal{S}$  in più di un punto.

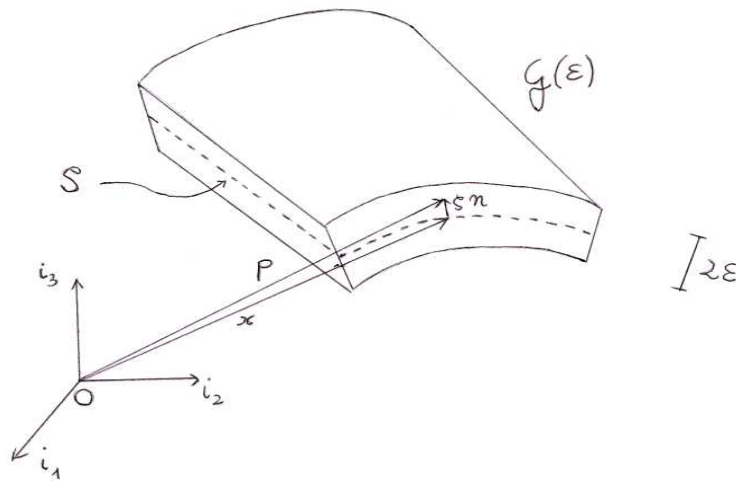


Figura 1.1: Regione a forma di guscio

## 1.2 Richiami di Geometria Differenziale

In virtù del fatto che  $\mathcal{S}$  ammette una parametrizzazione globale, si possono considerare la mappa

$$(z^1, z^2) \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{x}(z^1, z^2),$$

e la sua inversa,

$$\mathbf{x} \mapsto z^\alpha = z^\alpha(\mathbf{x}), \quad \alpha = 1, 2.$$

Consideriamo i vettori

$$\mathbf{e}_\alpha(z^1, z^2) := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z^\alpha}(z^1, z^2) = \mathbf{x}_{,\alpha}(z^1, z^2).$$

Si può assegnare un'orientazione, e quindi un campo di versori normali sulla superficie per ogni  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ , secondo la regola:

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) := \frac{\mathbf{e}_1(\mathbf{x}) \times \mathbf{e}_2(\mathbf{x})}{|\mathbf{e}_1(\mathbf{x}) \times \mathbf{e}_2(\mathbf{x})|}.$$

L'insieme  $\{\mathbf{e}_1(\mathbf{x}), \mathbf{e}_2(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x})\}$  si dice *base covariante* di  $\mathcal{V}$ . Il piano tangente alla superficie viene poi definito come:

$$\mathcal{T}_{\mathbf{x}} := \text{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \{\mathbf{p} \in \mathcal{E} : (\mathbf{p} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Si può costruire un'altra base per  $\mathcal{V}$ , detta *base controvariante*, cioè, l'insieme  $\{\mathbf{e}^1(\mathbf{x}), \mathbf{e}^2(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x})\}$  i cui elementi sono i vettori:

$$\mathbf{e}^\alpha(\mathbf{x}) := \frac{\partial z^\alpha}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = z_{,\mathbf{x}}^\alpha(\mathbf{x}).$$

Si ha allora la relazione

$$\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \delta^\alpha_\beta \tag{1.2}$$

tra i vettori della base covariante e quelli della base controvariante, dove  $\delta^\alpha_\beta$  è il simbolo di Kronecker.

Se il sistema di coordinate che si sta utilizzando su  $\mathcal{S}$  è *ortogonale*, ovvero  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}$ , i vettori delle basi covariante e controvariante sono sovrapposti in direzione e verso; vale inoltre la relazione

$$|\mathbf{e}^\alpha| = \frac{1}{|\mathbf{e}_\alpha|}$$

che, insieme con l'ortogonalità del sistema di coordinate e con la (1.2), fornisce una relazione che permette di calcolare i vettori della base controvariante a partire da quelli della base covariante:

$$\mathbf{e}^\alpha = \frac{\mathbf{e}_\alpha}{|\mathbf{e}_\alpha|^2}; \tag{1.3}$$

è inoltre possibile introdurre un'ulteriore base di  $\mathcal{V}$ , detta *base fisica*, costituita

dai versori

$$\mathbf{e}_{\langle\alpha\rangle} := \frac{\mathbf{e}_\alpha}{|\mathbf{e}_\alpha|} = \frac{\mathbf{e}^\alpha}{|\mathbf{e}^\alpha|}, \quad \alpha = 1, 2,$$

e dal versore normale  $\mathbf{n}$ . Tale base risulta essere ortonormale per ogni  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ . Il vantaggio di disporre di una base fisica sta nel fatto che le componenti che rappresentano un campo tensoriale o vettoriale – avente determinate dimensioni fisiche – in questa base, hanno tutte le stesse dimensioni (quelle del campo di interesse), essendo la base composta da versori.

Di un campo vettoriale  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$  sulla superficie  $\mathcal{S}$  si definiscono le componenti covarianti, controvarianti e fisiche, rispettivamente, nel seguente modo:

$$u_i := \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i, \quad u^i := \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}^i, \quad u_{\langle i \rangle} := \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{\langle i \rangle}$$

e quindi  $\mathbf{u}$  si rappresenta in ciascuna di tali basi nei modi seguenti:

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}^i = u^i \mathbf{e}_i = u_{\langle i \rangle} \mathbf{e}_{\langle i \rangle}. \quad (1.4)$$

Analoghe definizioni vengono date per i tensori (cf. [3], pag. 13). Il  *tensore metrico superficiale*  su  $\mathcal{S}$  è definito come:

$${}^S\mathbf{I} := \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^2 = \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}^\alpha = \mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_{\langle\alpha\rangle} \otimes \mathbf{e}_{\langle\alpha\rangle}{}^1. \quad (1.5)$$

Il  *tensore di Weingarten*  è definito come

$${}^S\mathbf{L} := -{}^S\nabla\mathbf{n} = -\mathbf{n}_{,\alpha} \otimes \mathbf{e}^\alpha. \quad (1.6)$$

---

<sup>1</sup>Abbiamo utilizzato qui, e utilizzeremo nel seguito, la convenzione di Einstein per cui la presenza di una coppia di indici ripetuti sottointende l'esecuzione di una somma di termini monomi, uno per ogni determinazione ammessa degli indici.

Sia il tensore metrico superficiale che il tensore di Weingarten sono simmetrici; nella definizione del tensore di Weingarten si fa uso del concetto di gradiente superficiale di un campo vettoriale definito su  $\mathcal{S}$ ; per approfondimenti a riguardo e per un'illustrazione sintetica di alcune nozioni di calcolo differenziale su varietà, si rimanda a [3], §3.2, §3.6.

Fissiamo ora l'attenzione su una regione a forma di guscio  $\mathcal{G}(\varepsilon)$  modellata sulla superficie media  $\mathcal{S}$  dotata di parametrizzazione ortogonale. La posizione  $\mathbf{p}$  di un punto di tale regione è assegnata dalla relazione (1.1). Consideriamo i vettori

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_\alpha(z^1, z^2, \zeta) &:= \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z^\alpha}(z^1, z^2, \zeta) = \mathbf{p}_{,\alpha} = \mathbf{e}_\alpha + \zeta \mathbf{n}_{,\alpha}, \\ \mathbf{g}_3(z^1, z^2, \zeta) &:= \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \zeta}(z^1, z^2, \zeta) = \mathbf{p}_{,3} = \mathbf{n}.\end{aligned}\tag{1.7}$$

Segue immediatamente da queste ultime due relazioni che  $\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{p})$  e che  $\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0$ ,  $\forall \mathbf{p} \in \mathcal{G}(\varepsilon)$ ,  $\alpha = 1, 2$ . La *base covariante* in  $\mathbf{p} \in \mathcal{G}(\varepsilon)$  è data da  $\{\mathbf{g}_1(\mathbf{p}), \mathbf{g}_2(\mathbf{p}), \mathbf{n}(\mathbf{p})\}$ ; la *base controvariante* è data dall'insieme  $\{\mathbf{g}^1(\mathbf{p}), \mathbf{g}^2(\mathbf{p}), \mathbf{n}(\mathbf{p})\}$ , dove

$$\mathbf{g}^\alpha(\mathbf{p}) := \frac{\partial z^\alpha}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}).$$

Il *tensore metrico* in  $\mathbf{p} \in \mathcal{G}(\varepsilon)$  è dato da

$$\mathbf{G} := {}^S\mathbf{G} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n},$$

$${}^S\mathbf{G} := \mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{g}^\alpha = \mathbf{g}^\alpha \otimes \mathbf{g}_\alpha,\tag{1.8}$$

dove  ${}^S\mathbf{G}$  è chiamato *tensore metrico superficiale* relativo alla superficie  $\mathcal{S}_\mathbf{p}$  parallela a  $\mathcal{S}$  per  $\mathbf{p}$ . Osserviamo che la parametrizzazione di  $\mathcal{G}(\varepsilon)$  è ortogonale se si sta usando su  $\mathcal{S}$  un sistema di coordinate *principali* (sia il tensore di Weingarten che



il tensore metrico sono diagonali). In particolare, essendo in questo caso

$${}^S\mathbf{L}\mathbf{e}_\alpha = -\mathbf{n}_{,\alpha} = k_\alpha\mathbf{e}_\alpha,$$

con  $\alpha$  fissato e, al solito,  $k_1$  e  $k_2$  le curvatures principali, il tensore di Weingarten ammette la decomposizione spettrale

$${}^S\mathbf{L} = k_\alpha\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}^\alpha; \quad (1.9)$$

per i vettori covarianti e controvarianti in  $\mathbf{p}$  si hanno poi le relazioni (considerando questa volta  $\alpha$  fissato):

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_\alpha(z^1, z^2, \zeta) &= (1 - \zeta k_\alpha(z^1, z^2)) \mathbf{e}_\alpha(z^1, z^2), \\ \mathbf{g}^\alpha(z^1, z^2, \zeta) &= (1 - \zeta k_\alpha(z^1, z^2))^{-1} \mathbf{e}^\alpha(z^1, z^2). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Le basi covariante e controvariante in  $\mathbf{x}$  e le corrispondenti basi in  $\mathbf{p}$ , generico punto della fibra di  $\mathcal{G}(\varepsilon)$  perpendicolare a  $\mathcal{S}$  per  $\mathbf{x}$ , sono correlate da due tensori detti *shifter*, definiti come segue:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) &:= \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{p}) \otimes \mathbf{e}^\alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) &:= \mathbf{g}^\alpha(\mathbf{p}) \otimes \mathbf{e}_\alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

I tensori

$$\begin{aligned} {}^S\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) &:= \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{p}) \otimes \mathbf{e}^\alpha(\mathbf{x}), \\ {}^S\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) &:= \mathbf{g}^\alpha(\mathbf{p}) \otimes \mathbf{e}_\alpha(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.12)$$

si dicono *shifter superficiali*. Il tensore  $\mathbf{A}$  trasforma linearmente le combinazioni lineari dei vettori della base covariante in  $\mathbf{x}$  in quelle dei vettori della base cova-

riante in  $\mathbf{p}$ , mentre  $\mathbf{B}$  trasforma linearmente le combinazioni lineari dei vettori della base controvariante in  $\mathbf{x}$  in quelle dei vettori della base controvariante in  $\mathbf{p}$ . I corrispondenti shifter superficiali trasformano linearmente il piano tangente a  $\mathcal{S}$  in  $\mathbf{x}$  nel piano tangente a  $\mathcal{S}_{\mathbf{p}}$  in  $\mathbf{p}$ . Per ulteriori considerazioni e approfondimenti su tali concetti, si veda [3], §3.4.

### 1.3 Richiami di Cinematica

Le ipotesi cinematiche alla base della teoria dei gusci (ovvero, che le fibre materiali ortogonali alla superficie media nella configurazione di riferimento rimangano approssimativamente ortogonali ad essa a seguito dell'azione dei carichi esterni, con variazione di lunghezza trascurabile) si formalizza nella condizione di *vincolo interno*:

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}(\mathbf{p}))\mathbf{n}(\mathbf{p}) = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{G}(\varepsilon). \quad (1.13)$$

dove  $\mathbf{E}$  è il  *tensore di deformazione* , legato al campo di spostamenti  $\mathbf{u}$  è dalla relazione di congruenza tipica della cinematica lineare dei continui:

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) := \text{sym}(\nabla \mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T). \quad (1.14)$$

La condizione (1.13) definisce i *campi di spostamento di Kirchhoff-Love*. Si può far vedere (cf. [3], §4.1) che l'espressione generale del campo di spostamenti  $\mathbf{u}(\mathbf{p})$  che risolve il sistema di equazioni alle derivate parziali (1.13) è

$$\mathbf{u}(z^1, z^2, \zeta) = {}^S \mathbf{A}(z^1, z^2, \zeta) \hat{\mathbf{u}}(z^1, z^2) - \zeta {}^S \nabla w(z^1, z^2) + w(z^1, z^2) \mathbf{n}(z^1, z^2), \quad (1.15)$$

con

$$\hat{\mathbf{u}}(z^1, z^2) \cdot \mathbf{n}(z^1, z^2) = 0.$$

Qui, il vettore  $\hat{\mathbf{u}}$  rappresenta lo spostamento *estensionale*,  $w\mathbf{n}$  rappresenta lo spostamento *flessionale* o *normale* dei punti della superficie media, mentre  ${}^S\nabla$  è l'operatore di gradiente superficiale. A partire da tale espressione del campo di spostamenti si possono derivare, ad esempio, le componenti covarianti  $E_{ij} := \mathbf{E} \cdot \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) del tensore di deformazione, facendo uso della nozione di gradiente di un campo vettoriale. Si ottiene (cf. [3], §4.2):

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \Gamma_{ij}^h u_h,$$

dove  $\Gamma_{ij}^h := \mathbf{g}_{i,j} \cdot \mathbf{g}^h$  sono i *simboli di Christoffel* in  $\mathcal{G}(\varepsilon)$  (cf. [3], §3.6).

Se si dispone di un sistema di coordinate principali su  $\mathcal{S}$  e dunque di una base fisica in ogni punto di  $\mathcal{G}(\varepsilon)$ , si può dare un'interpretazione fisica delle componenti del tensore di deformazione, nel modo seguente: avendo definito

$$E_{\langle\alpha\beta\rangle} := \mathbf{E} \cdot \mathbf{g}_{\langle\alpha\rangle} \otimes \mathbf{g}_{\langle\beta\rangle} \quad (\alpha, \beta = 1, 2),$$

si ha che, se  $\alpha = \beta$ , tale componente fornisce la misura della deformazione locale di estensione (o contrazione, se il suo segno è negativo) delle fibre materiali parallele al versore  $\mathbf{g}_{\langle\alpha\rangle}$ ; se  $\alpha \neq \beta$ ,  $E_{\langle\alpha\beta\rangle}$  misura la deformazione locale di scorrimento che si osserva nel piano tangente alla superficie  $\mathcal{S}_{\mathbf{p}}$ , ossia il cambiamento di angolo tra le fibre materiali aventi direzioni ortogonali  $\mathbf{g}_{\langle\alpha\rangle}$  e  $\mathbf{g}_{\langle\beta\rangle}$  nella configurazione di riferimento.



# Capitolo 2

## Stato tensionale ed equilibrio

### 2.1 Descrittori superficiali di sforzo e coppia

Vogliamo descrivere lo stato di sforzo nella regione a forma di guscio  $\mathcal{G}(\varepsilon)$  mediante campi vettoriali e tensoriali definiti sulla superficie media, così come sono definiti su tale superficie i campi scalari e vettoriali che compaiono nell'espressione del generico spostamento di Kirchhoff-Love. A tale scopo, facendo riferimento alla figura (2.1), consideriamo una arbitraria curva  $\mathcal{C}$  su  $\mathcal{S}$ , e costruiamo su  $\mathcal{C}$  la superficie  $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$  avente come sostegno  $\mathcal{C}$  e come generatrici i segmenti di lunghezza  $2\varepsilon$  diretti come la normale  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  al variare di  $\mathbf{x}$  lungo  $\mathcal{C}$  (cf. [3], §6.1). Siano:  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$  il versore della normale a  $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$  in  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{m}(\mathbf{p})$  il versore della normale a  $\mathcal{S}_{\mathcal{C}}$  nel generico punto della fibra per  $\mathbf{x}$  perpendicolare a  $\mathcal{S}$ ,  $\mathbf{t}(\mathbf{p}, \mathbf{m}(\mathbf{p}))$  il vettore tensione nello stesso punto, relativamente alla giacitura orientata da  $\mathbf{m}(\mathbf{p})$ , si ha la relazione di Cauchy

$$\mathbf{t}(\mathbf{p}, \mathbf{m}(\mathbf{p})) = \mathbf{T}(\mathbf{p})\mathbf{m}(\mathbf{p}), \quad \mathbf{T}(\mathbf{p}) \in \text{Sym}, \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{G}(\varepsilon).$$

Introduciamo ora due campi vettoriali,  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{c}$ , che chiamiamo rispettivamente *vettore superficiale di sforzo* e *vettore superficiale di coppia*, definiti sulla superficie

media, che modellano lo stato di sforzo sulla fibra per  $\mathbf{x}$  lungo la normale a  $\mathcal{S}$ .

Tali campi sono definiti mediante le *condizioni di equipollenza*:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{m}(\mathbf{x})) &:= \int_{S_c} \mathbf{t}(\mathbf{p}, \mathbf{m}(\mathbf{p})), \\ \int_{\mathcal{C}} \mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{m}(\mathbf{x})) &:= \int_{S_c} (\mathbf{p} - \mathbf{x}) \times \mathbf{t}(\mathbf{p}, \mathbf{m}(\mathbf{p})) = \int_{S_c} \zeta \mathbf{n} \times \mathbf{t}(\mathbf{p}, \mathbf{m}(\mathbf{p})),\end{aligned}$$

dove

$$\mathbf{p} = \mathbf{x} + \zeta \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad \zeta \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Utilizzando le formule di trasformazione delle misure di superficie e di integrazione sullo spessore (cf. [3], §3.5), nonché la relazione di Cauchy, si ottiene, per localizzazione:

$$\begin{aligned}\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{m}(\mathbf{x})) &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \alpha \mathbf{T}(\mathbf{p}) \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \mathbf{m}(\mathbf{x}) d\zeta, \\ \mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{m}(\mathbf{x})) &= \mathbf{n}(\mathbf{x}) \times \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \alpha \zeta \mathbf{T}(\mathbf{p}) \mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \mathbf{m}(\mathbf{x}) d\zeta, \\ &\alpha := \det {}^S \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{p}).\end{aligned}$$

Inserendo in queste formule la definizione dello shifter  $\mathbf{B}$  si arriva ad avere per  $\mathbf{s}$  l'espressione:

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{m}(\mathbf{x})) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \alpha (\mathbf{T} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{e}_i) \mathbf{m} d\zeta = \left[ \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \alpha (\mathbf{T} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{e}_i) d\zeta \right] \mathbf{m};$$

definendo poi

$$\mathbf{s}_i := \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \alpha \mathbf{T} \mathbf{g}^i d\zeta, \quad \mathbf{S} := \mathbf{s}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha \quad (2.1)$$

si ottiene un'espressione per  $\mathbf{s}$  analoga a quella che fornisce la tensione locale su una giacitura in un continuo tridimensionale ordinario di Cauchy:

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, \mathbf{m}(\mathbf{x})) = \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{m}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}.$$

Analogamente, per il vettore di coppia  $\mathbf{c}$  si ha:

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{m}(\mathbf{x})) = \mathbf{n} \times \left[ \left( \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \alpha \zeta \mathbf{T} \mathbf{g}^i d\zeta \right) \otimes \mathbf{e}_i \right] \mathbf{m};$$

introducendo i campi di natura vettoriale e tensoriale:

$$\mathbf{m}_\beta := \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \alpha \zeta \mathbf{T} \mathbf{g}^\beta d\zeta, \quad \mathbf{M} := \mathbf{m}_\beta \otimes \mathbf{e}_\beta \quad (2.2)$$

si può dare la seguente espressione per  $\mathbf{c}$ :

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{m}(\mathbf{x})) = (\mathbf{N} \mathbf{m}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\alpha) \mathbf{m}(\mathbf{x}) = (\mathbf{N} \mathbf{M}) \mathbf{m}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}$$

dove  $\mathbf{N}$  è l'unico tensore emisimmetrico tale che, per ogni  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ , si ha  $\mathbf{N} \mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{v}$ .

Il vincolo interno (1.13), relativo ai campi di spostamento e deformazione, implica una decomposizione del tensore di sforzo  $\mathbf{T}$  in una parte attiva  $\mathbf{T}^{(A)}$  e una reattiva  $\mathbf{T}^{(R)}$ . Nello specifico (cf. [3], §5.3), la parte reattiva può essere rappresentata come

$$\mathbf{T}^{(R)} = \tau_\alpha^{(R)} (\mathbf{g}_\alpha \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{g}_\alpha) + \tau_3^{(R)} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n},$$

dove  $\tau_\alpha^{(R)} = T^{(R)\alpha 3} = T^{(R)3\alpha}$ ; facendo agire il tensore  $\mathbf{T}$  sui vettori della base

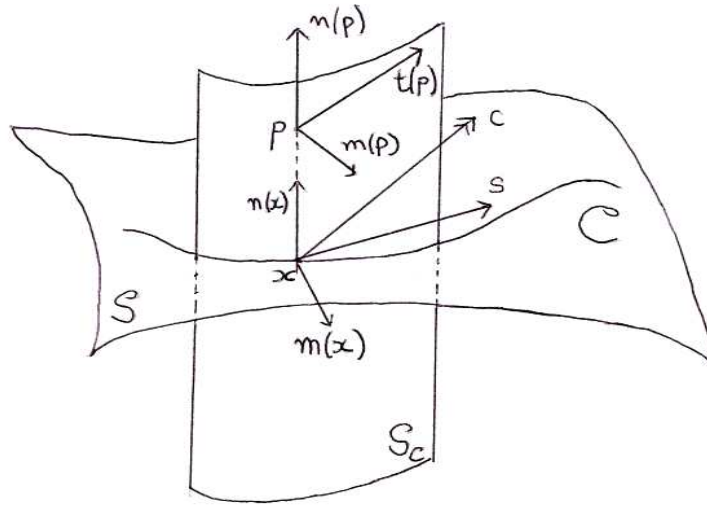


Figura 2.1: Vettori superficiali di sforzo e coppia

controvariante si ottiene quindi

$$\mathbf{T}g^\alpha = \mathbf{T}^{(A)}g^\alpha + \mathbf{T}^{(R)}g^\alpha = \mathbf{T}^{(A)}g^\alpha + \tau_\alpha^{(R)}\mathbf{n},$$

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{T}^{(R)}\mathbf{n} = \tau_\alpha^{(R)}g^\alpha + \tau_3^{(R)}\mathbf{n}.$$

La conseguenza è che anche i campi  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{s}_\alpha$  e  $\mathbf{m}_\alpha$  sono di natura “mista” (in particolare, le componenti dei tensori  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{M}$  si dividono in alcune interamente attive ed altre interamente reattive), mentre il vettore  $\mathbf{s}_3$  ha natura puramente reattiva. I campi  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{C} := \mathbf{N}\mathbf{M}$  vengono chiamati rispettivamente *tensoriale di sforzo* e *tensoriale di coppia*, mentre  $\mathbf{M}$  è il *tensoriale di momento*. Le dimensioni fisiche di  $\mathbf{S}$  sono quelle di una forza per unità di lunghezza, mentre  $\mathbf{C}$  ed  $\mathbf{M}$  hanno le dimensioni di una coppia per unità di lunghezza, quindi di una forza.



## 2.2 Legame costitutivo

La relazione costitutiva  $\mathbf{T}^{(A)} = \mathbb{C}[\mathbf{E}]$  che lega la parte attiva del tensore degli sforzi di Cauchy  $\mathbf{T}$  al tensore di deformazione  $\mathbf{E}$  in un guscio elastico, lineare e trasversalmente isotropo, è descritta dal tensore di elasticità

$$\mathbb{C} = 2\tilde{\mu} {}^s\mathbf{G} \boxtimes {}^s\mathbf{G} + \tilde{\lambda} {}^s\mathbf{G} \otimes {}^s\mathbf{G}, \quad (2.3)$$

dove  $\boxtimes$  denota l'operazione di coniugazione ortogonale tra tensori<sup>1</sup>. Il tensore di elasticità inverso, tale che  $\mathbf{E} = \mathbb{C}^{-1}[\mathbf{T}^{(A)}]$ , è

$$\mathbb{C}^{-1} = \frac{1}{2\tilde{\mu}} {}^s\mathbf{G} \boxtimes {}^s\mathbf{G} - \frac{\tilde{\lambda}}{4\tilde{\mu}(\tilde{\lambda} + \tilde{\mu})} {}^s\mathbf{G} \otimes {}^s\mathbf{G}. \quad (2.4)$$

Le costanti  $\tilde{\lambda}$  e  $\tilde{\mu}$  sono i *moduli di Lamé*, espressi in termini del modulo di Young  $\tilde{E}$  e del modulo di Poisson  $\tilde{\nu}$  dalle relazioni seguenti:

$$\tilde{\lambda} = \frac{\tilde{E}\tilde{\nu}}{(1-\tilde{\nu})(1+\tilde{\nu})}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\tilde{E}}{2(1+\tilde{\nu})}. \quad (2.5)$$

Per una trattazione esauriente, si rimanda a [3], cap. 5.

## 2.3 Caratteristiche di sollecitazione

Per definizione, il tensore  $\mathbf{S}$  verifica la condizione

$$\mathbf{S}\mathbf{n} = \mathbf{0},$$

---

<sup>1</sup> $(\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B})\mathbf{C} := \mathbf{ACB}^T, \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Lin}.$

che equivale a

$$S^{i3} := \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^3 = \mathbf{S}\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}^i = 0, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Quindi, le componenti controvarianti non nulle in generale del tensore  $\mathbf{S}$  sono

$$S^{i\alpha} := \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^\alpha = \mathbf{s}_\alpha \cdot \mathbf{e}^i. \quad (2.6)$$

Un discorso del tutto analogo vale per le componenti di  $\mathbf{M}$  e di  $\mathbf{C}$ . Le componenti dei tensori  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{M}$  rappresentano le *caratteristiche di sollecitazione*. Le componenti attive dello sforzo,  $S^{\alpha\beta}$ , si dicono *forze membranali*, due normali (per  $\alpha = \beta$ ) e due di taglio (per  $\alpha \neq \beta$ ); le due componenti reattive  $S^{3\alpha}$  sono le *forze di taglio trasversali*. Le componenti attive  $M^{\alpha\beta}$  del tensore di momento vengono chiamate *momenti flettenti* se  $\alpha = \beta$ , *momenti torcenti* se  $\alpha \neq \beta$ ; non esiste una nomenclatura particolare per le due componenti reattive  $M^{3\alpha}$ .

Le forze membranali e i momenti flettenti e torcenti hanno le seguenti espressioni in termini della parte attiva di  $\mathbf{T}$ :

$$\begin{aligned} S^{\alpha\beta} &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \alpha \mathbf{T}^{(A)} \mathbf{g}^\beta \cdot \mathbf{e}^\alpha d\zeta, \\ M^{\alpha\beta} &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \alpha \zeta \mathbf{T}^{(A)} \mathbf{g}^\beta \cdot \mathbf{e}^\alpha d\zeta. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Facendo uso del legame costitutivo, si possono esprimere tali componenti in termini di deformazioni (e quindi di spostamenti, ricorrendo alla relazione di

congruenza (1.14)). Si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} S^{\alpha\beta} &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \alpha \left[ 2\tilde{\mu} \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta + \tilde{\lambda} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{g}^\delta \otimes \mathbf{g}_\delta) (\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{g}^\beta) \right] d\zeta, \\ M^{\alpha\beta} &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \alpha\zeta \left[ 2\tilde{\mu} \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{g}^\beta + \tilde{\lambda} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{g}^\delta \otimes \mathbf{g}_\delta) (\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{g}^\beta) \right] d\zeta. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Nella tabella seguente si riassume la natura delle caratteristiche di sollecitazione.

	<b>Sforzi</b>	<b>Momenti</b>
<b>Componenti attive</b>	$S^{11}, S^{12}, S^{21}, S^{22}$	$M^{11}, M^{12}, M^{21}, M^{22}$
<b>Componenti reattive</b>	$S^{31}, S^{32}$	$M^{31}, M^{32}$

## 2.4 Equazioni di bilancio in forma locale

Per dedurre le equazioni locali di equilibrio, cominciamo con il considerare la *riduzione per equipollenza* (v. fig. (2.2)) ai punti della superficie media del sistema di forze agenti nei punti della generica fibra ortogonale a  $\mathcal{S}$  per  $\mathbf{x}$  e sulle superfici inferiore e superiore del guscio. Tale sistema è composto dalle forze per unità di volume  $\mathbf{b}$ , che agiscono nei punti  $\mathbf{p} = \mathbf{x} + \zeta\mathbf{n}$  al variare di  $\zeta$  nell'intervallo  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ , e dalle forze di contatto per unità di superficie  $\mathbf{t}$  che agiscono sulle superfici suddette, cioè, nei punti  $\mathbf{p} = \mathbf{x} \pm \varepsilon\mathbf{n}$ . Integrando tali campi sullo spessore del guscio si ottiene il sistema di forze e coppie per unità di area agenti sulla superficie media:

$$\begin{aligned} {}^S\mathbf{b} &:= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \alpha \mathbf{b} d\zeta + (\alpha \mathbf{t})_{|\mathbf{x} \pm \varepsilon \mathbf{n}}, \\ {}^S\mathbf{f} &:= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \alpha \zeta \mathbf{n} \times \mathbf{b} d\zeta + (\alpha \zeta \mathbf{n} \times \mathbf{t})_{|\mathbf{x} \pm \varepsilon \mathbf{n}} = \mathbf{n} \times {}^S\mathbf{h}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

avendo definito

$${}^S\mathbf{h} := \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \alpha \zeta \mathbf{b} d\zeta + (\alpha \zeta \mathbf{t})|_{x \pm \varepsilon n}.$$

Il sistema di carichi  $({}^S\mathbf{b}, {}^S\mathbf{f})$  agisce su ogni parte  $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ , mentre  $(\mathbf{s}, \mathbf{c})$  rappresenta

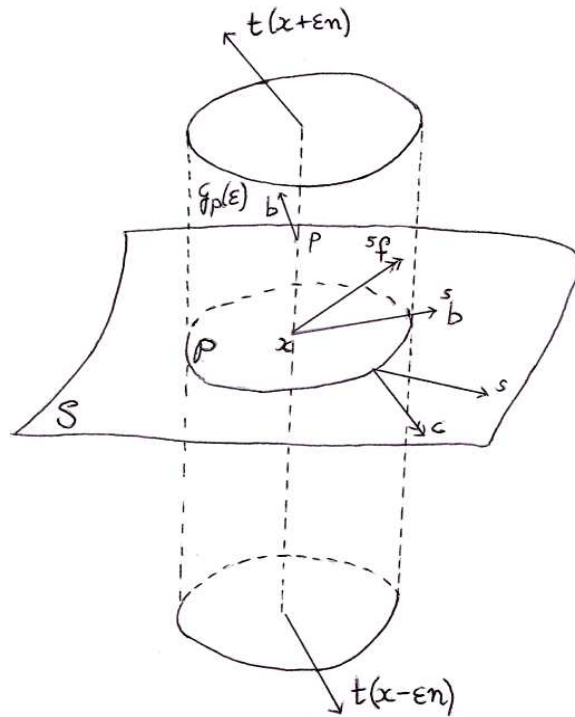


Figura 2.2: Riduzione dei carichi alla superficie media

il sistema di carichi per unità di lunghezza della curva  $\partial\mathcal{P}$ , frontiera della parte  $\mathcal{P}$  su  $\mathcal{S}$ .

Le condizioni di bilancio globale degli sforzi e dei momenti si formulano come segue:

$$\int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{s} + \int_{\mathcal{P}} {}^S\mathbf{b} = \mathbf{0},$$

$$\int_{\partial\mathcal{P}} [(\mathbf{x} - \mathbf{o}) \times \mathbf{s} + \mathbf{c}] + \int_{\mathcal{P}} [(\mathbf{x} - \mathbf{o}) \times {}^S\mathbf{b} + {}^S\mathbf{f}] = \mathbf{0}, \quad \forall \mathcal{P} \subset \mathcal{S}, \quad (2.10)$$

dove  $\mathbf{o}$  è il polo rispetto al quale si calcolano i momenti. Inserendo in queste formule le rappresentazioni di  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{c}$  in termini dei corrispondenti tensori di sforzo e di coppia, utilizzando il teorema della divergenza per un tensore e sfruttando l'arbitrarietà del dominio di integrazione, si possono ottenere le versioni *per punti* delle condizioni di bilancio (2.10) *per parti*, e cioè, i due sistemi di equazioni a derivate parziali, con annesse condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} {}^S\text{Div } \mathbf{S} + {}^S\mathbf{b} &= \mathbf{0}, & \mathbf{S}\mathbf{m} &= \mathbf{s}; \\ {}^S\text{Div } \mathbf{C} + \mathbf{e}_\alpha \times \mathbf{s}_\alpha + {}^S\mathbf{f} &= \mathbf{0}, & \mathbf{C}\mathbf{m} &= \mathbf{c}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

dove  ${}^S\text{Div}$  è l'operatore di divergenza superficiale (cf. [3], §3.6). A partire da questa espressione analitica delle condizioni di bilancio puntuale, si possono derivare altre due versioni di tali condizioni, sia in termini di vettori di sforzo e di coppia che in termini di caratteristiche di sollecitazione (cf. [3], §7.2, 7.3). Per i nostri scopi, occorrono le espressioni delle condizioni di bilancio locale in termini di caratteristiche della sollecitazione. Si tratta del seguente sistema di cinque equazioni differenziali alle derivate parziali<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} S^{\delta\alpha}|_\alpha - {}^S L_\alpha^\delta S^{3\alpha} + {}^S b^\delta &= 0, & \delta &= 1, 2, \\ S^{3\alpha}|_\alpha + {}^S L_{\alpha\beta} S^{\beta\alpha} + {}^S b^3 &= 0, \\ M^{\delta\alpha}|_\alpha - S^{3\delta} + {}^S h^\delta &= 0, & \delta &= 1, 2. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Se si esprimono le componenti attive dei tensori  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{M}$  in termini dei tre campi scalari di spostamento  $\hat{u}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) e  $w$ , utilizzando le (2.8), le cinque equazioni che compongono il sistema contengono in totale cinque incognite, ovvero, oltre

---

<sup>2</sup>In queste formule abbiamo usato la notazione che esprime la derivata covariante di  $S^{\delta\alpha}$  rispetto alla coordinata  $\alpha$ , e il concetto di componenti miste per un tensore (cf. [3], §3.6).

queste tre funzioni, le due componenti reattive dello sforzo  $S^{3\alpha}$ .

### 2.4.1 Considerazioni sul tensore di sforzo superficiale

Le relazioni di bilancio locale sulla superficie media possono essere ottenute anche per integrazione sullo spessore delle corrispondenti relazioni valide per un continuo tridimensionale ordinario di Cauchy. In particolare, se si considera la condizione di bilancio locale dei momenti  $\mathbf{T} \in \text{Sym}$  e la si integra sullo spessore del guscio (cf. [3], §7.4), si ottiene la condizione generale:

$$\mathbf{S} + \mathbf{s}_3 \otimes \mathbf{n} - \mathbf{M}^S \mathbf{L}^T \in \text{Sym}. \quad (2.13)$$

Quindi, il tensore di sforzo superficiale  $\mathbf{S}$  risulta simmetrico se e solo se risulta simmetrico il tensore  $\mathbf{s}_3 \otimes \mathbf{n} - \mathbf{M}^S \mathbf{L}^T$ , circostanza che in generale non si realizza.

## 2.5 Regime di sforzo membranale

Lo stato di sollecitazione membranale per un guscio si formalizza nelle seguenti ipotesi sui vettori superficiali di sforzo:

$$\mathbf{s}_\alpha \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \quad \mathbf{s}_3 = \mathbf{0}$$

e sui vettori superficiali di momento:

$$\mathbf{m}_\alpha = \mathbf{0}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Discende immediatamente dalla seconda ipotesi sui vettori di sforzo e da quella sui vettori di momento che la condizione (2.13) fornisce  $\mathbf{S} \in \text{Sym}$ . Si vede anche

facilmente che la prima ipotesi sui vettori di sforzo discende dalle altre (e quindi dalla simmetria di  $\mathbf{S}$ ), infatti, se  $\mathbf{s}_3 = \mathbf{0} = \mathbf{m}_\alpha$ , si ha:

$$\mathbf{s}_\alpha \cdot \mathbf{n} = \mathbf{S}\mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{n} = S^{3\alpha} = \mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{S}\mathbf{n} = 0,$$

in quanto  $\mathbf{S}$  è un campo tensoriale tangenziale.

In virtù di tali ipotesi, il tensore di momento  $\mathbf{M}$  è nullo, mentre *le uniche componenti del tensore di sforzo  $\mathbf{S}$  non nulle sono quelle attive*, della forma  $S^{\alpha\beta}$ , vale a dire le forze di membrana. Esaminiamo l'aspetto che le equazioni di bilancio locale assumono:

$$\begin{aligned} S^{\delta\alpha}|_\alpha + {}^S b^\delta &= 0, \quad \delta = 1, 2; \\ {}^S L_{\alpha\beta} S^{\beta\alpha} + {}^S b^3 &= 0, \end{aligned} \tag{2.14}$$

per quanto riguarda il bilancio locale degli sforzi; la pretesa di assumere nulle le azioni flessionali, invece, fa sì che le due equazioni di bilancio locale dei momenti giochino il ruolo di condizioni di compatibilità sui dati del problema, cioè, sui carichi esterni che agiscono su  $\mathcal{G}(\varepsilon)$ :

$${}^S h^\delta = 0, \quad \delta = 1, 2. \tag{2.15}$$

Notiamo subito che le prime due equazioni di bilancio locale degli sforzi sono di carattere differenziale, mentre la terza è di carattere algebrico; nel complesso, questo sistema di equazioni è notevolmente più semplice di quello generale. dunque esse risultano notevolmente semplificate rispetto al caso generale. Le condizioni (2.15), necessarie ma non sufficienti, sono soddisfatte, ad esempio, nel caso di un guscio cilindrico o sferico sottoposto a pressione su una o entrambe le superfici

inferiore e superiore, in quanto affermano che il vettore  ${}^S\mathbf{h}$  dev'essere parallelo alla normale  $\mathbf{n}$  in ogni punto della superficie media: il problema che esamineremo rientra in questi casi esemplificativi.

Un'altra osservazione importante riguarda il modo in cui si può condurre la soluzione del problema elastico per un guscio in regime membranale. Per la simmetria di  $\mathbf{S}$ , il sistema (2.14) si compone di tre equazioni in tre incognite, le forze normali  $S^{11}$ ,  $S^{22}$  e le forze di taglio  $S^{12}$ ,  $S^{21} = S^{12}$ . Pertanto, se si dispone di condizioni al contorno in termini di sforzo, il guscio risulta staticamente determinato. Neppure è necessario far ricorso al legame costitutivo per esprimere le componenti attive di  $\mathbf{S}$  in termini di deformazioni e spostamenti, ai fini della risoluzione. Dunque, la soluzione del problema di determinare uno stato elastico (vale a dire, le caratteristiche di sollecitazione e i campi di spostamento e deformazione) per un guscio in regime membranale si può condurre, se si desidera, determinando prima le componenti  $S^{\alpha\beta}$ , e successivamente i campi di spostamento e deformazione. Il problema che ci proponiamo di risolvere in questo lavoro riguarda la determinazione dello stato tensionale nei punti della superficie media di un guscio cilindrico pressurizzato uniformemente. Mostreremo nel seguente capitolo come tale problema, se si ammette che il guscio si trovi in regime membranale, possa essere risolto in maniera semplificata: infatti oltre che formulando le equazioni di bilancio locale in termini di spostamenti (con relative condizioni ai bordi), il calcolo di una tale struttura può essere condotto anche utilizzando soltanto le tre equazioni di equilibrio in termini di caratteristiche della sollecitazione e assumendo, come è lecito fare se si tiene conto della particolare condizione di carico, la condizione di natura cinematica per cui sia nulla la variazione di lunghezza delle fibre aventi la direzione dell'asse del cilindro. Per l'espressione di tale variazione di lunghezza in termini di caratteristiche di sollecitazione si dovrà tener



conto del legame costitutivo, pertanto le informazioni che avremo a disposizione verranno tutte impiegate, ma gli sviluppi analitici si dimostreranno molto meno complessi che nel caso in cui si utilizzassero le equazioni di equilibrio in termini di spostamento.



# Capitolo 3

## Gusci cilindrici

### 3.1 Geometria e cinematica

Facendo riferimento alla figura (3.1), scegliamo il sistema “naturale” di coordinate curvilinee sulla superficie media  $\mathcal{S}$ , ponendo  $z^1 = x_1$ ,  $z^2 = \phi$ . Tale sistema di coordinate è evidentemente di tipo principale, oltre che ortogonale. Il generico punto  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$  è individuato mediante il vettore della sua posizione rispetto all'origine  $\mathbf{o}$  del riferimento cartesiano prefissato, nel seguente modo:

$$\mathbf{x}(x_1, \phi) = x_1 \mathbf{i}_1 + \varrho(\sin \phi \mathbf{i}_2 + \cos \phi \mathbf{i}_3), \quad x_1 \in (-l, l), \quad \phi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

la lunghezza del cilindro è dunque pari a  $2l$ . Segue da questa parametrizzazione della superficie media che i vettori della base covariante nel generico punto  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$  sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{i}_1, \\ \mathbf{e}_2 &= \varrho(\cos \phi \mathbf{i}_2 - \sin \phi \mathbf{i}_3), \\ \mathbf{e}_3 &= \sin \phi \mathbf{i}_2 + \cos \phi \mathbf{i}_3 = \mathbf{n}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

dove  $\mathbf{n}$  è la normale a  $\mathcal{S}$  in ogni suo punto. Quanto ai vettori della base controvariante nello stesso punto si ha invece:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^1 &= \mathbf{i}_1, \\ \mathbf{e}^2 &= \frac{\mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_2|^2} = \frac{1}{\varrho}(\cos \phi \mathbf{i}_2 - \sin \phi \mathbf{i}_3), \\ \mathbf{e}^3 &= \mathbf{n}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Il tensore di Weingarten e il tensore metrico sono entrambi diagonali, dato il sistema di coordinate utilizzato; l'unica componente del tensore di Weingarten non nulla è  ${}^S L_{22} = -\varrho$  e le curvature principali della superficie media sono  $k_1 = 0$  e  $k_2 = -\frac{1}{\varrho}$ . Di conseguenza, i vettori della base covariante nel punto  $\mathbf{p} \in \mathcal{G}(\varepsilon)$  sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{g}_2 &= \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho}\right) \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{g}_3 &= \mathbf{n}; \end{aligned} \tag{3.3}$$

nello stesso punto, i vettori della base controvariante sono invece:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^1 &= \mathbf{i}_1, \\ \mathbf{g}^2 &= \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho}\right)^{-1} \mathbf{e}^2, \\ \mathbf{g}^3 &= \mathbf{n}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Lo shifter superficiale che figura nell'espressione generale del campo di spostamento di Kirchhoff-Love è quindi dato da

$${}^S \mathbf{A} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 + \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho}\right) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^2$$

e dunque

$$\det {}^S \mathbf{A} = 1 + \frac{\zeta}{\varrho}.$$

Si possono ora esprimere, in termini degli elementi geometrici appena determinati, i campi di spostamento  $\mathbf{u}$ , di conseguenza, con la relazione (1.14), di deformazione.

Lo spostamento del generico punto  $\mathbf{p} \in \mathcal{G}(\varepsilon)$  ha l'espressione analitica:

$$\mathbf{u}(\mathbf{p}) = (\hat{u}_1 - \zeta w_{,1}) \mathbf{e}^1 + \left[ \left( 1 + \frac{\zeta}{\varrho} \right) \hat{u}_2 + \zeta w_{,2} \right] \mathbf{e}^2 + w \mathbf{n},$$

dove abbiamo posto  $\hat{u}_\alpha := \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{e}_\alpha$ ; dunque, per  $\zeta = 0$  (cioè, sulla superficie media), il campo di spostamento è

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \hat{u}_1 \mathbf{e}^1 + \hat{u}_2 \mathbf{e}^2 + w \mathbf{n}.$$

Il tensore di deformazione è, di conseguenza,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{p}) &= \text{sym}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{p})) = (\hat{u}_{1,1} - \zeta w_{,11}) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \\ &+ \frac{1}{\varrho^4} \left[ \hat{u}_{2,2} + \left( 1 + \frac{\zeta}{\varrho} \right)^{-1} (-\zeta w_{,22} + \varrho w) \right] \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \\ &+ \frac{1}{2\varrho^2} \left[ \left( 1 + \frac{\zeta}{\varrho} \right) \hat{u}_{2,1} - \zeta w_{,12} + \left( 1 + \frac{\zeta}{\varrho} \right)^{-1} (\hat{u}_{1,2} - \zeta w_{,12}) \right] (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1). \end{aligned} \tag{3.5}$$

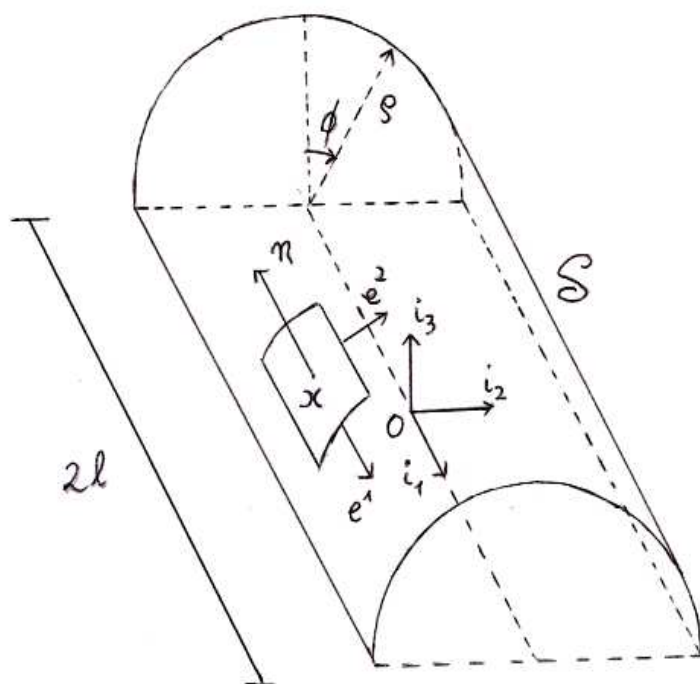


Figura 3.1: Superficie media di un guscio cilindrico

### 3.2 Equazioni di equilibrio

Le equazioni (2.12), particolarizzate al caso di un guscio cilindrico, assumono l'aspetto:

$$\begin{aligned} S^{1\alpha}_{,\alpha} + S^b{}^1 &= 0, \\ S^{2\alpha}_{,\alpha} + \frac{1}{\varrho} S^{32} + S^b{}^2 &= 0, \\ S^{3\alpha}_{,\alpha} - \varrho S^{22} + S^b{}^3 &= 0, \end{aligned}$$

per quanto riguarda il bilancio locale delle caratteristiche di sollecitazione  $S^{i\alpha}$ , tra cui le due forze  $S^{3\alpha}$  di natura reattiva; mentre, per i momenti flettenti e torcenti

$M^{\alpha\beta}$ , si hanno le due equazioni:

$$M^{1\alpha}{}_{,\alpha} - S^{31} + S^1 h^1 = 0,$$

$$M^{2\alpha}{}_{,\alpha} - S^{32} + S^2 h^2 = 0.$$

Tali equazioni si interpretano dal punto di vista fisico come condizioni di equilibrio alla traslazione e alla rotazione di una porzione elementare di superficie media intorno a  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ , rappresentata in figura (3.2) insieme alle caratteristiche di sollecitazione  $S^{\alpha\beta}$  e  $M^{\alpha\beta}$ . Poiché le componenti dei tensori di sforzo e di momento sono di natura controvariante, esse non hanno tutte le stesse dimensioni fisiche; in particolare, poiché l'unico vettore della base controvariante ad avere dimensioni fisiche è  $\mathbf{e}^2$  (per il quale si ha  $\dim(\mathbf{e}^2) = L^{-1}$ ), le dimensioni fisiche di  $S^{11}$  coincidono con quelle del tensore  $\mathbf{S}$  (forza per unità di lunghezza), mentre  $S^{12}$  è una forza per unità di area e  $S^{22}$  una forza per unità di volume. Tuttavia, il passaggio da componenti controvarianti a componenti fisiche risulta immediato; per tale motivo, nel prosieguo si continueranno a prendere in considerazione le componenti controvarianti dello sforzo.

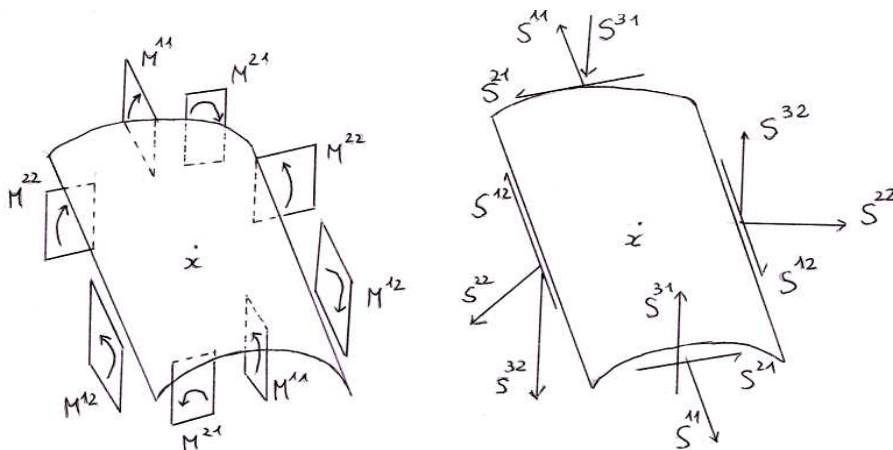


Figura 3.2: Caratteristiche di sollecitazione

### 3.3 Gusci cilindrici in pressione

In questa sezione risolviamo esplicitamente il problema di determinare lo stato tensionale nei punti di un guscio cilindrico pressurizzato in regime membranale. Strutture di questo tipo vengono utilizzate frequentemente, ad esempio, come coperture pneumatiche per impianti sportivi. Non possedendo una struttura portante rigida, esse si sostengono grazie alla pressione creata nell'ambiente interno da un compressore. Il peso di una copertura pneumatica è trascurabile rispetto alla pressione cui viene sottoposta; inoltre, sui bordi della struttura sono di norma assenti coppie applicate, forze di taglio trasversali e vincoli che impediscano spostamenti trasversali o rotazioni della normale attorno all'asse del cilindro. Queste condizioni fanno sì che, per lo studio di una tale struttura, sia giustificato adoperare le equazioni di equilibrio per un guscio in regime membranale.

Consideriamo dunque la superficie inferiore del guscio cilindrico sottoposta a una pressione  $p$  uniforme. Il sistema di carichi esterni è allora costituito dalla sola forza distribuita per unità di area:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{n}(\mathbf{x})) = p \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad p > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}.$$

Utilizzando la formula per la riduzione del sistema di carichi alla superficie media, si ottiene immediatamente:

$${}^s \mathbf{b} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varrho}\right) p \mathbf{n},$$

e dunque

$${}^s b^1 = {}^s b^2 = 0, \quad {}^s b^3 = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varrho}\right) p. \quad (3.6)$$



Le equazioni di equilibrio per un guscio cilindrico in regime membranale sono:

$$\begin{aligned} S^{1\alpha}{}_{,\alpha} + S^b{}^1 &= 0, \\ S^{2\alpha}{}_{,\alpha} + S^b{}^2 &= 0, \\ -\rho S^{22} + S^b{}^3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

In figura (3.3) è rappresentato un elemento infinitesimo di superficie cilindrica in equilibrio nel caso di regime membranale. Dalle (3.6) e (3.7)<sub>3</sub> segue che

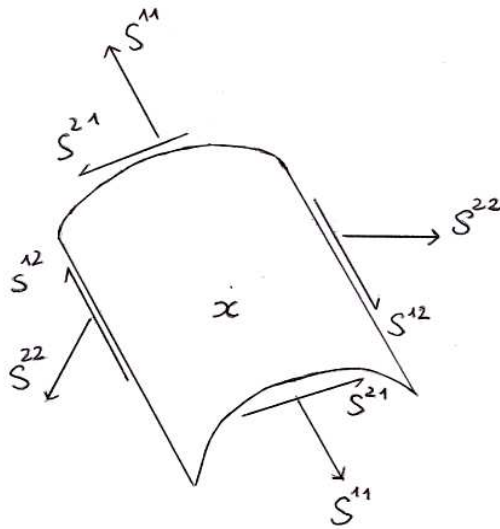


Figura 3.3: Forze membranali

$$S^{22} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varrho}\right) \frac{p}{\varrho}.$$

Resta da integrare il sistema

$$\begin{aligned} S^{1\alpha}{}_{,\alpha} &= 0, \\ S^{2\alpha}{}_{,\alpha} &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

(ricordando che  $S^{12} = S^{21}$ ). Quanto alla forza normale per unità di lunghezza

$S^{11}$ , è naturale attendersi una condizione di simmetria rispetto al piano definito dai vettori  $\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ :

$$S^{11}(x_1, \phi) = S^{11}(-x_1, \phi). \quad (3.9)$$

Poiché  $S^{22}$  è costante, dalla (3.8)<sub>2</sub> si ha che

$$S^{12}(x_1, \phi) = c_1(\phi)$$

e, integrando la (3.8)<sub>1</sub>,

$$S^{11}(x_1, \phi) = -x_1 \frac{dc_1}{d\phi}(\phi) + c_2(\phi),$$

per cui, tenendo conto della condizione (3.9), si ottiene

$$2x_1 \frac{dc_1}{d\phi}(\phi) = 0 \Rightarrow c_1(\phi) = S^{12} = c,$$

con  $c$  una costante reale, dato che il primo membro dell'equazione dev'essere nullo per ogni  $x_1 \in (-l, l)$ , mentre per la forza normale assiale si ha

$$S^{11}(x_1, \phi) = c_2(\phi).$$

Quindi, la forza normale circonferenziale  $S^{22}$  è costante, e con essa anche la forza di taglio  $S^{12}$ ; la forza normale assiale può dipendere al più dalla coordinata angolare  $\phi$ . In particolare,  $S^{12}$  rappresenta una forza di taglio per unità di lunghezza uniformemente distribuita lungo i bordi del cilindro; se non ci sono forze di taglio applicate sui bordi (come si verifica di regola per una struttura del tipo che stiamo studiando), non c'è ragione di ritenere che tale forza sia diversa da

zero. Abbiamo quindi

$$S^{12} = 0.$$

Rimane da determinare la forza normale assiale  $S^{11} = c_2(\phi)$ . A tale scopo, supponiamo nulla la variazione di lunghezza delle fibre parallele all'asse del cilindro. Tale condizione viene espressa in termini dello spostamento assiale  $\hat{u}_1$  dalla relazione

$$\Delta l := \hat{u}_1(l, \phi) - \hat{u}_1(-l, \phi) = 0.$$

L'idea è quella di esprimere tale variazione in funzione delle caratteristiche di sollecitazione  $S^{\alpha\beta}$ . Cominciamo esprimendo la componente di deformazione  $E^{11}$  in termini delle componenti del tensore degli sforzi  $\mathbf{T}$  definito nei punti di  $\mathcal{G}(\varepsilon)$ , utilizzando il tensore di elasticità inverso (2.4). Se  $\tilde{\mu}$  e  $\tilde{\lambda}$  sono i moduli di Lamé del materiale di cui è costituito il guscio, otteniamo, moltiplicando scalarmente la relazione  $\mathbf{E} = \mathbb{C}^{-1}[\mathbf{T}^{(A)}]$  per  $\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1 &= E^{11} = \frac{1}{2\tilde{\mu}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1 - \frac{\tilde{\lambda}}{4\tilde{\mu}(\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1 + \varrho^2 \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^2) = \\ &= \left( \frac{1}{2\tilde{\mu}} - \frac{\tilde{\lambda}}{4\tilde{\mu}(\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})} \right) T^{11} - \frac{\tilde{\lambda}}{4\tilde{\mu}(\tilde{\mu} + \tilde{\lambda})} \varrho^2 T^{22}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Se si esprimono i moduli di Lamé in funzione del modulo di Young e del modulo di Poisson, secondo le (2.5), l'ultima relazione diventa:

$$E^{11} = \frac{1}{\tilde{E}} (T^{11} - \tilde{\nu} \varrho^2 T^{22}). \quad (3.11)$$

Al fine di ottenere un'espressione di  $\Delta l$  in funzione delle caratteristiche di sollecitazione  $S^{\alpha\beta}$ , integriamo sullo spessore del guscio la (3.11), ottenendo, visto che

$$\alpha := \det {}^S\mathbf{A} = 1 + \frac{\zeta}{\varrho},$$

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \alpha(\hat{u}_{1,1} - \zeta w_{,11}) d\zeta &= 2\varepsilon\hat{u}_{1,1} - \frac{2\varepsilon^3}{3\varrho}w_{,11} = \\ &= \frac{1}{\bar{E}} \left( \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \alpha T^{11} d\zeta - \tilde{\nu}\varrho^2 \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \alpha T^{22} d\zeta \right); \end{aligned} \quad (3.12)$$

ora, poiché valgono le formule (2.7) e poiché in questo caso particolare risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^1 &= \mathbf{g}^1, \\ \mathbf{e}^2 &= \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho}\right) \mathbf{g}^2, \end{aligned}$$

si ha

$$T^{11} = \mathbf{T}\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}^1 = \mathbf{T}\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{e}^1$$

e dunque

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \alpha T^{11} d\zeta = S^{11},$$

mentre

$$T^{22} = \mathbf{T}\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}^2 = \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho}\right) \mathbf{T}\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}^2 = \alpha \mathbf{T}\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}^2,$$

quindi,

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \alpha T^{22} d\zeta = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \alpha^2 \mathbf{T}\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}^2 d\zeta.$$

Esaminiamo ora l'ultimo integrale: vista la definizione di  $\alpha$ , esso può essere riscritto come

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho}\right) \alpha \mathbf{T}\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}^2 d\zeta = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \alpha \mathbf{T}\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}^2 d\zeta + \frac{1}{\varrho} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \alpha \zeta \mathbf{T}\mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}^2 d\zeta,$$

ma poiché

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \alpha \zeta \mathbf{T} \mathbf{g}^2 \cdot \mathbf{e}^2 d\zeta = M^{22}$$

e il guscio si trova in regime membranale, il secondo addendo è nullo, dunque anche

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \alpha T^{22} d\zeta = S^{22}.$$

Riprendendo la (3.12), possiamo concludere che

$$2\varepsilon \hat{u}_{1,1} - \frac{2\varepsilon^3}{3\rho} w_{,11} = \frac{1}{\tilde{E}} (S^{11} - \tilde{\nu} \rho^2 S^{22}).$$

Eseguiamo ora un'ulteriore integrazione, questa volta sull'asse del cilindro, dell'ultima equazione. Si ottiene:

$$2\varepsilon \Delta l - \frac{2\varepsilon^3}{3\rho} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1}(l, \phi) - \frac{\partial w}{\partial x_1}(-l, \phi) \right) = \frac{1}{\tilde{E}} \int_{-l}^{+l} (S^{11} - \tilde{\nu} \rho^2 S^{22}) dx_1.$$

Alla derivata parziale  $\frac{\partial w}{\partial x_1}$  si attribuisce il significato fisico di *rotazione* della normale  $\mathbf{n}$  attorno ad un asse avente la direzione di  $\mathbf{e}^2$ , cioè, tangente agli archi di equazione  $x_1 = \text{cost}$  (cf. [1]). Per via della particolare distribuzione di carico agente sulla superficie media, si può assumere che tale rotazione sia nulla su entrambi gli archi estremi ( $x_1 = l$  e  $x_1 = -l$ ), e quindi finalmente si ha la condizione:

$$\Delta l = \frac{1}{2\varepsilon \tilde{E}} \int_{-l}^{+l} (S^{11} - \tilde{\nu} \rho^2 S^{22}) dx_1 = 0.$$

Inserendo le espressioni delle caratteristiche di sollecitazione determinate sinora si ha:

$$\int_{-l}^{+l} \left[ c_2(\phi) - \tilde{\nu} \rho^2 \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\rho} \right) \frac{p}{\rho} \right] dx_1 = 0$$

da cui segue subito la soluzione per  $S^{11}$ :

$$S^{11} = c_2(\phi) = \tilde{\nu} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varrho}\right) p\varrho.$$

Dunque, le caratteristiche di sollecitazione  $S^{\alpha\beta}$  sono tutte costanti. Riassumendo, il tensore di sforzo superficiale  $\mathbf{S}$  in una struttura del tipo considerato in questo lavoro ha l'espressione:

$$\mathbf{S} = \tilde{\nu} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varrho}\right) p\varrho \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varrho}\right) \frac{p}{\varrho} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2.$$

Se si vuole per  $\mathbf{S}$  un'espressione in componenti fisiche, è sufficiente tener conto del fatto che

$$\mathbf{e}_{\langle 2 \rangle} = \frac{1}{\varrho} \mathbf{e}_2$$

per ottenere

$$\mathbf{S} = p\varrho \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varrho}\right) (\tilde{\nu} \mathbf{e}_{\langle 1 \rangle} \otimes \mathbf{e}_{\langle 1 \rangle} + \mathbf{e}_{\langle 2 \rangle} \otimes \mathbf{e}_{\langle 2 \rangle}).$$

Osserviamo che la forza normale circonferenziale,  $S^{22}$ , non dipende dalle caratteristiche del materiale di cui è costituito il guscio, mentre la forza normale assiale  $S^{11}$  dipende dal modulo di Poisson relativo a tale materiale; tali forze per unità di lunghezza non dipendono neppure dalla lunghezza del cilindro, e questa circostanza segue dal fatto che abbiamo supposto, come è lecito fare, la condizione di simmetria (3.9) per  $S^{11}$ .

# Bibliografia

- [1] L. Cedolin, *Gusci cilindrici e sferici. Trave su suolo elastico - Appunti di lezione con la collaborazione di Gianluigi Bisi*, Edizioni CUSL, Milano 1998.
- [2] M. P. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, New Jersey 1976.
- [3] P. Podio-Guidugli, *Lezioni sulla teoria lineare dei gusci elastici sottili*, Masson, Milano 1991.
- [4] P. Podio-Guidugli, *A Primer in Elasticity*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2000.
- [5] S. Timoshenko, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill College, New York 1959.