Università degli Studi di Roma Tor Vergata

FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN
Corso di Laurea in Fisica

De gravitatis centro

Definizioni implicite attraverso i postulati

Candidato:
Matteo Veglianti

Relatore:
Prof. Lucio Russo

Anno Accademico 2014-2015

Sommario

La presente tesi mostra che in epoca ellenistica era diffuso il metodo di definizione implicita degli enti di una teoria nei postulati della teoria stessa. Questo tipo di definizioni sostituiscono quelle standard (esplicite) almeno in due casi:

- quando gli enti da definire sono "fondamentali", ossia gli enti base della teoria per cui il loro significato non può richiamare altri enti ancora più semplici (come nel caso della retta negli "Elementi" di Euclide);
- quando la parola utilizzata per definire l'ente è una parola della lingua ordinaria per cui i postulati attuano uno "sfrondamento" del suo significato per adattarla a descrivere l'ente della teoria (come nel caso dei raggi visuali nell' "Ottica" di Euclide).

Successivamante studieremo la definizione di "centro di gravità", assente esplicitamente nell'opera di Archimede *sull' "Equilibrio dei piani"*, ma presente in diversi autori successivi. Vedremo che si possono avanzare due ipotesi a riguardo:

- si può pensare che la definizione esplicita data da Archiemede sia andata perduta,
- si può pensare che Archimede avesse definito implicitamente il centro di gravità attraverso i postulati.

Infine porteremo argomenti a favore di entrambe le ipotesi e vedremo che la questione è ancora aperta.

Indice

Capitolo 1

Formulazione del problema

1.1 Definizioni implicite

1.1.1 Euclide

Di che colore è una linea retta?

Qualsiasi persona che abbia studiato un minimo di matematica è consapevole che questa domanda non ha senso in quanto una linea retta è un'astrazione geometrica che prescinde dal colore. Allo stesso modo una linea retta è priva di spessore. Se si apre un qualsiasi libro di geometria, alle prime pagine si troverà scritto che esistono alcuni enti geometrici cosiddetti "fondamentali" che non si possono definire, ossia dal significato evidente ed immediato, tra cui in particolare punto, retta e piano. Viceversa, se si aprono gli "Elementi di Euclide", alla prima pagina si troverà scritto:

Def. 1: un punto è ciò che non ha parti;

Def. 2: una linea è lunghezza senza larghezza;

Def. 3: gli estremi di una linea sono punti;

Def. 4: una linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti;

Def. 5: una superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza;

Def. 6: gli estremi di una superficie sono linee;

Def. 7: una superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle sue rette.[1]

Negli Elementi di Euclide si trovano quindi le definizioni di vari enti geometrici, tra cui il punto, la retta e il piano. Essi sono definiti, però, in modo

[1] [Euc14a], p. 779

essenzialista (o platonico), ossia in modo del tutto simile alle definizioni di "bene" o di "giusto" che dava Platone.

La scienza tuttavia non usa definizioni essenzialiste in quanto esse sono sterili, cioè non sono in grado di caratterizzare univocamente un ente teorico; la scienza procede per definizioni nominaliste, che riescono a qualificare univocamente un ente geometrico e quindi arricchiscono la terminologia scientifica. Ogni definizione di questo tipo, però, riconduce il significato di un ente ad altri più elementari. Ci devono essere perciò enti indefiniti ma dal significato *evidente* a tutti; tra cui il punto, la retta e il piano.

Come mai allora Euclide definisce esplicitamte tali enti? Una risposta molto plausibile è stata trovata qualche anno fa da Lucio Russo: le prime sette definizioni degli Elementi di Euclide sono spurie, non sono cioè opera di Euclide, ma di Erone di Alessandria (I sec. d.C.) e sono state aggiunte come presupposti all'opera di Euclide e nei secoli sono state erroneamente attribuite al grande matematico.[2]

Di conseguenza, enti come punto, retta e piano, sono senza una esplicita definizione negli Elementi. Ciononostante, la domanda con cui abbiamo aperto questa discussione continua ad essre priva di senso; cioè nonostante non sia definita esplicitamente la linea retta, ci si accorge che essa non ha nè colore nè spessore. Ci si può quindi accorgere che qualche proprietà della linea retta traspare nonostante manchi la definizione esplicita. Tali proprietà sono contenute nei postulati:

Post. 1: si può condurre una linea retta da ogni punto ad ogni punto;

Post. 2: si può prolungare senza soluzione di continuità una retta limitata in linea retta;

[2] [Rus98]

Post. 3: dati un punto ed un segmento, si può tracciare il cerchio che ha il punto come centro e il segmento come raggio;

Post. 4: tutti gli angoli retti sono uguali tra di loro;

Post. 5: se una retta che incide su due rette fa minori di due retti gli angoli all'interno e dalla stessa parte, le due rette prolungate illimitatamente incidono dalla parte in cui sono gli angoli minori dei due retti.[3]

Ora, poichè nessun postulato parla del colore della retta, nessuna proposizione da essi deducibile potrà contenere alcuna informazione sul colore; tantomeno sullo spessore. La linea retta risulta cioè in qualche modo definita implicitamente dai postulati, nel senso che i postulati attuano una sorta di caratterizzazione del significato delle parole "linea retta".
Ci si può chiedere se gli scienziati greci fossero consapevoli del procedimento appena descritto. A tale scopo possiamo cercare altri esempi di definizioni implicite attraverso i postulati.
Nell'opera "Ottica" dello stesso Euclide viene introdotta la nozione di "raggio visuale" senza alcuna definizione esplicita, ma i postulati (si veda appendice A) riescono a caratterizzare tale ente, in particolare si deduce che essi sono semirette con orgine nell'occhio dell'osservatore; inoltre, poichè in nessun postulato si parla del verso di propagazione dei raggi visuali, esso resta esterno alla teoria dell'ottica e quindi così come la domanda di inizio paragrafo è priva di senso all'interno della geometria, una domanda del tipo: *in che vesro si muovono i raggi visuali?* è altrettanto priva di senso all'interno dell'Ottica.[4]

[3] [Euc14a], p. 781
[4] [Euc14b], p. 2025

1.1.2 Archimede

Un altro esempio di definizione implicita nei postulati lo possiamo trovare in Archimede, più precisamente nell trattato *sulla sfera e sul cilindro.* In quest'opera Archimede definisce implicitamente il concetto di lunghezza di una curva, almeno nel caso della circonferenza, attraverso i postulati, vediamo quali sono quelli che ci interessano:

Post. 1: vi sono nel piano linee curve terminate, le quali si trovano completamente dalla stessa parte delle rette congiungenti i loro estremi, ovvero non hanno nessun punto nella parte opposta;

Post. 2: chiamo concava dalla stessa parte una linea tale che, presi due punti qualunque su di essa, i segmenti di retta che li congiungono, o cadono tutti nella stessa parte rispetto alla linea, o alcuni di essi cadono nella stessa parte, altri sulla linea stessa, senza però che nessuno cada dall'altra parte;

Post. 3: la minima fra tutte le linee aventi gli stessi estremi è la linea retta;

Post. 4: tra tutte le linee che sono sullo stesso piano e hanno gli stessi estremi, sono disuguali quelle che, essendo ambedue concave dalla stessa parte, o una è tutta compresa dall'altra linea e dalla retta avente gli stessi estremi, o ha una parte compresa [dall'altra linea] ed una parte in comune [con essa]: ed è minore la [linea che è] compresa.

Subito dopo Archimede dimostra due proposizioni che sono la banale conseguenza dei postulati:

Prop. 1: se si inscrive un poligono in un cerchio, il perimetro del poligono inscritto è minore della circonferenza del cerchio (per il post.3);

Prop. 2: se si circoscrive un poligono ad un cerchio, il perimetro del poligono circoscritto è maggiore della circonferenza del cerchio (per il post.4).[5]

Di conseguenza i postulati di Archimede definiscono implicitamente la lunghezza di una circonferenza come l'elemento di separazione (usando la terminologia moderna) tra le lunghezze dei poligoni inscritti e circoscritti; nei libri attuali di geometria questa affermazione si dà per scontata senza ricordare il postulato di Archimede.
In effetti in epoca moderna si definisce la lunghezza di una curva almeno in due modi (equivalenti) e di conseguenza il postulato di Archimede diventa un teorema facilmente dimostrabile.
Usando un linguaggio estremamente formale, si definisce una *curva* in R^n come un'applicazione

$$\gamma : [a;b] \longmapsto R^n$$

che sia continua su tutto $[a;b]$ e C^∞.
Ora, sia Δ una partizione dell'intervallo $[a;b]$. Questo significa che $[a;b]$ è suddiviso in sottointervallini $\{[t_0;t_1];[t_1;t_2];\ldots;[t_{k-1};t_k]\}$, con $t_0 = a$ e $t_k = b$. Si definisce

$$l_\Delta(\gamma) = \sum_{i=1}^{k} ||\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})||$$

che è ovviamente la lunghezza della poligonale (i cui punti sono $(t_i;\gamma(t_i))$ con $i = 1, 2, \ldots, k$). A questo punto si può definire la lunghezza della curva γ in due modi diversi, ma equivalenti:

1:

$$l(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||\, dt,$$

[5] [Arc88b], pp. 73-80

dove γ' è il vettore che si ottiene derivando tutte le componenti di γ. Questa espressione equivale ad affermare che la lunghezza di una curva è il prodotto tra la velocità con cui la si percorre e il tempo impiegato a percorrerla, affermazione familiare a qualsiasi studente di fisica.

2:

$$l(\gamma) = sup_{\Delta}(l_{\Delta}(\gamma))$$

l'estremo superiore è calcolato sull'insieme di tutte le possibili partizioni finite dell'intervallo $[a; b]$. Questa espressione equivale ad affermare che la lunghezza di una curva è l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte.

Le due espressioni sono equivalenti nel senso che si può accettare come definizione una delle due e di conseguenza si dimostra che è vera l'altra.
Assumendo per definizione la prima espressione si può dimostrare la seconda nel modo seguente:
innanzitutto si osservi che se una partizione viene "raffinata" in una nuova partizione Δ' ottenuta aggiungendo ulteriori suddivisioni di ciascun intervallino, allora $l_{\Delta'}(\gamma) \geq l_{\Delta}(\gamma)$. Tale osservazione è analoga al fatto che la lunghezza di una circonferenza viene approssimata per difetto dalla lunghezza di un poligono inscritto e l'approssimazione migliora all'aumentare del numero dei suoi lati.
Ora, su ciascun intervallino $[t_{i-1}; t_i]$, si ha, per il teorema di Lagrange:

$$\frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = \gamma'(\xi_i)$$

dove ξ_i è un punto di $[t_{i-1}; t_i]$. Per cui:

$$l_{\Delta}(\gamma) = \sum_{i=1}^{k} ||\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|| = \sum_{i=1}^{k} ||\frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}|||t_i - t_{i-1}| = \sum_{i=1}^{k} ||\gamma'(\xi_i)||(t_i - t_{i-1})$$

Al raffinarsi della partizione questa quantità si avvicina sempre di più all'area del sottografico della funzione ad una variabile reale $\gamma'(t)$ e la somma tende all'integrale corrispondente. Quindi

$$sup_{\Delta}(l_{\Delta}(\gamma)) = \int_a^b ||\gamma'(t)||\, dt.$$

Partendo dalla definizione molto formale della lunghezza della curva come l'integrale $\int_a^b ||\gamma'(t)||\, dt$, si può quindi dimostrare che la lunghezza della curva è l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte;[6] ovviamente ciò vale per ogni curva, in particolare per la circonferenza. Come conseguenza la lunghezza di un arco di corconferenza è l'estremo superiore delle poligonali inscritte in esso ed è quindi maggiore della lunghezza della poligonale; viceversa è anche vero che una poligonale circoscritta all'arco di circonferenza sarà più lunga di esso; questo continua ad essere vero anche quando si modificano le poligonali inscritte e circoscritte aggiungendo una suddivisione in più (per esempio se si passa da poligonali formate da 3 segmenti a poligonali formate da 4 segmenti). In definitiva, quindi, sarà vero che la lunghezza della circonferenza è l'elemento di separazione tra le lunghezze dei perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti al cerchio; questo mostra come i postulati di Archimede bastino a definire implicitamente la lunghezza della circonferenza.

1.2 Centro di gravità

Affrontiamo in questo paragrafo il problema fondamentale di questa tesi. Esaminiamo il trattato "sull'equilibrio delle figure piane" di Archimede; esso è diviso in due libri, di cui il primo è probabilmente la prima opera scritta

[6]Si può dimostrare anche l'inverso, ossia partendo dalla definizione della lunghezza di una curva come l'estremo superiore della lunghezza di tutte le poligonali inscritte, si può dimostrare che essa risulta uguale all'intergrale visto sopra.

dal matematico siracusano (vedi paragrafo 2.1). Al primo libro sono premessi sette postulati :

Post. 1: pesi uguali [sospesi] a distanze uguali [dal fulcro] sono in equilibrio e pesi uguali [sospesi] a distanze diseguali [dal fulcro] non sono in equilibrio, ma pendono verso il peso che si trova a distanza maggiore.

Post. 2: Quando pesi [sospesi] a determinate distanze sono in equilibrio, se qualcosa viene aggiunto ad uno solo dei pesi, essi non sono più in equilibrio, ma pendono verso il peso a cui è stato aggiunto qualcosa.

Post. 3: Allo stesso modo, se qualcosa viene tolto ad uno solo dei due pesi, essi non sono più in equilibrio, ma pendono verso quel peso da cui non è stato tolto niente.

Post. 4: Quando figure uguali e simili vengono fatte coincidere, i loro centri di gravità parimenti coincidono.

Post. 5: In figure diseguali ma simili i centri di gravità saranno similmente posti.

Post. 6: Se grandezze [sospese] a certe distanze [dal fulcro] sono in equilibrio, anche altre grandezze uguali ad esse [sospese] alle stesse distanze [dal fulcro] saranno in equilibrio.

Post. 7: In ogni figura il cui perimetro è concavo nella stessa direzione, il centro di gravità è interno alla figura.[7]

Mancano in questo libro tutte le definizioni, sicchè si comincia a parlare nei postulati di *pesi*, di *essere in equilibrio* e di *centro di gravità*. In particolar modo ci interesseremo di quest'ultimo concetto, fondamentale nella statica.

[7] [Arc88c], pp. 397-399

Esso viene introdotto per la prima volta nel IV postulato e poi usato in tutto il resto dell'opera ed in altre opere successive (in particolare nella "Quadratura della parabola" e nel II libro di "Equilibrio dei piani") senza alcuna definizione. Non sappiamo quindi se Archimede avesse effettivamente definito il centro di gravità o meno ed anche se l'avesse definito, non sappiamo in che modo.
Conosciamo però alcune definizioni di centro di gravità successiva ad Archimede, poichè diversi autori se ne sono occupati nelle rispettive opere.

Erone: su Erone di Alessandria si sa ben poco, anche il periodo in cui visse non è ben definito, probabilmente è vissuto durante il primo secolo. Il libro di meccanica di Erone ci è pervenuto interamente solo nella sua traduzione araba, mentre dell'edizione greca rimangono solo pochi frammenti; esiste anche una versione francese, tradotta dall'arabo nel 1893.

Erone definisce il centro di gravità in questo modo:

> Il centro di gravità o di inclinazione è un punto tale che quando il peso è sospeso per tale punto, esso (il peso) è diviso in due parti uguali.

Erone continua dicendo:

> Il punto di supporto è il punto di un corpo tale che quando il corpo è sospeso per tale punto, le sue parti sono in equilibrio. Questo significa che il corpo non si inclina, nè si eleva.

Infine si legge:

> Il centro di inclinazione di ogni corpo è il punto nel quale convergono tutte le linee verticali passanti per i punti di sospensione. Il centro di gravità in alcuni corpi è fuori dal corpo; questo è ciò che accade, per esempio, negli anelli o nelle ruote.[8]

Pappo: anche di Pappo di Alessandria si sa ben poco, si pensa sia vissuto intorno al 320, anno in cui avrebbe steso un commento dell'almagesto di Tolomeo. Nella sua *Collectio*, a proposito del centro di gravità scrive:

> Che cosa sia e che cosa significhi il centro di gravità di ciascun corpo, che è il principio e l'elemento della dottrina centrobarica, da cui sono derivate anche le altre parti della meccanica, certo è da spiegare. Da ciò infatti, suppongo, seguiranno con chiarezza anche le restanti proposizioni della medesima disciplina. Diciamo, ora, essere il centro di gravità di ciascun corpo un certo punto situato internamente, dal quale se immaginiamo tale corpo essere sospeso, [esso] è fermo in equilibrio e conserva la posizione che ha all'inizio.[9]

Eutocio: Eutocio di Ascalona, vissuto a cavallo tra il V e il VI secolo, è stato un commentarore di Archimede e di Apollonio. Nei suoi commenti all'Equilibrio dei piani Eutocio scrive:

---

[8] [Ero88], pp. 93-95

[9] Questa è una mia traduzione dal testo latino. *Centrum gravitatis cuiusque corporis quid sit quidque valeat, id quod doctrinae centrobaricae principium est et elementum, unde etiam reliquae artis mechanicae partes derivantur, iam explicandum est. Hinc enim, opinor, etiam reliqua eiusdem disciplinae theoremata perspicua fient. Dicimus autem gravitatis centrum cuiusque corporis esse punctum quoddam intus positum, a quo si id corpus suspensum esse figuratur, aeque pondere quiescit et, quam ab inizio habuit positionem, eam servat.*,[Pap78], p. 1031

> Introduzione al libro I. [...] In quest'opera Archimede definisce il centro di gravità di una figura piana come il punto tale che, quando si sospende la figura per questo punto, essa rimane parallela all'orizzontale.[10]

Simplicio: anche in Simplicio, contemporaneo di Eutocio, troviamo notizie sulla dottrina centrobarica. Nei suoi commenti ad Aristotele, Simplicio afferma:

> [...] [Aristotele], avendo dedotto dalla formazione della Terra secondo l'ipotesi [fatta] la sua sfericità e che il suo centro dista in ogni direzione allo stesso modo dalla superficie, aggiunge una difficoltà che sorge da quella che è detta dai meccanici teoria dei baricentri. Questa teoria, sulla quale Archimede e altri hanno scritto molti ed elegantissimi trattati, ha lo scopo di trovare il centro di un dato peso, cioè un punto nel corpo tale che, se il corpo viene sollevato attaccandovi una corda, esso resta [nella sua posizione] senza inclinarsi.[11]

1.3 Possibili risposte

Abbiamo dunque visto nel paragrafo precedente che diversi autori si sono cimentati nella dottrina centrobarica e hanno scritto trattati a riguardo, dando la definizione di baricentro. Per di più le definizioni dei quattro autori citati sono grossomodo equivalenti. Possiamo allora da adesso in poi considerare effettivamente il centro di gravità definito nel modo seguente:

[10] [Eut72], pp. 166-167
[11] [Sim94], p. 28

> *il centro di gravità di un corpo è il punto per il quale si deve sospendere il corpo affinchè esso resti in equilibrio (cioè le oscillazioni intorno a tale punto si smorzano e prima o poi finiscono).*

Alla luce di una tale definizione ci possiamo porre i seguenti interrogativi:

1. Archimede conosceva questa definizione di baricentro? Magari perchè l'aveva data lui stesso in un'opera a noi non pervenuta o magari perchè a lui precedente?

2. Archimede può aver definito implicitamente il centro di gravità? Cioè la definizione di centro di gravità si può dedurre dal suol trattato?

Nei capitoli seguenti cercheremo di rispondere rispettivamente alla prima e alla seconda domanda.

Capitolo 2

Alla ricerca dell'opera perduta

2.1 Cronologia delle opere di Archimede

Per cercare una risposta affermativa alla prima domanda, ossia se è possibile che la definizione di centro di gravità appena vista sia presente in qualche opera di Archimede a noi non pervenuta, mi pare utile cercare di ricostruire l'ordine cronologico delle opere del matematico siracusano.
Questo problema venne affrontato per la prima volta da Giuseppe Torelli sul finire del XVIII secolo e il risultato fu accettato da Heiberg e Heath.
Esso si basa sui seguenti dati obiettivi:

- notizie che si ricavano dalle lettere introduttive di varie opere;
- uso, in alcune opere, di proposizioni enunciate in altre opere.

Nella prima specie di dati rientrano le notizie sulla morte di *Conone* (matematico alessandrino del quale Archimede aveva alta stima). Nella *Quadratura della parabola* si accenna alla morte di Conone come un avvenimento recente del quale solo da poco lo scrivente è venuto a conoscenza.[1]
Nella *Sfera e cilindro* (lettera introduttiva al libro I) Archimede parla di Conone solo per esprimere il rammarico di non poter mostrare a lui i suoi teoremi.[2] Nelle *Spirali* (lettera introduttiva) dice, a proposito di certi pro-

[1] Archimede a Dositeo salute.
Avendo sentito che era morto Conone, [...] ci dolemmo per la morte di un uomo amico e mirabile nelle matematiche, e decidemmo di farti giungere per iscritto, [...] uno dei teoremi di geometria che prima non era stato studiato.

[2] Archimede a Dositeo salute.
[...] Sarebbe stato bene che esse (le proposizioni dimostrate) fossero state rese note quando Conone era ancora in vita: pensiamo infatti che egli massimamente avrebbe potuto comprenderle pienamente e dare su di esse un giudizio confacente.

blemi, che pur essendo passati molti anni dalla morte di Conone, nessuno ha saputo risolverli.[3] Abbiamo dunque un ordine di successione:
Quadratura della parabola—Sulla Sfera e sul cilindro—Spirali.
C'è poi un altro gruppo di tre opere (o parti di opere) per le quali si può stabilire un ordine di successione relativo: si tratta dei libri I e II di *Equilibrio dei piani* e della *Quadratura della parabola.* L'ordine di successione è il seguente:
Equilibrio dei piani I—Quadratura della parabola—Equilibrio dei piani II.
Infatti nella proposizione VI di *Quadratura della parabola* Archimede si serve dei risultati di *Equilibrio dei piani I*(si veda appendice B) e in alcune proposizioni di *Equilibrio dei piani II* utilizza risultati ottenuti in *Quadratura della parabola.*
Va poi constatato che l'opera sui *Conoidi e sferoidi* segue quella sulle *Spirali* poichè Archimede, nella lettera introduttiva a quest'ultima opera, cita alcuni teoremi della sua opera sui conoidi dicendo che non ancora ne manda la dimostrazione. Quanto ai *Galleggianti*, Archimede utilizza risultati ottenuti in *Conoidi e sferoidi.* Infine, si può individuare un'altra terna di opere:
Sulla sfera e sul cilindro—Misura del cerchio—Arenario.
Infatti nella proposizione I di *Misura del cerchio* si applica la proposizione I di *Sfera e cilindro*, inoltre nell'*Arenario* Archimede cita l'opera sulla *misura del cerchio.* Ora, non si hanno abbastanza elementi per dare una collocazione certa alla *Misura del cerchio*, nè tantomeno al *Metodo.* L'ordine più probabile è, in definitiva, il seguente:

1. *Equilibrio dei piani, libro I;*

[3]Archimede a Dositeo salute.

[...] Ed essendo passati molti anni dalla morte di Conone, non sappiamo che da alcuno sia stato risolto nessuno di quei problemi.

2. *Quadratura della parabola;*
3. *Equilibrio dei piani, libro II;*
4. *Sulla sfera e sul cilindro, libri I e II;*
5. *Metodo (?);*
6. *Spirali;*
7. *Conoidi e sferoidi;*
8. *Galleggianti, libri Ie II;*
9. *Misura del cerchio (?);*
10. *Arenario*

Il primo libro di *Equilibrio dei piani* è dunque la prima opera scritta da Archimede, o un frammento di essa; o per lo meno la più antica opera tra quelle rimaste.

2.2 Opera perduta

É possibile che Archimede abbia scritto un'opera non giunta a noi in cui avesse definito il centro di gravità?
Sicuramente non è da escludere una risposta affermativa, in quanto sappiamo di molte opere scritte dal matematico Siracusano e non pervenuteci.
Lo stesso Archimede in altri suoi scritti cita le proposizioni dell' Equilibrio dei Piani I insieme ad altri teoremi a noi non pervenuti, chiamando l'opera "Elementi di meccanica".
Ricordiamo a tal proposito:

proposizione VI di Quadratura della parabola: Archimede utilizza esplicitamente il fatto che un corpo sospeso è in equilibrio quando il punto di sospensione e il centro di gravità sono sulla stessa retta verticale e il centro di gravità si trova al di sotto del punto di sospensione dicendo che questo risultato è stato dimostrato negli "Elementi di meccanica" (si veda appendice B);

proposizione XV di Equilibrio dei Piani I: Archimede utilizza il fatto che il centro di gravità di un triangolo divide la mediana in due parti che stanno tra loro come 1:2, ma questa proprietà non è dimostrata in nessuna altra opera;

Erone afferma che Archimede in un libro "sulle colonne" o "sui supporti" studia come si distribuisce il peso di un corpo su diverse colonne di supporto

Non è quindi da escludere la possibilità che *Equilibrio dei piani* sia un frammento di un'opera più completa, chiamata da Archimede stesso "Elementi di meccanica". Altresì non è da escludere che Erone, insieme ad altri autori, fosse a conoscenza di tale opera, come testimonia il fatto che lo stesso Erone parla esplicitamente di opere di Archimede che noi adesso non conosciamo più.

2.3 Autori successivi

Come abbiamo gia visto, anche Erone, Pappo, Eutocio e Simplicio hanno scritto a riguardo del centro di gravità. Tutti loro sono successivi ad Archimede e, come gia detto, non è da escludere la possibilità che essi conoscessero un'opera a noi non pervenuta.

2.3.1 Erone

Come abbiamo visto, Erone dà una definizione di centro di gravità (vedi paragrafo 1.2); è interessante notare le altre espressioni utilizzate da Erone per indicare il centro di gravità: “centro di inclinazione” o “centro di caduta”. L'ultima espressione potrebbe essere stata suggerita dall'esperienza: quando si sospende un corpo per un punto e lo si lascia libero di ruotare intorno al punto di sospensione, il moto iniziale del suo centro di gravità è verso il suolo e il corpo si fermerà quando il suo baricentro si posizionerà verticalmente al di sotto del punto di sospenzione; ossia la tendenza a cadere è come se fosse concentrata nel centro di gravità.

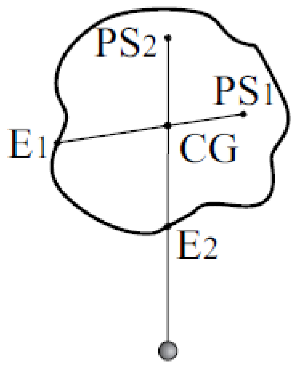
Erone dà, inoltre, una procedura pratica per individuare la posizione del centro di gravità di un “corpo” piano (probabilmente Erone ha in mente una figura geometrica bidimensionale) che si basa sulla definizione di baricentro già vista nel paragrafo 1.2: si sospende un corpo per un punto e lo si lascia libero di ruotare e si aspetta che il corpo acquisisca la posizione di equilibrio, ora con l'aiuto di un filo a piombo, si traccia la linea verticale passante per il punto di sospensione: il baricentro si trova su tale linea.[4] Ora, ripetendo la procedura sospendendo il corpo per un altro punto diverso da quello di prima, si trova una seconda linea che contiene il centro di gravità. Allora il baricentro del corpo sarà il punto di intersezione delle due linee trovate prima (si veda figura 2.1).[5]

Infine, come gia accennato, Erone afferma che Archimede in un libro “sulle colonne” o “sui supporti” studia come si distribuisce il peso di un corpo su

[4]il fatto che un corpo sospeso è in equilibrio quando il punto di sospensione e il centro di gravità sono sulla stessa retta verticale e il centro di gravità si trova al di sotto del punto di sospensione era noto già ad Archimede (forse è un suo risultato) (si veda appendice B)

[5][Ero88], p. 95

Figura 2.1:



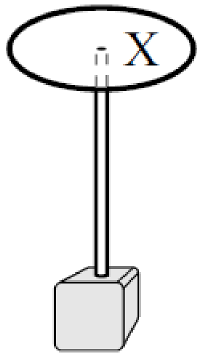
diverse colonne di supporto. Aggiunge che se il corpo è sospeso su una colonna o su un supporto verticale e se il supporto, prolungato verso l'alto, passa attraverso il baricentro del corpo, esso è in equilibrio. É ovviamente possibile che questo sia un risultato di Archimede (si veda figura 2.2).[6]

2.3.2 Pappo

Chiaramente le discussioni di Erone e Pappo su *centro di gravità* attingono alla stessa fonte e poichè l'esposizione di Erone è piuttosto approssimativa e confusa, conviene leggere anche l'opera di Pappo.
Anche riguardo Pappo di Alessandria si sa ben poco; si pensa sia vissuto intorno al 320, anno in cui avrebbe steso un commento dell'almagesto di Tolomeo. Pappo vive dunque in un periodo di profonda crisi della scienza e difficilmente si può credere che abbia dato contributi innovativi; in effetti Pappo è più un compilatore di autori precedenti che uno scienziato. Egli dà, inoltre, un'altra procedura pratica per individuare la posizione del centro di gravità di un corpo che si basa sul fatto che questo punto ha la proprietà

[6][Ero88], cap. 25-31

Figura 2.2:



che una retta o un piano passanti per esso dividono a metà il peso del corpo: Pappo si immagina una linea retta e al di sopra di essa pone il corpo (anche in questo caso si ha a che fare con una figura bidimensionale) in modo che esso sia in equilibrio, ossia non si inclini nè da una parte, nè dall'altra; allora – dice Pappo – la retta divide a metà il corpo, cioè lo divide in due parti equiponderanti. Ora, se si ripete nuovamente il procedimento ponendo il corpo in un'altra posizione di quilibrio allora si potrà individuare un'altra retta che divide a metà il corpo; l'intersezione delle due rette è il baricentro del corpo.[7]

Ora, questo è vero solo se il corpo è omogeneo e gode di una particolare simmetria, ma in generale non lo è.

Come esempio Pappo dimostra che il baricentro di un triangolo è il punto di incontro delle mediane: si immagina un trinagolo sospeso su una retta contentente interamente la mediana, la retta come è noto divide a metà l'area del triangolo e quindi esso starà in equilibrio sospeso su tale retta; il procedimento si ripete per una seconda mediana e si conclude che il centro di gravità del triangolo è il punto di incontro delle mediane.

[7][Pap82], pp. 816-818

Ovviamente il risultato di Pappo è esatto, non lo è però il metodo usato: secondo il ragionamento di Pappo il baricentro si trova su qualsiasi retta che divide a metà l'area del triangolo, mentre si può facilmente vedere che così non è: si immagini per esempio una retta parallela alla base del triangolo e tale che divida a metà la sua area: essa, in generale, non conterrà il baricentro. Non è vero nemmeno l'inverso: una retta che passa per il baricentro, in generale, non divide a metà l'area del triangolo; questo avviene solo se la retta passa anche per un vertice del triangolo, ossia se contiene interamente una mediana.

Pappo, evidentemente, non è consapevole dell'errore ma, sapendo che il baricentro di un triangolo è il punto di incontro delle mediane, come Archimede aveva dimostrato, cerca di dimostrarlo utilizzando questa procedura.

Si possono a questo punto fare due ipotesi, entrambe plausibili:

- Pappo (e probabilmente anche Erone) conosce il lavoro di Archimede, ma non è in grado di capirlo fino in fondo anche a causa del periodo storico al quale appartiene: periodo di profonda decadenza scientifica, con conseguente impossibilità di formare persone capaci di dare una continuazione ai lavori precedenti. Di conseguenza Pappo confonde i concetti, le idee e i metodi di Archimede, ma senza perdere di vista i risultati; arriva dunque a elaborare l'errata procedura testè vista a cui, a dispetto di tangibili difetti logici, non può essere negata una certa efficacia.

- Pappo conserva con singolare superficialità il metodo appena descritto per la determinazione del centro di gravità che probabilmente risale a tempi pre-ellenistici. Questo chiarisce l'intento della ricerca di Archimede: egli riconobbe l'errore della procedura e capì (anche grazie alla teoria della leva) che parti che si fanno in equilibrio, in generale non hanno lo stesso peso ma che si doveva tener conto anche della posizione dei loro centri di gravità. Egli giunse così a considerare una leva sui cui bracci le parti del corpo venivano sospesi nei loro centri di gravità e in questo modo la teoria della leva lo mise in condizione di determinare i centri di gravità, perchè questo equivale a trovare il punto per il quale bisognava sospendere la leva affinchè essa fosse in equilibrio. Questa teoria era, tuttavia, basata sull'antica teoria del baricentro che espone Pappo, per questo Archimede non ha motivo di definire i concetti usati (in particolare quello di *centro di gravità*), in quanto erano già usati in precedenza.

Capitolo 3

Definizione implicita

3.1 Proposizione IV

In questo capitolo cercheremo di vedere se è possibile che Archiemede avesse definito implicitamente il concetto di centro di gravità attraverso i postulati. Cominceremo con l'esaminare la dimostrazione della proposizione IV di *Equilibrio dei piani I*.

Proposizione IV. *Se due grandezze uguali non hanno lo stesso centro di gravità, allora il centro di gravità della grandezza composta dalle due grandezze sarà il punto medio della retta che unisce i centri di gravità delle grandezze.*[1]

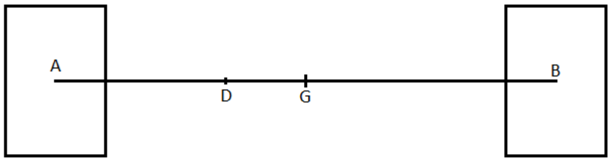
Dimostrazione. Con riferimento alla figura 3.1, siano A e B rispettivamente i centri di gravità delle grandezze A e B, G il punto medio del segmento AB. Supponiamo, per assurdo, che G non sia il centro di gravità del sistema, ma sia esso un qualunque altro punto D di AB. Allora *il sistema è in equilibrio quando lo si sospende per D*. Ma questo è impossibile a causa del I postulato (infatti le due grandezze uguali A e B risultano in equilibrio e sospese a distanze diseguali dal fulcro D). Di conseguenza G è il centro di gravità del sistema.[2] □

Da questa dimostrazione, piuttosto semplice, si evince chiaramente che Archimede ha in mente la definizione di centro di gravità vista nel paragrafo 1.3. Questo da una parte ci impedisce di escludere la possibilità che il lavoro di Archimede si basa su un altro lavoro precedente (di Archimede stesso o di un altro autore), dall'altra ci autorizza a pensare che Archimede

[1]per Archimede, così come per Euclide, la "retta" coincide con quello che noi oggi chiamiamo "segmento"

[2][Arc88c], p. 401

Figura 3.1:



avesse, consapevolmete, definito in maniera implicita (attraverso i postulati) il concetto di centro di gravità.

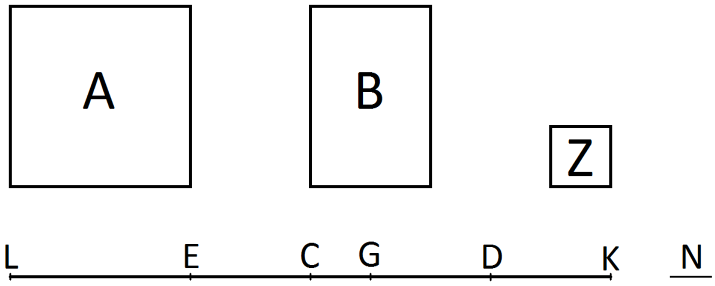
3.2 La legge della leva

Esamineremo ora quello che forse è il risultato più importante dell'*Equilibrio dei piani I*: la legge della leva (proposizione VI).

Proposizione VI. *Grandezze commensurabili sono in equilibrio a distanze inversamente proporzionali ai pesi.*

Dimostrazione. Con riferimento alla figura 3.2, siano A e B due grandezze commensurabili e sia ED una qualsiasi lunghezza e si abbia la proporzione: $A : B = CD : CE$. Si deve dimostrare che C è il centro di gravità della grandezza composta dalle A, B.
Poichè $A : B = CD : CE$ ed A è commensurabile con B, allora anche CD è commensurabile con CE, cosicchè esiste una misura comune di CE e CD, sia essa N.
Si costruiscano uguali a CE i due segmenti DG e DK ed uguale a CD il segmento EL. Allora CD ed EG sono uguali, perchè formati da segmenti uguali e di conseguenza anche EL sarà uguale ad EG. Quindi LG è il doppio di EG e GK il doppio di GD, ma ricordando che $EG = CD$ e che $GD = EC$,

Figura 3.2:



si ha, in definitiva, $LG = 2CD$ e $GK = 2EC$.

La proporzione di partenza: $A : B = CD : CE$, quindi, sarà equivalente a $A : B = LG : GK$ (si sono raddoppiati i bracci di leva). Quante volte LG contiene N, altrettante volte A contenga Z, dunque $LG : N = A : Z$; ma is ha pure: $GK : LG = B : A$, dunque, di conseguenza: $GK : N = B : Z$. Quindi quante volte GK contiene N, altrettante volte B contiene Z; ma si è determinato Z in modo che A sia un suo multiplo, cosicchè Z è la misura comune di A e di B.

Divisa la LG in parti uguali ad N e divisa la A in parti uguali a Z, le parti di LG uguali ad N saranno in egual numero delle parti di A uguali a Z. Cosicchè, se su ciascuna delle parti di LG si pone una grandezza uguale a Z avente centro di gravità nel punto medio della parte, l'insieme di tutte le grandezze è uguale ad A e il centro di gravità della grandezza composta dall'insieme di tutte le grandezze sarà E (*Equilibrio dei piani I, proposizione V, corollario II*) poichè tutte le grandezze sono in numero pari e quante sono a destra di E, altrettante sono alla sua sinistra, dal momento che $LE = GE$. Analogamente se su ciascuna delle parti in cui è diviso KG si pone una grandezza uguale a Z avente il centro di gravità nel punto medio della parte, allora l'insieme di tutte le grandezze sarà uguale a B e il centro di gravità sarà D. Dunque la grandezza A risulterà posta in E e la grandezza B in D. Ora, guardando l'intero segmento LK, su di esso sono state poste tante grandezze tutte uguali a Z, il loro centro di gravità sarà ovviamente il punto medio di LK, ossia il punto C. Dunque la grandezza A posta in E e la grandezza B posta in D, sospese nel punto C, saranno in equilibrio.[3] $\square$

L'idea fondamentale è quindi, quella di porre A in E e B in D e dimostrare che C è il centro di gravità. Il vero nucleo della dimostrazione consiste nel procedimento mediante il quale le grandezze A e B sono poste nei punti E e D; ciò viene fatto dividendo ciascuna di esse in parti uguali a Z e che vengono sospese ai segmenti della retta LK in modo che i centri di gravità dei due sistemi vengano a trovarsi rispettivamente in E ed in D. Alla leva sono così sospese non le grandezze iniziali, ma due sistemi di grandezze che sono rispettivamente dello stesso peso di A e di B ed i cui centri di gravità sono nei punti E e D, considerati rispettivamente come posizioni di A e di B. Ciò equivale a dire che l'influenza esercitata sull'equilibrio da un corpo sospeso ad una leva dipende esclusivamente dalla gravità del corpo e dalla posizione del suo centro di gravità, mentre la forma non ha importanza. La domanda che sorge spontanea è la seguente: Archimede era consapevole del fatto che la conclusione a cui giunge è basata su questa premessa? In caso di una risposta affermativa, basta questo ad identificare univocamente la posizione del centro di gravità di un corpo?

---

[3] [Arc88c], pp.403-406

3.3 Critica di Mach

Ascoltimo in primo luogo l'opinione di un famoso ed autorevole storico della meccanica, Ernst Mach.[4]
Vogliamo riferire le sue parole *in extenso*:

> «Per quanto le conclusioni di Archimede e dei suoi seguaci riscuotano in un primo momento la nostra approvazione, tuttavia a un esame più attento nasce qualche dubbio sul loro rigore. Dalla pura assunzione dell'equilibrio di pesi uguali situati a distanze uguali è derivata la proporzione inversa fra pesi e distanze! Come è possibile? Se non abbiamo scoperto con il solo raggionamento la semplice dipendenza dell'equilibrio dal peso e dalla distanza, ma abbiamo dovuta ricavarla dall'esperienza, tanto meno potremmo determinare con il procedimento speculativo la forma di questa dipendenza, cioè la proporzionalità. In realtà da Archimede e da tutti i suoi continuatori è introdotta in modo più o meno nascosto e tacito l'assunzione che l'effetto di rottura dell'equilibrio, prodotto da un peso P applicsto alla leva alla distanza L dal fulcro sia misurato dal prodotto $P \cdot L$ (il cosiddetto momento statico). Innanzitutto è chiaro che in una disposizione perfettamente simmetrica l'equilibrio sussiste per *qualsiasi* dipendenza da L del momento che rompe l'equilibrio, cioè $P \cdot f(L)$; perciò da questo equilibrio è impossibile derivare la forma determinata $P \cdot L$. L'errore della deduzione deve dunque trovarsi nella sostituzione sopra esposta, e ivi si trova di fatto. Archimede afferma che l'effetto di due pesi uguali resta uguale, in tutte le circostanze, all'effetto del peso doppio applicato

[4]Ernst Mach (1838-1916) fu professore di storia e teoria delle scienze induttive a Vienna. Deve la sua fama, oltre che all'opera *"La meccanica nel suo sviluppo storico-critico"*, a importanti ricerche sulle onde d'urto e a una polemica con Lenin. Il suo pensiero laico, antimetafisico e scientista è all'origine dell'esperienza del Circolo di Vienna.

> nel punto medio del sistema. Però, per il fatto che suppone e conosce un'influenza della distanza dal punto di rotazione, egli non può affermare a priori che tale uguaglianza è valida anche per il caso in cui i due pesi hanno distanze ineguali dal fulcro. Se infatti un peso, applicato fuori dal fulcro, è diviso in due parti spostate simmetricamente dall'originario punto di sospensione, allora una parte si avvicina al fulcro esattamente quanto l'altra se ne allontana. Se si afferma che l'effetto resta lo stesso anche in questo caso, si ha con ciò già definita la forma della dipendenza del momento da L, giacchè la costanza dell'effetto è possibile solo quando tale forma sia $P \cdot L$, cioè quando tra P e L vi sia un rapporto di proporzionalità.
> A questo punto è superflua ogni altra discussione. É chiaro che l'intera deduzione contiene gia come ipotesi, anche se non formulata esplicitamente, la proposizione che deve essere dimostrata.[5]

Innanzitutto Mach afferma che non si può dedurre la legge della leva dalla pura assunzione che pesi uguali sospesi a uguali distanze dal fulcro sono in equilibrio. Ovviamente questo punto della critica è molto debole, in quanto Archimede non fa discendere la sua conclusione solo dall'esistenza di tale equilibrio, ma da tutto il sistema di postulati e proposizioni gia dimostrate che intervengono nel suo sviluppo. Il mio parere è che Mach voglia fare una critica metodologica: non è possibile dimostrare teoremi senza partire dall'esperienza; per questo cerca di confutare la conclusione di Archimede basata solo su postulati *evidenti a priori*. Evidentemente egli non è consapevole fino in fondo del metodo scientifico usato dagli scienziati ellenistici.

[5][Mac77], p. 47

3.4 Riposta alla critica

Continuando ad esaminare la critica di Mach si evince che Archimede non è autorizzato a sostituire una grandezza con un'altra di forma diversa ma uguale peso e stesso centro di gravità o, per lo meno, non è consapevole che il suo ragionamento presuppone che l'equilibrio della leva non si alteri se si effettua tale sostituzione. Infine, l'intera dimostrazione diventa superflua non appena questo presupposto venga consapevolmente adottato poichè in esso è già implicitamente contenuto il teorema da dimostrare.

Dijksterhuis[6], per rispondere alla critica traduce, in termini attuali, la seconda parte dell'obiezione: una volta accettato il fatto che la funzione $P \cdot f(L)$ soddisfa l'equazione funzionale

$$\frac{1}{2}P \cdot F(L+h) + \frac{1}{2}P \cdot F(L-h) = P \cdot F(L)$$

è superfluo provare che $P \cdot f(L))$ ha la forma $P \cdot L$, poichè l'equazione funzionale in questione esiste solo fe $f(L)$ ha forma L.[7]

Dijksterhuis continua affermando che l'insostenibilità di questo ragionamento balza agli occhi non appena ci si sofferma sulla sua formulazione matematica. In effetti se non è necessario risolvere l'equazione funzionale in questo caso, quando ha senso farlo? E, in generale, se è lecito ritener superflua la deduzione di una conclusione C da un gruppo di premesse P nel caso in cui P

[6]Eduard Jan Dijksterhuis (1892- 1965) è stato uno storico della scienza olandese. Ha inseganto matematica e fisica per oltre 35 anni in Olanda e successivamente è stato chiamato ad insegnare storia della matematica negli Stati Uniti. É del 1938 il suo libro su Archimede. Nel 1962 è stato insignito della medaglia Sarton per la storia della scienza.

[7]Questa equazione significa che l'influenza sull'equilibrio di un peso P a distanza L è equivalente alle influenze combinate dei pesi $\frac{1}{2}P$ in punti che sono simmetrici rispetto al punto dove P era sospeso all'inizio. Naturalmente ciò si basa sull'ipotesi che tali influenze possano combinarsi additivamente.

vale solo se C è vera, si possono considerare superflue tutte le dimostrazioni matematiche poichè, se C non è vera, è certo che P non sarà valida!
Per quanto riguarda la parte centrale della critica, ossia la non consapevolezza da parte di Archimede che il suo ragionamento presuppone che l'equilibrio della leva non si alteri se si sostituisce una grandezza con un'altra di forma diversa ma uguale peso e stesso centro di gravità, Dijksterhuis risponde mostrando che Archimede fosse molto più che consapevole di questo.
Infatti il matematico siracusano dichiara esplicitamente che, proprio per la collocazione delle Z parti sui segmenti N, il centro di gravità comune delle parti di A si trova in E e quello delle parti di B in D, e che *conseguentemente* la grandezza A è posta in E e la grandezza B in D, mentre in realtà nè A nè B conservano la loro forma primitiva. Ciò significa che egli giudica l'influenza di una grandezza solamente dal peso e dalla posizione del centro di gravità.
Inoltre, ricordiamo il VI postulato:

> se grandezze [sospese] a certe distanze [dal fulcro] sono in equilibrio, anche altre grandezze uguali ad esse [sospese] alle stesse distanze [dal fulcro] saranno in equilibrio.

Apparentemente esso sembra una tautologia perfettamente superflua. Si può però interpretare in maniera leggermente diversa questo postulato[8]:

> se grandezze [sospese] a certe distanze [dal fulcro] sono in equilibrio, anche altre grandezze uguali ad esse, i cui centri di gravità si trovano alla stessa distanza [dal fulcro] saranno in equilibrio.

[8]Possiamo anche pensare che il testo greco sia leggermente corrotto.

Alla luce di questa interpretazione, data da Toeplitz[9] ed accettata anche da Dijksterhuis,[10] la critica di Mach cade in quanto è esplicitamente formulato il presupposto usato nella dimostrazione della proposizione VI che Mach ritiene mancante.

Il postulato così interpretato afferma in pratica che *in un sistema di grandezze in equilibrio, si può sostuire una delle grandezze con un insieme di altre grandezze tali che il peso totale sia uguale a quello della grandezza tolta e il centro di gravità dell'insime di tali grandezze coincida con quello della grandezza tolta.*

Ovviamente alla luce di questo non possiamo avere dubbi: Archimede era pienamente consapevole del fatto che la dimostrazione della sesta proposizione si basa sul presupposto che l'influenza di un peso sospeso a una leva in equilibrio dipenda dalla gravità del corpo e dalla posizione del suo centro di gravità. La consapevolezza di ciò era apparentemente assente in Pappo, come dimostra l'errata procedura usata per determinare la posizione del baricentro di un corpo (si veda paragrafo 2.3).

3.5 Archimede nel terzo millennio

Vorrei ora citare un lavoro del 2001 di Bruno Girotto e Silvano Holzer, due professori dell'Università di Trieste. Il punto fondamentale di tale lavoro è la dimostrazione del seguente teorema:

---

[9] Otto Toeplitz (1881-1940) è stato un matematico tedesco, si è occupato di storia e didattica della matematica, ma il suo contributo più importante riguarda l'analisi funzionale.

[10] [Arc89], pp. 236-241

> dato uno spazio topologico vettoriale di Hausdorff con dimensione maggiore di uno, il baricentro di masse semplici è individuato univocamente da una mappatura associativa, interna e continua definita su queste masse.[11]

Entriamo un po' più nel dettaglio seguendo pedissequamente la formulazione matematica data dai due professori di Trieste.
Innanzitutto indichiamo con X uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff.[12]
Dopodichè, sia F un campo su X che include tutti i "punti" $\{x\}$ con $x \in X$. Si indichi poi con μ, con o senza indice, una *massa* non nulla (ossia una misura positiva, addivita, finita e limitata) su F e con δ_x la *massa di Dirac* in x; allora:

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}. \tag{3.1}$$

Infine, sia S il cono convesso di *masse semplici* (ossia una combinazione lineare positiva di masse di Dirac).[13].
Allora, il baricentro di una massa semplice μ è:

$$b(\mu) = \frac{1}{||\mu||} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} x_i. \tag{3.2}$$

Il baricentro così definito individua una mappatura $m\colon S \mapsto X$ che soddisfa le seguenti proprietà:

---

[11] Per la dimostrazione del teorema si veda [GH04].

[12] Uno spazio di Hausdorff (o spazio separato) è uno spazio topologico nel quale per due punti distinti si possono sempre trovare degli intorni disgiunti, ossia è uno spazio in cui vale l'assioma di separazione: $\forall\ x, y \in X\ \exists\ intorni\ U, V\ di\ x, y\ tali\ che\ U \cap V \neq \emptyset$.

[13] Un cono è un sottoinsime di uno spazio vettoriale chiuso rispetto alla moltiplicazione per scalari positivi: $v \in C, \lambda > 0 \Rightarrow \lambda v \in C$. Un cono si dice convesso se $\lambda v + \mu w \in\ C \quad \forall v, w \in C\, e\, \forall \lambda, \mu > 0$.

associatività:

$$m(\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2) = m(\alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2)$$
$$\text{se}\, ||\mu_i|| = ||\nu_i||\, \text{e}\, m(\mu_i) = m(\nu_i).\ \nu_i \in S(i = 1, 2). \tag{3.3}$$

Internalità:

$$m(\alpha\delta_x + \beta\delta_y) \in [x, y], \forall\alpha, \beta > 0\, \text{e}\, x, y \in X.$$
$$[x, y]\, \text{è il segmento che ha per estremi i punti } x \text{ e } y \text{ di } X. \tag{3.4}$$

Continuità:

$$m(\mu_n) \to m(\mu)\, \text{se, per qualche numero naturale } k, \text{ si ha:}$$
$$\mu_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(n)}\delta_{x_i}\, \text{per ogni}\, n, \mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\delta_{x_i} \tag{3.5}$$
$$\text{e}\, \alpha_i^{(n)} \to \alpha_i, x_i^{(n)} \to x_i \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Il lavoro di Girotto e Holtzer consiste, come già detto, nell'aver dimostrato che le suddette tre propietà sono sufficienti ad identificare univocamente il baricentro come definito sopra.
Ovviamente questo teorema riguarda il baricentro di misure; però si può pensare di tradurre tutto il lavoro in termini più familiari ad Archimede. A tale scopo posiammo immaginare che μ indichi un insime di n grandezze, ciascuna di massa α_i e posta nella posizione x_i. Allora sarà ancora valida la 3.1. In termini Archimedei, inoltre, l'associatività (3.3) può essere tradotta nel modo seguente: il baricentro di un insieme di grandezze non cambia se si sostituisono alcune di queste grandezze con altre che hanno lo stesso baricentro del sottoinsieme di grandezze tolte e la stessa massa. Inoltre, se indichiamo con A e B i centri di gravità di due grandezze (ovviamente A e B sono due punti in generale non coincidenti) allora in virtù dell'internalità (3.4) il baricentro dei suddetti due punti si trova internamente al segmento

AB. Infine la continuità (3.5) esprime il fatto che si possono cambiare con continuità le posizioni delle grandezze e il baricentro si muoverà verso quello della nuova distribuzione.

Possiamo ora vedere se dal trattato di Archimede emergano queste tre proprietà. L'internalità è evidente: Archimede sa bene che il centro di gravità di due punti appartiene al segmento che ha per estremi i due punti. Immaginiamo infatti che i due punti siano i centri di gravità di due grandezze; è dimostrato esplicitamente nell'*equilibrio dei piani I* che se le due grandezze sono uguali allora il centro di gravità è il punto medio del suddetto segmento (si veda paragrafo 3.1). Inoltre, se le grandezze non sono uguali, il centro di gravità del sistema è ancora interno al segmento congiungente i due centri e tale che lo divide in due parti inversamente prporzionali alle due grandezze (cioè alle loro masse) (si veda paragrafo 3.2). Che il baricentro goda, quindi, della proprietà dell'internalità è ben chiaro ad Archimede.

L'associatività del baricentro ad una analisi superficiale sembra mancare nell'opera di Archimede. Alla luce però della critica di Mach, vista nel paragrafo 3.3, ma soprattutto alla luce della risposta di Dijksterhuis, non possiamo negare che questa proprietà era ben chiara ad Archimede. Infatti l'interpretazione del VI postulato che abbiamo visto nel paragrafo 3.4 ricalca, oltre che nel significato, addiruttura nelle parole, la spiegazione dell'associatività data sopra (in questo paragrafo).

Per quanto riguarda la continuità, essa non è esplicitamente presente nell'opera di Archimede. Si può pensare che egli la usi implicitamente; la difficoltà maggiore risiede nel fatto che nell'opera si trattano sistemi all'equilibrio e dunque a prescindere dal modo in cui essi lo raggiungono: quindi non essendo esplicitamente studiato alcun tipo di movimento, è chiaro che la continuità del baricentro così come l'abbiamo intesa prima è difficilmente individuabile.

Tuttavia leggendo il postulato IV (si veda paragrafo 1.2) si può pensare che Archimede immaginasse due figure congruenti inizialmente separate e, tenendo ferma una, si muove l'altra fino a sovrapporla con la prima. In questo modo il centro di gravità della figura in movimento si muove altrettanto e in effetti lo fa con continuità fino a coincidere con il baricentro della figura ferma. Questo ovviamente è diverso da ciò a cui fanno riferimento Girotto e Holzer nel loro lavoro, però si deve ammettere che Archimede avesse in mente che il baricentro si potesse muovere con continuità.

Conclusioni

Come abbiamo visto nel capitolo 1, in epoca ellenistica era ben noto che si potessero definire gli enti di una teoria mediante i postulati della teoria stessa.

Ovviamente un ente si può definire anche nel modo più standard, ossia etichettando con un nome più o meno nuovo un'espressione composta da più termini già noti. Un esempio classico è la definizione di "sferoide allungato" o di "sferoide schiacciato" data da Archimede nella sua opera *Sui conoidi e sferoidi*:

> Se un'ellisse ruota, con l'asse maggiore fermo, fino a tornare nella posizione inziale, la figura racchiusa dall'ellisse sia detta "sferoide allungato". Se un'ellisse routa, con l'asse minore fermo, fino a tornare nella sua posizione inziale, la figura racchiusa dall'ellisse sia detta "sferoide schiacciato".

La necessità di definire implicitamente gli enti nasce dal fatto che le definizioni esplicite (come quella appena vista) rimandano il significato di un nuovo termine a quello di altri già definiti. Ovviamente non si può regredire all'infinito: bisogna ammettere l'esistenza di enti primitivi dal significato "evidente", che non hanno bisogno di alcuna definizione esplicita. Questi concetti primitivi sono definiti dal fatto di soddisfare gli assiomi della teoria, si parla in questo caso di "definizioni mediante assiomi" o "definizioni implicite". Agli albori della scienza (ossia nel III sec. a.C.) il numero di concetti nuovi da definire crebbe in modo esponenziale; ora, alcuni concetti vennero definiti *ex novo*, per altri si dovettero usare parole della lingua quotidiana. Le parole di uso quotidiano, però, hanno già ovviamente un loro significato e dunque esso va "sfrondato" per adattarlo a descrivere gli enti teorici. Sono dunque i postulati ad attuare questo sfrondamento del significato: si ha a che fare ancora con delle "definizioni mediante postulati". Un esempio è dato dal concetto di "raggio visuale" già visto nel pagargrafo 1.1.1: la parola greca usata da Euclide, $o\psi\iota\varsigma$, che abbiamo tradotto con "raggio visuale", era una parola in uso nel linguaggio quotidiano dal significato molto vasto: poteva significare aspetto, visione, spettacolo, oppure vista, sguardo. All'interno dell'Ottica di Euclide tutto ciò non ha più alcuna importanza, in quanto tutti questi significati, non essendo mensionati nei postulati, non hanno alcun ruolo nella teoria.

Quindi il metodo di definizione implicita da una parte serviva per evitare il regresso all'infinito di definizione degli enti, dall'altro attuava uno sfrondamento del significato delle parole di uso quotidiano per adattarle a caratterizzare univocamente un ente di una teoria scientifica; ossia gli enti vanno intesi in modo da garantire la verità dei postulati.[14]

Per quanto riguarda, poi, il concetto di centro di gravità, concetto di fondamentale importanza per la fisica, ci si può chiedere se anche esso fosse definito implicitamente da Archimede nell'opera sull'*Equilibrio dei piani I.*

Abbiamo visto inizialmente che diversi autori successivi ad Archimede si sono occupati di meccanica, dando una esplicita definizione di centro di gravità (si veda paragrafo 1.2). Inoltre, il fatto che le diverse definizioni sono tutte grossomodo equivalenti, alcune addirittura utilizzano le stesse parole, ci suggerisce che probabilmente questi autori avessero una fonte comune a cui attingere.

In effetti nel capitolo 2 si arriva alla conclusione che non è da escludere l'ipotesi che gli autori sopra citati fossero a conoscenza di un'opera di Archimede (o addirittura precedente) a noi non pervenuta in cui fossero definiti tutti i concetti fondamentali della meccanica, tra cui quello essenziale di centro di gravità.

A supporto di questa ipotesi ho portato essenzialmente due argomenti. In-

[14]Le idee esposte si trovano in [Rus03], pp. 210-217

nanzitutto Archimede stesso cita alcuni risultati, non pervenutici, inserendoli in un'opera che chiama *Elementi di meccanica*. In secondo luogo, leggendo le opere di Erone e di Pappo si evincono risultati e procedimenti (a volte non del tutto corretti) che fanno pensare ad un loro interesse per le opere precedenti (per cui anche di Archimede) che a volte difficilmente riescono a comprendere fino in fondo.
Successivamente, nel capitolo 3 si cerca di portare degli argomenti a favore di una definizione implicita del centro di gravità. L'esame della proposizione VI di *Equilibrio dei piani I*, ossia la famosa legge della leva, e la successiva critica di Mach ci aiutano nel nosto scopo. In effetti la critica di Mach, ad una prima analisi, è fondata: nulla ci garantisce che Archimede sia consapevole che la dimostrazione della legge della leva presuppone che l'equilibrio non si alteri se si sostituisce una grandezza con un'altra di forma diversa, ma di uguale peso e stesso centro di gravità. La risposta di Dijksterhuis, però, mette a tecere definitivamente Mach, in quanto la nuova interpretazione del VI postulato (si veda paragrafo 3.4) cancella ogni dubbio riguardo al grado di consapevolezza di Archimede.
Inoltre, un argomento molto forte a favore dell'ipotesi di definizione implicita è data nel paragrafo 3.5, dove si è esaminato un lavoro di Girotto e Holzer del 2001 in cui si dimostra che il baricentro di masse semplici è individuato univocamente da una funzione associativa, interna e continua definita su queste masse. Questo risultato ci aiuta dal momento che ad una analisi approfondita dell'*Equilibrio dei piani I*, si evince che il centro di gravità così come lo intende Archimede gode dell'internalità, dell'associatività e, implicitamente, anche della continuità. Ovviamente Archiemde studia i baricentri di grandezze (immaginandosi grandezze geometriche) mentre il lavoro di Girotto e Holzer si riferisce a baricentri di misure; a mio parere però la differenza ri-

siede solo nel formalismo e nella terminologia, ma il concetto è lo stesso.
In definitiva quindi, ci sono argomenti molto forti sia a favore di una definizione esplicita del centro di gravità in un'opera di Archimede a noi non pervenuta, il cui titolo è probabilmente *Elementi di meccanica*, sia a favore di una definizione implicita attraverso i postulati (ipotesi, a mio avviso, dominante alla luce del lavoro di Girotto e Holzer). Purtroppo dobbiamo essere onesti e analizzare ogni ipotesi a prescindere dalle nostre idee personali; in questo senso il problema della definizione di centro di gravità in Archimede è ancora un problema aperto.
Siamo fiduciosi che un domani lo studio del famoso *Palinsesto di Archimede* ci dia la risposta a questa domanda.
Ai posteri l'ardua sentenza!

Appendice A

Ottica di Euclide: i postulati

L'Ottica di Euclide si apre con sette postulati in cui si comincia a parlare di raggi visuali, senza averne dato precedentemente una definizione esplicita.

1. I raggi visuali dall'occhio si muovono secondo linee rette che fanno un certo intervallo una dall'altra.

2. La figura compresa dai raggi visuali è un cono che ha il vertice sull'occhio e la base sui limiti di ciò che è visto.

3. É visto quello su cui incidono i raggi visuali e non è visto quello su cui non incidono i raggi visuali.

4. Ciò che è visto sotto un angolo maggiore appare maggiore, quello che è visto sotto un angolo minore appare minore e cose viste sotto angoli uguali appaiono uguali.

5. Ciò che è visto da raggi più alti appare più alto, ciò che è visto da raggi più bassi appare più basso.

6. Similmente, ciò che è visto da raggi più a destra appare più a destra, ciò che è visto da raggi più a sinistra appare più a sinistra.

7. Ciò che è visto sotto più angoli appare con maggiore precisione.[1]

[1] [Euc14b], p. 2025

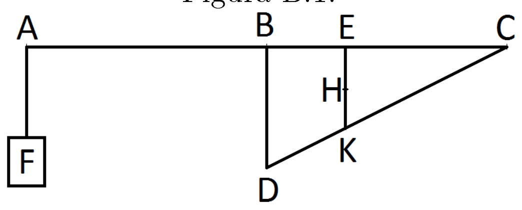
Appendice B

Quadratura della parabola: proposizione VI

Proposizione VI. *Sia dato un piano verticale e su di esso un triangolo BCD rettangolo, avente l'angolo retto nel punto B e il lato BC sia uguale a metà della lunghezza della leva AC. Si sospenda il triangolo per i punti B e C e si sospenda anche un'altra area F dall'altra parte della leva, nel punto A e l'area F sospesa in A faccia equilibrio al triangolo BCD dove ora è posto. Dico che l'area F è la terza parte del triangolo BCD.*

Dimostrazione. Con riferimento alla figura B.1, si divida la linea BC nel punto E in modo tale che CE sia il doppio di EB, si tracci KE parallela a DB e la si divida per metà dal punto H.
Il centro di gravità del triangolo BCD è il punto H: *ciò infatti è stato dimostrato negli Elementi di Meccanica.*
Se dunque si scioglie la sospensione del triandolo BCD nei punti B,C e viene sospeso per il punto E, il triangolo resta dove è: *infatti ogni corpo sospeso, qualunque sia il punto di sospensione, resta in modo che il punto di sospensione e il centro di gravità siano su una perpendicolare (=verticale): anche questo è stato infatti dimostrato.*
L'equilibrio con l'area F quindi non viene alterato se si sospende il triangolo

Figura B.1:



per il punto E. Poichè dunque si fanno equilibrio l'area F sospesa in A e quella BCD sospesa in E, è manifesto che esse sono in proporzione inversa con le distanze dal fulcro (Equilibrio dei piani I, proposizione VI) e si ha: $AB : BE = BCD : F$. Ma la AB è tripla della BE, dunque anche il triangolo BCD è triplo dellarea F.[1] $\square$

[1][Arc88a], pp. 489-490

Bibliografia

[Arc88a] Archimede. «Quadratura della parabola». In: *Opere di Archimede.* A cura di Attilio Frajese. Torino: UTET, 1988.

[Arc88b] Archimede. «Sulla sfera e sul cilindro». In: *Opere di Archimede.* A cura di Attilio Frajese. Torino: UTET, 1988.

[Arc88c] Archimede. «Sull'equilibrio dei piani, libro I». In: *Opere di Archimede.* A cura di Attilio Frajese. Torino: UTET, 1988.

[Arc89] Archimede. «Equilibrio dei piani, libro I». In: *Archimede.* A cura di Eduard J. Dijksterhuis. Firenze: Ponte alle grazie, 1989.

[Ero88] Erone. «Les Mécaniques ou L'Élévateur de Héron d'Alexandrie». In: *Les Belles Lettres, Paris* (1988). A cura di B. Carra de Vaux.

[Euc14a] Euclide. «Elementi». In: *Euclide. Tutte le opere.* A cura di Fabio Acerbi. III edizione. Milano: Bompiani, 2014.

[Euc14b] Euclide. «Ottica». In: *Euclide. Tutte le opere.* A cura di Fabio Acerbi. III edizione. Milano: Bompiani, 2014.

[Eut72] Eutocio. «Archimède, texte établi et traduit par Charles Mugler». In: *Les Belles Lettres, Paris* 4 (1970-1972).

[GH04] Bruno Girotto e Silvano Holzer. «A characterization of the barycentre». In: *Mathematika* 51 (2004), pp. 149–153.

[Mac77] Ernst Mach. *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico.* Trad. da Alfonsina D'Elia. Torino: Boringhieri, 1977.

[Pap78] Pappo. *Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt.* A cura di Friedrich Otto Hultsch et al. Vol. 3. Apud Weidmannos, 1878.

[Pap82] Pappo. *Pappus d'Alexandrie, La collection mathématique.* A cura di Albert Blanchard e Paul Ver Eecke. Parigi, 1982.

[Rus03] Lucio Russo. *La rivoluzione dimenticata.* III edizione. Milano: Feltrinelli, 2003.

[Rus98] Lucio Russo. «The Definitions of Fundamental Geometric Entities Contained in Book I of Euclids Elements». In: *Archive for History of Exact Sciences* 52.3 (1998), pp. 195–219.

[Sim94] Simplicio. *Simplicii in Aristotelis quattros libros de caelo commentaria.* A cura di Johann Ludwig Heiberg. Berolini, 1894.