

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA  
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea Specialistica in Matematica

**GRUPPO DELLE TRECCE,  
SUE RAPPRESENTAZIONI E  
INVARIANTI DEI NODI**

**Relatrice:**  
**Prof.ssa**  
**Annalisa MARZUOLI**  
**Dip. di Fisica Nucleare e Teorica**

**Tesi di laurea di:**  
**Mattia PAGANINI**

**Anno Accademico 2006-07**

# Ringraziamenti

A conclusione del mio lavoro e dei miei studi voglio ringraziare la Prof.ssa Annalisa Marzuoli per la disponibilità e la professionalità con cui mi ha seguito e guidato.

Ringrazio il dott. Claudio Dappiaggi per la preziosa consulenza.

Sono riconoscente ai miei genitori per aver sempre approvato e incoraggiato le mie scelte.

Ringrazio i miei amici e compagni, con i quali ho condiviso il mio percorso di studio.

Mattia Paganini

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1 Il gruppo delle trecce</b>	<b>9</b>
1.1 Costruzioni topologiche . . . . .	9
1.2 Costruzione secondo Artin . . . . .	11
1.3 Mapping class group . . . . .	13
1.4 Generatori e relazioni fondamentali . . . . .	14
1.5 Gruppo delle trecce $B_n$ e gruppo libero su $n$ generatori . . . .	16
<b>2 La rappresentazione di Burau</b>	<b>19</b>
2.1 Forma ridotta . . . . .	19
2.2 Forma matriciale e forma non ridotta . . . . .	21
2.3 Risultati sulla non fedeltà . . . . .	23
<b>3 La rappresentazione di Lawrence-Krammer</b>	<b>29</b>
3.1 Nozioni introduttive . . . . .	29
3.2 Accoppiamento di Blanchfield . . . . .	31
3.3 Forchette e spaghetti . . . . .	31
3.4 Fedeltà della rappresentazione . . . . .	33
3.5 Forma matriciale . . . . .	38
3.6 Ulteriori rappresentazioni di $B_n$ . . . . .	42
<b>4 Algebre di Hecke</b>	<b>45</b>
4.1 Definizione e proprietà . . . . .	45

---

4.2	Rappresentazioni dell'algebra . . . . .	48
4.3	Costruzione della base . . . . .	50
4.4	La funzione traccia . . . . .	51
<b>5</b>	<b>L'algebra di Birman-Murakami-Wenzl</b>	<b>54</b>
5.1	Definizione e proprietà . . . . .	54
5.2	Legame con la rappresentazione di Lawrence-Krammer . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Invarianti polinomiali dei nodi</b>	<b>64</b>
6.1	Nodi come chiusure di trecce . . . . .	64
6.2	Il polinomio HOMFLY . . . . .	69
6.3	Il polinomio di Kauffman . . . . .	71
6.4	Conclusioni . . . . .	76
<b>A</b>	<b>Richiami di teoria delle rappresentazioni</b>	<b>77</b>
A.1	Azione di un gruppo su un insieme . . . . .	77
A.2	Rappresentazioni . . . . .	79
A.3	Diagrammi di Young . . . . .	81
A.4	Le rappresentazioni di $S_n$ . . . . .	83
A.5	Formula per le dimensioni . . . . .	85
	<b>Bibliografia</b>	<b>86</b>

# Elenco delle figure

1.1	Treccia su 4 componenti . . . . .	11
1.2	Generatori di Artin di $B_n$ . . . . .	14
1.3	Generatori $\sigma_2$ di $B_4$ . . . . .	15
1.4	$D_n$ e i generatori di $\pi_1(D_n, d_0)$ . . . . .	16
1.5	Il Dehn half twist . . . . .	17
2.1	Azione di $\tau_\alpha$ . . . . .	25
2.2	La curva “a otto” $\alpha'$ . . . . .	25
2.3	Archi sul disco 5-puntato . . . . .	27
3.1	Forchetta F e una copia parallela F' . . . . .	32
3.2	Il bordo $E_1$ con lo spaghetti $N_4$ . . . . .	37
5.1	Generico elemento $T_{ij}$ . . . . .	59
6.1	Le azioni di Reidemeister . . . . .	65
6.2	$K_+$ , $K_-$ e $K_0$ . . . . .	66
6.3	Le skein relations per l'algebra di Hecke . . . . .	68
6.4	Ripartizione del piano $\mathbb{R}^2$ . . . . .	72
6.5	Indicatore A e indicatore B . . . . .	73
6.6	$D_+$ , $D_-$ , $D_0$ e $D_\infty$ . . . . .	74

# Introduzione

Lo studio del gruppo delle trecce e delle sue applicazioni inizia negli anni venti del Novecento, a opera di Emil Artin. Il gruppo delle trecce  $B_n$ , presentato in termini di  $n$  generatori e opportune relazioni, è un gruppo non abeliano di ordine infinito e pertanto lo studio delle sue rappresentazioni richiede l'impiego di tecniche più sofisticate di quelle utilizzate per i gruppi finiti. Il presente lavoro riguarda proprio l'analisi comparativa di diverse rappresentazioni di  $B_n$  e il loro utilizzo per costruire invarianti polinomiali dei nodi. Il gruppo delle trecce compare infatti in modo naturale nella teoria matematica dei nodi, in quanto ogni nodo immerso nello spazio tridimensionale può essere ottenuto come chiusura di una treccia aperta - rappresentata geometricamente come una collezione di  $n$  stringhe intrecciate, i cui estremi superiori e inferiori sono fissati su due dischi paralleli (teorema di Alexander). Il problema di maggior interesse, rimasto irrisolto per molti decenni, riguarda la linearità dei gruppi delle trecce, vale a dire la ricerca di una rappresentazione fedele di  $B_n$  in un gruppo di matrici su un anello commutativo. Nel 1935 Werner Burau introdusse una rappresentazione  $(n - 1)$ -dimensionale lineare non banale, che per lungo tempo fu considerata un buon candidato per una rappresentazione fedele (si mostra infatti che questa rappresentazione è fedele per  $n \leq 3$ ). Solo alla fine degli anni Novanta è stato realizzato che la rappresentazione di Burau non è fedele per  $n \geq 5$  (lasciando aperto l'unico caso  $n = 4$ ).

Ruth Lawrence nel 1990 ha introdotto una rappresentazione del gruppo delle trecce, dipendente da due variabili, che nel 2000 Daan Krammer ha dimostra-

to essere fedele per  $n = 4$  (in realtà la costruzione di Krammer è di tipo algebrico, mentre quella della Lawrence è di tipo topologico). Nel 2001 Stephen Bigelow è riuscito a provare, attraverso una nuova costruzione di natura topologica, che la rappresentazione di Lawrence-Krammer è fedele per ogni  $n$  e, quindi, il gruppo delle trecce risulta essere lineare. Il problema a lungo rimasto aperto ha trovato così una soluzione definitiva.

Questa tesi si ispira al contributo fondamentale di Stephen Bigelow ed è finalizzata a chiarire i legami tra le costruzioni algebrica e topologica della rappresentazione di Lawrence-Krammer e a mettere in luce aspetti relativi alla costruzione di invarianti polinomiali dei nodi.

Dopo aver introdotto la definizione di gruppo delle trecce, le sue relazioni con il mapping class group e con il gruppo libero su  $n$  generatori, nel secondo capitolo viene richiamata la rappresentazione di Burau nonché i risultati sulla sua non fedeltà.

Nel terzo capitolo si analizzano in modo critico i risultati riguardanti la rappresentazione di Lawrence-Krammer. In particolare nel paragrafo 3.6 viene presentato uno schema generale in cui si inseriscono le rappresentazioni di Burau e Lawrence-Krammer; tale schema si basa sul fatto che il gruppo delle trecce  $B_n$  agisce fedelmente come gruppo degli automorfismi del gruppo libero su uno stesso numero di generatori.

Nel capitolo 4, sulle algebre di Hecke, viene riconosciuto come la rappresentazione di Burau sia in realtà una rappresentazione del gruppo delle trecce in un'opportuna algebra di Hecke. Sull'algebra si introduce una funzione traccia che, nel caso della rappresentazione di Burau, risulta corrispondere all'invariante di Alexander per i nodi.

Nel capitolo 5, l'algebra di Birman-Murakami-Wenzl (BMW) è dapprima considerata relativamente al suo legame con l'algebra di Hecke: si costruisce infatti una decomposizione di tale algebra, che contiene una sottoalgebra isomorfa all'algebra di Hecke. Nella seconda parte del capitolo si mostra, riprendendo i lavori di Matthew Zinno, che la rappresentazione regolare del-

l'algebra BMW è irriducibile e coincide con la rappresentazione di Lawrence-Krammer del gruppo delle trecce, discussa nel terzo capitolo.

Nel capitolo finale si forniscono i minimi prerequisiti per comprendere il legame tra trecce e nodi (collezione di curve chiuse e semplici nel 3-spazio). Le costruzioni algebriche delle tracce sulle algebre di Hecke e BMW, esaminate nei capitoli precedenti, vengono esplicitamente legate al polinomio HOMFLY (traccia sull'algebra di Hecke) e al polinomio di Kauffman (ricavato dalla funzione traccia sull'algebra BMW). Entrambi questi polinomi dipendono da due variabili e si riferiscono rispettivamente a nodi orientati e non orientati. Viene proposta un'analisi originale delle relazioni tra questi due tipi di invarianti, mettendo in luce il ruolo della rappresentazione di Lawrence-Krammer, non sufficientemente chiarito in letteratura.

La tesi è corredata di un'appendice con richiami sulla teoria delle rappresentazioni del gruppo simmetrico, la cui algebra di gruppo è il punto di partenza per le costruzioni delle rappresentazioni del gruppo delle trecce nelle algebre di Hecke.

In questo lavoro non vengono affrontate le numerose applicazioni della teoria delle rappresentazioni del gruppo delle trecce, che in realtà sono estremamente importanti in Fisica teorica ed in particolare nella teoria quantistica dei campi. Rappresentazioni unitarie del gruppo delle trecce compaiono infatti nelle teorie di campo conforme bidimensionale (*holonomy representations* e rappresentazioni basate sulla matrice  $R$ ) e nella teoria di campo topologica tridimensionale del tipo Chern-Simons<sup>1</sup>. In tali teorie, il polinomio HOMFLY, valutato per opportuni valori delle variabili, risulta essere la più generale osservabile fisica, ottenuta come valore di aspettazione quantistico di operatori chiamati "Wilson loops".

Si osservi infine che problemi algoritmici legati al gruppo delle trecce

---

<sup>1</sup>Si veda ad esempio Enore Guadagnini: *The Link Invariants of the Chern-Simons Field Theory* - de Gruyter · Berlin 1993.



(problema della parola, problema della coniugazione) sono ingredienti fondamentali di sistemi crittografici, come ad esempio il BCKE (Braid Group Commutator Key Exchange); si stanno attualmente analizzando protocolli che utilizzano le matrici della rappresentazione di Lawrence-Krammer (si veda il sito Internet <http://www-cs.engr.ccny.cuny.edu/~csmma>).

# Capitolo 1

## Il gruppo delle trecce

La prima sezione riguarda la costruzione del gruppo delle trecce su  $n$  componenti. Si esamineranno diverse configurazioni di natura topologica e geometrica, che portano alla definizione di treccia e di gruppo di trecce, rispetto a un'opportuna legge di composizione. Saranno richiamate le relazioni di Artin tra i generatori del gruppo, non senza mostrarne il legame con il cosiddetto mapping class group. Risulterà utile anche la definizione di gruppo libero su  $n$  generatori, dalla quale si sviluppano una serie di considerazioni, che saranno utilizzate nel capitolo 3. Si rimanda a [7] per maggiori dettagli e per le dimostrazioni non completamente esplicitate.

### 1.1 Costruzioni topologiche

Sia  $D$  un disco nel piano complesso e sia  $C = \{(z_1, z_2, \dots, z_n) \in D^n : z_i \neq z_j, i \neq j\}$ , con  $D^n$  prodotto cartesiano di  $n$  copie di  $D$ . Il gruppo simmetrico  $S_n$  agisce naturalmente su  $C$ . Si può infatti assegnare un'applicazione  $\Phi : C \rightarrow S_n$  - azione del gruppo simmetrico  $S_n$  su  $C^1$  - definita come  $\Phi(z_1, z_2, \dots, z_n) = (z_{\Phi(1)}, z_{\Phi(2)}, \dots, z_{\Phi(n)})$ .

---

<sup>1</sup>Il gruppo delle permutazioni su  $n$  oggetti distinti, o gruppo simmetrico, è un gruppo di ordine  $n!$ . Si veda l'appendice A per le definizioni di gruppo simmetrico e di azione di un gruppo.

Denotato con  $\widehat{C} = C/S_n$  il quoziente dotato della topologia indotta, allora  $\widehat{C}$  è la collezione delle  $n$ -uple non ordinate  $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in D$  per cui  $z_i \neq z_j$  se  $i \neq j$ .

La proiezione naturale  $\pi : C \rightarrow \widehat{C}$  è una mappa regolare di  $n$ -ricoprimento ramificato, cioè la controimmagine è costituita da  $n$  foglie disgiunte.

**Definizione 1.1.** Il gruppo fondamentale  $\pi_1(\widehat{C})$  di  $\widehat{C}$  è il gruppo delle trecce su  $n$  componenti e si denota con  $B_n$ .

Si può ricorrere alternativamente a una costruzione più intuitiva rispetto alla precedente.

Sia  $I$  l'intervallo unitario  $[0,1]$ ; scelto un punto base  $\widehat{z}^0$  di  $\widehat{C}$ , si denota con  $z^0 = \{z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0\}$  un sollevamento di  $\widehat{z}^0$  a  $C$ .

Ogni elemento in  $\pi_1(\widehat{C}, \widehat{z}^0)$  è rappresentato da un laccio  $\widehat{\alpha} : (I, \{0, 1\}) \rightarrow (\widehat{C}, \widehat{z}^0)$ , che viene sollevato ad  $\alpha : (I, \{0\}) \rightarrow (C, z^0)$ , con  $\widehat{\alpha}(1) = \widehat{z}^0$ ,  $\alpha(1) = \Phi z^0$ , per qualche  $\Phi \in S_n$ . Con  $\alpha_i$  si denotano i cammini in  $C$ , che congiungono  $z_i^0$  a  $z_{\Phi(i)}^0$ ; tali cammini permettono di individuare degli archi  $A_i = (\alpha_i(t), t)$  in  $D \times I$ . Dal momento che  $\alpha(t) = \{\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n\} \in C, \forall t$ , si deduce che gli archi  $A_i$  sono disgiunti.

**Definizione 1.2.** L'unione disgiunta  $\beta = \bigsqcup_{i=1}^n A_i$  è una *treccia geometrica* su  $n$  componenti.

Un'omotopia di lacci  $\widehat{\alpha}, \widehat{\alpha}' : I \rightarrow \widehat{C}$ , associata a  $\widehat{z}^0$  può essere sollevata a un'omotopia  $F$  di cammini  $\alpha, \alpha' : I \rightarrow C$ , associata a  $\{z^0, \Phi z^0\}$ . Si ha così un'applicazione continua  $F : I \times I \rightarrow C$  per cui:

$$\begin{aligned} F(t, 0) &= \alpha(t) \\ F(t, 1) &= \alpha'(t) \\ F(0, s) &= z^0 = (z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0) \\ F(1, s) &= \Phi z^0 = (z_{\Phi(1)}, z_{\Phi(2)}, \dots, z_{\Phi(n)}). \end{aligned}$$

Se  $\beta$  e  $\beta'$  sono le trecce definite a partire da  $\alpha$  e  $\alpha'$ , l'omotopia  $F$  individua una collezione di trecce  $\beta_s$ , per cui  $\beta_0 = \beta$  e  $\beta_1 = \beta'$ .

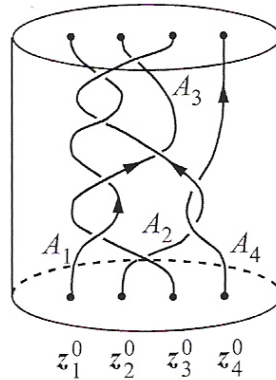


Figura 1.1: Treccia su 4 componenti

**Definizione 1.3.** Due trecce  $\beta$  e  $\beta'$  sono equivalenti se e solo se è possibile costruire una collezione di trecce  $\beta_s$ , come sopra.

Si osservi infine che, sempre nell'ambito delle costruzioni topologiche, si possono considerare punti distinti  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , presi all'interno del disco  $D$ , centrato nell'origine del piano complesso e avente raggio  $n + 1$ . Si denota con  $D_n$  il disco  $n$ -puntato  $D \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ , con punto base  $p_0 = -(n + 1)i$  su  $\partial D_n$ .

**Definizione 1.4.** Il gruppo delle trecce  $B_n$  è il gruppo di tutte e sole le classi di equivalenza di omeomorfismi  $h : D_n \rightarrow D_n$ , che preservano l'orientazione e fissano puntualmente  $\partial D_n$ . Due omeomorfismi sono equivalenti se risultano omotopi relativamente a  $\partial D_n$ .

## 1.2 Costruzione secondo Artin

Una costruzione, ancora più intuitiva, dovuta originariamente ad Artin e ripresa anche da Bigelow [3], presenta le trecce come stringhe “intrecciate”

nello spazio, con estremi fissati su piani paralleli. Questa costruzione è quella che ritrova immediato riscontro nelle applicazioni alla teoria dei nodi, poichè ogni nodo è presentabile come chiusura di un'opportuna treccia (si veda il capitolo 6).

Fissato un insieme  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  di punti distinti nel piano complesso, si ha:

**Definizione 1.5.** Una treccia su  $n$  componenti è un insieme costituito da  $n$  bordi distinti immersi regolarmente in  $\mathbb{C} \times I$ , che congiungono ogni punto  $(p_i, 0)$  a qualche  $(p_j, 1)$ , in modo che ogni piano orizzontale  $\mathbb{C} \times \{s\}$  interseca ciascun bordo in esattamente un punto.

**Definizione 1.6.** Due trecce  $\alpha$  e  $\beta$  su  $n$  componenti sono tra loro in relazione se e solo se esiste un'applicazione che deforma con continuità una nell'altra, mantenendo fissi gli estremi  $P \times \{0, 1\}$ . Si scrive  $\alpha \sim \beta$ .

**Proposizione 1.2.1.** *La relazione  $\sim$  tra trecce è di equivalenza.*

*Dimostrazione.* 1.  $\alpha \sim \alpha$ . La mappa identica è continua e trasforma una treccia in se stessa: vale la proprietà riflessiva.

2.  $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$ . Se la treccia  $\alpha$  viene deformata con continuità nella treccia  $\beta$ , l'inversa dell'applicazione che realizza tale trasformazione deforma con continuità  $\beta$  in  $\alpha$ : questo prova la proprietà simmetrica.

3.  $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$ . Se la treccia  $\alpha$  viene trasformata nella treccia  $\beta$  e  $\beta$  è a sua volta deformata in  $\gamma$ , componendo le due mappe si determina una deformazione continua, che manda  $\alpha$  in  $\gamma$ : vale anche la proprietà transitiva.

□

Se  $\alpha$  è una treccia, si indica con  $[\alpha]$  la classe di equivalenza associata ad  $\alpha$ . Il gruppo delle trecce  $B_n$  è l'insieme delle classi di equivalenza di trecce su  $n$  componenti; si definisce un prodotto in  $B_n$ :  $[\alpha\beta] = [\alpha][\beta]$ , in cui  $\alpha\beta$  è la treccia ottenuta per traslazione, ponendo  $\alpha$  sopra a  $\beta$  e congiungendo opportunamente gli estremi.

## 1.3 Mapping class group

Una ulteriore definizione del gruppo delle trecce, l'ultima che viene trattata, può essere introdotta a partire dal *mapping class group* di un disco puntato  $D_n$ . Questa definizione risulta molto utile, soprattutto nello studio della rappresentazione di Lawrence-Krammer, che sarà trattata nel capitolo 3.

Sia  $\Sigma$  una superficie connessa, compatta e orientabile<sup>2</sup>, dotata di un contorno  $\partial\Sigma$  e sia  $P$  un insieme finito di punti (*puncture*), scelti all'interno della superficie. Si definisce  $\mathcal{H}(\Sigma, P)$  come il gruppo degli omeomorfismi  $h : \Sigma \rightarrow \Sigma$  che preservano l'orientazione, in modo che ciascun  $h$  sia l'identità sul contorno di  $\Sigma$  e  $h(P) = P$ . Sia  $\mathcal{J}(\Sigma, P)$  il sottogruppo di  $\mathcal{H}(\Sigma, P)$ , costituito dagli omeomorfismi isotopi all'identità relativamente a  $\partial\Sigma \cap P$ .

**Definizione 1.7.** Il mapping class group  $\mathcal{M}(\Sigma, P)$  è il gruppo  $\mathcal{H}(\Sigma, P)/\mathcal{J}(\Sigma, P)$ .

Scelti un disco  $D$  e  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  un insieme di punti al suo interno, il gruppo delle trecce  $B_n$  è il mapping class group  $\mathcal{M}(D, P)$ .

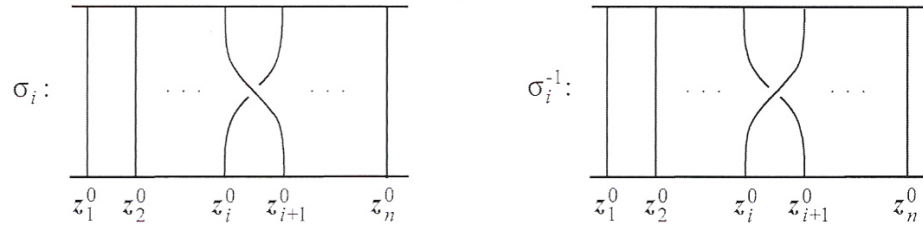
Si mostra ora, senza dettagli, che la costruzione geometrica di Artin - esposta nella sezione 1.2 - e quella con il mapping class danno luogo al medesimo gruppo.

Se  $h \in \mathcal{H}(D, P)$  è un rappresentante di un elemento in  $\mathcal{M}(D, P)$ , esiste un'isotopia  $h_t : D \rightarrow D$ , per cui  $h_0$  è la mappa identica e  $h_1 = h$ . La treccia geometrica che corrisponde ad  $h$  è l'insieme dei punti  $(h_t(p), t)$ ,  $\forall t \in I$  e  $p \in P$ .

Viceversa, sia  $\sigma$  una treccia geometrica che sta in  $(D \setminus \partial D) \times I$ ;  $\sigma$  descrive un'isotopia  $h_t : D \rightarrow D$ , relativa a  $\partial D$ , dalla mappa identità  $h_0$  alla mappa  $h_1$ , che soddisfa l'uguaglianza  $h_1(P) = P$ . La mappa  $h_1$  rappresenta l'elemento di  $\mathcal{M}(D, P)$ , che corrisponde alla treccia geometrica  $\sigma$ .

---

<sup>2</sup>Una superficie  $\Sigma$  regolare di classe  $C^k$  si dice orientabile se esiste un campo di vettori di classe  $C^k$ , normali su  $\Sigma$ .

Figura 1.2: Generatori di Artin di  $B_n$ 

## 1.4 Generatori e relazioni fondamentali

Artin dimostrò che  $B_n$  è generato dalle *treccie elementari*  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ , dove gli elementi  $\sigma_i$  scambiano i punti  $p_i$  e  $p_{i+1}$ , mediante una rotazione di  $\pi$  in senso orario. A ciascun  $\sigma_i$  è associato un elemento inverso  $(\sigma_i)^{-1}$ , tale che  $(\sigma_i)^{-1}\sigma_i = \sigma_i(\sigma_i)^{-1} = e$  (la treccia banale su due stringhe).

**Teorema 1.4.1** (Artin). *Il gruppo delle treccie  $B_n$  è generato dagli elementi  $e, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$  e dalle relazioni*

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \quad |i - j| \geq 2 \quad (1.1)$$

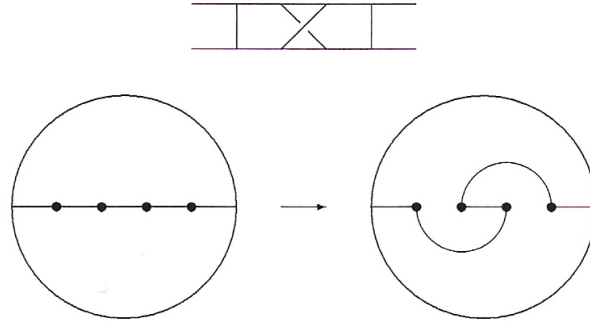
$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n - 2 \quad (1.2)$$

dette *relazioni delle treccie*.

I generatori di Artin  $\sigma_i$  - mostrati in Figura 1.2 - e le relazioni cui soddisfano sono sufficienti per definire completamente il gruppo  $B_n$ . La presentazione di Artin mediante tali generatori *standard* sarà più volte utilizzata nel seguito.

Solo recentemente sono stati trovati da Birman, Ko e Lee [10] nuovi generatori per  $B_n$ , definiti nel modo seguente.

Sia  $\sigma_{s,t} = (\sigma_{t-1}\dots\sigma_{s+1})\sigma_s(\sigma_{s+1}^{-1}\dots\sigma_{t-1}^{-1})$ , con  $1 \leq s < t \leq n$ . Si pone, per

Figura 1.3: Generatori  $\sigma_2$  di  $B_4$ 

definizione,  $\sigma_{s,t} = \sigma_{t,s}$  e si ha, come immediata conseguenza, che  $B_n$  è generato da  $\{\sigma_{s,t}, 1 \leq s < t \leq n\}$ , con le relazioni:

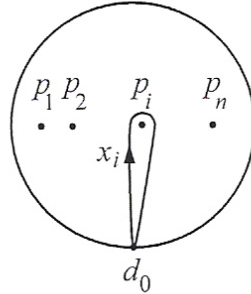
$$\begin{aligned} \sigma_{s,t}\sigma_{q,r} &= \sigma_{q,r}\sigma_{s,t}, \text{ se } (t-r)(t-q)(s-r)(s-q) > 0 \\ \sigma_{s,t}\sigma_{r,s} &= \sigma_{r,t}\sigma_{s,t} = \sigma_{r,s}\sigma_{r,t}, \text{ se } 1 \leq r < s < t \leq n. \end{aligned}$$

Si esamina, ora, il legame tra i generatori standard e gli elementi del mapping class group a essi associati.

Siano assegnati  $P = \{1, 2, \dots, n\}$  e la treccia geometrica con estremi  $P \times \{0, 1\}$ , corrispondente al generatore  $\sigma_i$ . Sia  $D$  il disco del piano complesso, contenente  $P$ ; allora si può definire l'elemento di  $\mathcal{M}(D, P)$ , associato a  $\sigma_i$  e rappresentato da una mappa  $h \in \mathcal{H}(D, P)$ , che scambia due punture  $i$  e  $i+1$  di mezzo giro in senso antiorario.

Ad esempio, la Figura 1.3 mostra dei rappresentanti di una treccia geometrica e l'elemento del mapping class group corrispondente a  $\sigma_2 \in B_4$ . La treccia è disegnata attraverso la propria proiezione su  $\mathbb{R} \times I$ . L'elemento di  $\mathcal{M}(D, P)$  viene indicato dall'immagine dell'asse reale, sotto l'azione di una funzione di  $\mathcal{H}(D, P)$ .



Figura 1.4:  $D_n$  e i generatori di  $\pi_1(D_n, d_0)$ 

## 1.5 Gruppo delle trecce $B_n$ e gruppo libero su $n$ generatori

Si consideri il solito disco puntato  $D_n = D \setminus P$  e un punto base  $d_0$  sulla frontiera di  $D_n$ . Indicato con  $F_n = \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \rangle$ , il gruppo libero su  $n$  generatori<sup>3</sup>, il gruppo fondamentale  $\pi_1(D_n, d_0)$  è isomorfo a  $F_n$ . I generatori  $\mathbf{x}_i$  sono realizzati geometricamente come lacci con origine in  $d_0$  che si avvolgono intorno alle punture  $p_i$  (Figura 1.4).

Sia  $\phi : D_n \rightarrow D_n$  un omeomorfismo che mantiene fisso il bordo di  $D_n$  e che induce un automorfismo  $\phi^*$  del gruppo fondamentale  $\pi_1(D_n, d_0) \cong F_n$ . Denotato con  $M_n$  il sottogruppo di  $Aut(F_n)$  che contiene gli automorfismi  $\phi^*$ , si dimostra che esiste un isomorfismo tra  $M_n$  e  $B_n$ .

L'omeomorfismo  $\phi$  si può univocamente estendere a un omeomorfismo  $\bar{\phi} : D \rightarrow D$ , che permuta gli elementi di  $P$ . Tale mappa è isotopa all'elemento identico  $1_D$  di  $D$  e tale isotopia  $F : D \times I \rightarrow D$  mantiene fisso  $\partial D_N$ .

Per ogni  $t$  in  $I$ ,  $F(x, t)$  è un omeomorfismo di  $D$  in se stesso, tale che  $F(x, 0) = 1_D$  ed  $F(x, 1) = \bar{\phi}$ . Posto  $\bar{F} : D \times I \rightarrow D \times I$ , tale che  $\bar{F}(x, t) = (F(x, t), t)$ , l'immagine di  $P \times I$  sotto  $\bar{F}$  è una treccia geometrica; questo fatto garantisce l'esistenza di una mappa ben definita  $Aut(F_n) \rightarrow B_n$ .

<sup>3</sup>Si ricordi che il gruppo libero su  $n$  generatori non possiede, per definizione, relazioni che legano tra loro i generatori.

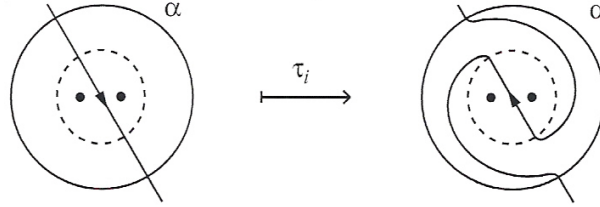


Figura 1.5: Il Dehn half twist

Questa applicazione viene data anche nella direzione opposta, mediante il *Dehn half – twist* (Figura 1.5).

Sia  $\xi$  una curva semplice e chiusa intorno alle punte  $p_i$  e  $p_{i+1}$ . Si identifica la regione, delimitata da  $\xi$ , con il disco punteggiato  $\overline{D} = D \setminus \{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$  e  $A = \{z \in \overline{D} : \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1\}$  con  $S^1 \times D$ . Il *Dehn half – twist*  $\tau_i$  è l'identità fuori da  $\overline{D}$ ;  $\tau_i$  trasforma  $(s, t) \in S^1 \times I$  in  $(e^{-\pi it} s, t)$ .  $\tau_i$  è una rotazione di  $\frac{\pi}{2}$  su  $\{z \in \overline{D} : |z| \leq \frac{1}{2}\}$ .

Valgono, inoltre, le seguenti relazioni:

$$\tau_i \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i \mathbf{x}_{i+1} \mathbf{x}_i^{-1}$$

$$\tau_i \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i$$

$$\tau_i \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j, \text{ se } j \neq i, i + 1.$$

Quindi:

$$\tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}, \text{ se } 1 \leq i \leq (n - 1)$$

$$\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i, \text{ se } |i - j| \geq 2.$$

Gli elementi  $\tau_i$  soddisfano, dunque, le relazioni delle trecce. L'omomorfismo  $B_n \rightarrow \text{Aut}(F_n)$ , si realizza quindi attraverso la corrispondenza

$$\alpha_i \mapsto \tau_i. \tag{1.3}$$

Gli omomorfismi  $\text{Aut}(F_n) \rightarrow B_n$  e  $B_n \rightarrow \text{Aut}(F_n)$  sono tra loro inversi.

Si tornerà nel capitolo 3, su questa interpretazione, che permetterà di individuare una rappresentazione fedele del gruppo delle trecce.

Il seguente risultato ricopre un ruolo importante nello studio del legame

tra trecce e nodi (in proposito si veda il capitolo 6):

**Teorema 1.5.1.** *Sia  $\beta$  un automorfismo di  $F_n$ , allora  $\beta \in B_n \subseteq \text{Aut}(F_n)$  se e solo se valgono le relazioni:*

$$\beta \mathbf{x}_i = w_i \mathbf{x}_{\mu_i} w_i^{-1} \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1.4)$$

$$\beta(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n) = \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n, \quad (1.5)$$

dove  $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$  è una permutazione di  $(1, 2, \dots, n)$  e  $w_i \in F_n$ .

## Capitolo 2

# La rappresentazione di Burau

La rappresentazione di Burau è storicamente la prima a essere stata introdotta ed è legata al polinomio di Alexander e alle algebre di Hecke (trattate nel quarto capitolo).

Dopo aver definito la cosiddetta rappresentazione ridotta, ci si concentrerà sulla forma matriciale e sulla forma non ridotta della rappresentazione, per poi dimostrare i risultati sulla non fedeltà. La rappresentazione di Burau fu ritenuta per molto tempo fedele almeno per  $n \leq 3$  e quindi un buon candidato come rappresentazione fedele e lineare di  $B_n$ , per ogni  $n$ . Nel 1991 John Moody [21] ha dimostrato la non fedeltà per  $n \geq 9$  e, successivamente, si scoprì la non fedeltà per  $n \geq 6$ . A Bigelow [1] si deve la dimostrazione della non fedeltà per  $n \geq 5$ . Rimane attualmente aperto il problema per il caso  $n = 4$ .

### 2.1 Forma ridotta

Sia  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  il disco unitario del piano complesso. Siano  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  un insieme di  $n$  punture in  $D$  e  $D_n = D \setminus P$ . Se  $d_1$  è un punto base sul bordo di  $D$ ,  $\pi_1(D_n, d_1)$  è generato da  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ , con  $\psi_i$  curva chiusa semplice, con punto base  $d_1$  che si avvolge in senso antiorario, intorno all' $i$ -esima puntura. L'omeomorfismo  $\Phi : \pi_1(D_n, d_1) \rightarrow \mathbb{Z}$  è tale per

cui  $\Phi(\psi_i) = q$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  e permette di individuare un intero  $q$  associato a ogni cammino  $\psi_i$ , detto *numero di avvolgimento totale*, che conta il numero di volte in cui  $\psi_i$  si avvolge intorno alle punture.

Sia  $\tilde{D}_n$  lo spazio di ricoprimento, che ha per gruppo fondamentale il nucleo di  $\Phi$ . Scelto un sollevamento  $\tilde{d}_1$  di  $d_1$  a  $\tilde{D}_n$ , il gruppo di trasformazioni di ricoprimento su  $\tilde{D}_n$  è  $\langle q \rangle \cong \mathbb{Z}$ .

Sia  $\Lambda$  l'anello di gruppo<sup>1</sup>  $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ ; il gruppo di omologia  $H_1(\tilde{D}_n)$  può essere considerato come un  $\Lambda$ -modulo, in cui  $q$  agisce mediante le trasformazioni di ricoprimento.

Scelto un  $\sigma \in \mathcal{H}(D, P)$  rappresentante della classe  $[\sigma] \in B_n$ , esso può essere utilizzato come omeomorfismo di  $D_n$  in se stesso. Se  $\tilde{\sigma}$  è un sollevamento di  $\sigma$  a una mappa da  $\tilde{D}_n$  in se che fissa  $\tilde{d}_1$ , si ottiene un automorfismo  $\tilde{\sigma}^*$  di  $H_1(\tilde{D}_n)$ , visto come  $\Lambda$ -modulo.

**Definizione 2.1.** La mappa

$$\rho : \sigma \mapsto \tilde{\sigma}^* \tag{2.1}$$

è la rappresentazione (ridotta) di Burau.

La dimensione della rappresentazione è  $(n - 1)$ .

Anticipando qui il legame tra trecce e nodi e il concetto di “invariante” di nodi, trattati ampiamente nel sesto capitolo, si osservi che la rappresentazione di Burau ricopre un ruolo fondamentale nello studio delle rappresentazioni di  $B_n$ , anche per il suo legame con il *polinomio di Alexander*. Il polinomio di Alexander  $A_K(t)$  di un nodo  $K$  si può calcolare infatti in modo diretto dall'immagine di una treccia  $\zeta$ , sotto l'azione della rappresentazione ridotta di Burau. Indicato con  $b(\zeta)$  il rappresentante di  $K$ , il polinomio di Alexander è dato dalla formula:

$$A_{b(\zeta)}(t) = \frac{\det(\rho(\zeta) - I_{n-1})}{1 + t + \dots + t^{n-1}}.$$

<sup>1</sup>Un anello di gruppo  $A[G]$  è un anello costruito a partire da un anello  $A$  e da un gruppo moltiplicativo  $G$  e i suoi elementi sono combinazioni di elementi di  $G$  a coefficienti in  $A$ .

Il polinomio della treccia chiusa associata a  $\zeta$  è, così, un riscalamento del polinomio caratteristico dell'immagine di  $\zeta$  nella rappresentazione ridotta. Una estensione del polinomio di Alexander è il polinomio HOMFLY, di cui si parlerà nel sesto capitolo.

## 2.2 Forma matriciale e forma non ridotta

Siano  $X$  lo spazio ottenuto da  $D_n$  allargando le punture, e  $\tilde{X}$  lo spazio regolare di ricoprimento di  $X$ ; l'azione di  $\sigma_i$  su  $H_1(\tilde{X})$  è data esplicitamente dalle espressioni:

$$\rho\sigma_i(v_j) = \begin{cases} v_j + qv_{j+1} & \text{se } j = i - 1 \\ -qv_j & \text{se } j = i \\ v_{j-1} + v_j & \text{se } j = i + 1 \\ v_j & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.2)$$

con  $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$  base in  $H_1(\tilde{X})$ .

Le matrici associate alla rappresentazione di Burau sono date da:

$$\rho\sigma_1 = \begin{bmatrix} -q & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & I & \\ & & & I \end{bmatrix} \quad \rho\sigma_i = \begin{bmatrix} I & & & \\ & 1 & 0 & 0 \\ & q & -q & 1 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & & & I \end{bmatrix} \quad \rho\sigma_{n-1} = \begin{bmatrix} I & & \\ & 1 & 0 \\ & q & -q \end{bmatrix}.$$

Si dimostra immediatamente che queste matrici soddisfano le relazioni delle trecce (1.1) e (1.2).

Reinterpretando la rappresentazione come

$$\rho : B_n \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}[q, q^{-1}]),$$

si ha:

$$\sigma_i \mapsto I_{i-1} \oplus \begin{bmatrix} 1 & -q & 0 \\ 0 & -q & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \oplus I_{n-i-2}.$$

La rappresentazione  $(n-1)$ -dimensionale ridotta di Burau è costituita da rappresentazioni  $n$ -dimensionali (non ridotte), ottenute rimuovendo una puntura dal disco puntato  $D_n$ ; in questo modo si ottengono un nuovo disco puntato  $D_{n+1}$  e uno spazio di ricoprimento regolare  $\tilde{D}_{n+1}$  per  $D_{n+1}$  - che è proprio il nucleo dell'omeomorfismo, associato al numero di avvolgimento totale. La rappresentazione (non ridotta) di Burau è dunque l'omomorfismo:

$$\bar{\rho} : B_n \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}[q, q^{-1}]),$$

tale per cui, fissata la base  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  di  $H_1(\tilde{D}_{n+1})$ , valgono le relazioni

$$\bar{\rho}\sigma_i(u_j) = \begin{cases} (1-q)u_j + qu_{j+1} & \text{se } j = i \\ u_{ji} & \text{se } j = i+1 \\ u_j & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.3)$$

Le matrici relative alla base specificata sono:

$$\bar{\rho}\sigma_i = \begin{bmatrix} I & & & \\ & 1-q & q & \\ & & 1 & 0 \\ & & & I \end{bmatrix}.$$

*Osservazione 1.* I termini  $(1-q)$  compaiono sempre all'incrocio tra l' $i$ -esima riga e l' $i$ -esima colonna della matrice.

L'azione della rappresentazione non ridotta si decompone come:

$$\sigma_i \mapsto I_{i-1} \oplus \begin{bmatrix} 1-q & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus I_{n-i-1}.$$

Si consideri ora la base  $\{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$  dello spazio  $H_1(\tilde{D}_{n+1})$ , per cui  $u'_n = u_n$  e  $u'_i = u_i - u_{i+1}$  se  $i < n$ . L'azione delle trecce, relativamente a questa base,

si ricava dalla (2.3) ed è data dalle formule:

$$\begin{aligned}\bar{\rho}\sigma_i(u'_{i-1}) &= \bar{\rho}(u_{i-1} - u_i) = u_{i-1} - [(1-q)u_i + qu_{i+1}] \\ &= u_{i-1} - u_i + q(u_i - u_{i+1}) = u'_{i-1} + qu'_i\end{aligned}\quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}\bar{\rho}\sigma_i(u'_i) = \bar{\rho}\sigma_i(u_i - u_{i+1}) &= (1-q)u_i + qu_{i+1} - u_i \\ &= qu_{i+1} - qu_i = -qu'_i\end{aligned}\quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}\bar{\rho}\sigma_i(u'_{i+1}) = \bar{\rho}\sigma_i(u_{i+1} - u_{i+2}) &= u_i - u_{i+2} \\ &= u_i - u_{i+1} + u_{i+1} - u_{i+2} \\ &= u'_i + u'_{i+1}\end{aligned}\quad (2.6)$$

$$\bar{\rho}\sigma_i(u'_j) = u'_j, \forall j \neq i-1, i, i+1. \quad (2.7)$$

Confrontando queste uguaglianze con le relazioni (2.2), per una generica treccia  $\beta \in B_n$  si ha:

$$\bar{\rho}\beta = \begin{bmatrix} & & & * \\ & \rho\beta & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## 2.3 Risultati sulla non fedeltà

Alla luce delle definizioni del paragrafo precedente, si pone:

**Definizione 2.2.** Siano assegnati due archi  $\alpha$  e  $\beta$  in  $D_n$ ; indicati con  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\beta}$  i sollevamenti di  $\alpha$  e  $\beta$  su  $\tilde{D}_n$ , si definisce

$$\int_{\beta} \alpha = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (q^k \tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta}) q^k, \quad (2.8)$$

essendo  $(q^k \tilde{\alpha} \cdot \tilde{\beta})$  il numero di intersezioni dei due archi in  $\tilde{D}_n$ .



Si noti come l'integrale precedente contenga un fattore moltiplicativo, dato dalla potenza di  $q$ , dipendente dalla scelta dei sollevamenti. Questo non crea particolari problemi, dal momento che si studierà esclusivamente l'annullamento della (2.8).

Prima di analizzare in dettaglio i risultati, si richiama un lemma che sarà utile nel seguito.

**Lemma 2.3.1.** *Se  $\alpha$  e  $\beta$  sono curve semplici e chiuse su una superficie, che si intersecano in un numero elevato ma finito di punti trasversali, allora esse sono liberamente omotope a curve semplici e chiuse, che si intersecano mutuamente in un numero minore di punti se e solo se esiste un digono, cioè un disco regolarmente immerso il cui contorno è costituito da una porzione di  $\alpha$  e da una porzione di  $\beta$ .*

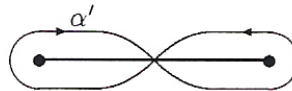
Un primo teorema generale sulla non fedeltà della rappresentazione di Burau è il seguente:

**Teorema 2.3.2.** *Per  $n \geq 3$ , la rappresentazione di Burau non è fedele se e solo se esistono due archi  $\alpha$  e  $\beta$ , regolarmente immersi in  $D_n$ , tali che:*

- $\alpha$  passi per  $p_1$  e  $p_2$ ,  $\beta$  per  $d_1$  e  $p_3$ , oppure per  $p_3$  e  $p_4$ ;
- $\alpha$  non è omotopo a  $\beta$ , relativamente agli estremi;
- $\int_{\beta} \alpha = 0$ .

*Dimostrazione.* 1) Sia  $n \geq 3$ , tale che per ogni arco  $\alpha$  da  $p_1$  a  $p_2$  e  $\beta$  da  $d_1$  a  $p_3$ , regolarmente immersi in  $D_n$ , sia soddisfatta l'uguaglianza  $\int_{\beta} \alpha = 0$ .  $\alpha$  può essere omotopo a  $\beta$ , relativamente agli estremi; se  $\psi : D_n \rightarrow D_n$  appartiene al nucleo della rappresentazione di Burau, si deve provare che  $\psi$  è omotopo alla mappa identica.

Sia  $\alpha$  l'arco rettilineo, passante per  $p_1$  e  $p_2$   $\beta$  l'arco rettilineo per  $q_1$  e  $p_3$ ; sia inoltre  $\int_{\beta} \alpha = 0$ .  $\psi(\alpha)$  può essere omotopo a  $\beta$ . Queste stesse considerazioni portano a dire che, scelto un opportuno elemento coniugato di  $\psi$ ,  $\psi(\alpha)$  è omotopo all'arco rettilineo, congiungente  $d_1$  e  $p_j$ , per  $j = 3, 4, \dots, n$ . In questo modo,  $\psi$  può essere reso omotopo, così da fissare  $\alpha$ , oppure ogni cammino rettilineo che congiunge  $p_k$  e  $p_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ . Le uniche trecce che godono

Figura 2.1: Azione di  $\tau_\alpha$ Figura 2.2: La curva “a otto”  $\alpha'$ 

di questa proprietà sono quelle rappresentabili come potenza del Dehn twist  $\Delta$  intorno a una curva semplice e chiusa, parallela a  $\partial D$ .  $\Delta$  agisce come una moltiplicazione per  $q^n$  su  $H_1(\tilde{D}_n)$ , così l'unica potenza di  $\Delta$  che appartiene al nucleo della rappresentazione di Burau è proprio l'identità.

2) Il viceversa si prova nel caso in cui  $\beta$  sia un arco regolarmente immerso in  $D_n$ , passante per  $p_3$  e  $p_4$ . Sia  $\alpha$  un arco regolarmente immerso, passante per  $p_1$  e  $p_2$ , non omotopo a  $\beta$ , relativamente agli estremi, ma  $\int_\beta \alpha = 0$ . Sia  $\tau_\alpha : D_n \rightarrow D_n$  il Dehn half twist intorno al bordo di una curva regolare, prossima ad  $\alpha$ . Questa applicazione è un omeomorfismo che scambia le punte  $p_1$  e  $p_2$  e il cui quadrato è un Dehn twists completo intorno allo stesso bordo (Figura 2.1). Scelto analogamente  $\tau_\beta$ , si deve mostrare che l'applicazione che commuta  $\tau_\alpha$  e  $\tau_\beta$  non è un elemento banale del nucleo.

Sia  $\epsilon$  un arco regolarmente immerso in  $D_n$ , che attraversa  $\alpha$ . L'effetto dell'omotopia relativa agli estremi, fa sì che  $\tau_\alpha$ , agendo su  $\epsilon$ , produca una curva  $\alpha'$  a forma di otto (Figura 2.2). Denotato con  $\tilde{\epsilon}$  un sollevamento di  $\epsilon$  allo spazio di ricoprimento  $\tilde{D}_n$ , l'effetto di  $\tilde{\tau}_\alpha$  su  $\tilde{\epsilon}$  è inserire un sollevamento di  $\alpha'$ , che è una curva chiusa in  $\tilde{D}_n$ .

Sia  $\tilde{\gamma}$  un arco chiuso in  $\tilde{D}_n$ ; l'effetto di  $\tau_\alpha$  su  $\tilde{\gamma}$  è l'inserimento di alcuni sollevamenti di  $\alpha'$ . Considerando  $\tilde{\gamma}$  e  $\tilde{\alpha}'$  come elementi rappresentativi di  $H_1(\tilde{D}_n)$ , si ha:

$$(\tilde{\tau}_\alpha)^*(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma} + P(q)\tilde{\alpha}',$$

con  $P(t) \in \Lambda$ . Allo stesso modo:

$$(\tilde{\tau}_\beta)^*(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma} + Q(q)\tilde{\beta}',$$

con  $Q(q) \in \Lambda$  e  $\beta'$  costruito come  $\alpha'$ .

Ogni sollevamento di  $\alpha$  e  $\alpha'$  ha intersezione algebrica nulla con ogni sollevamento di  $\beta$  e  $\beta'$ ; ne consegue che:

$$(\tilde{\tau}_\beta)^*(\tilde{\alpha}') = \tilde{\alpha}',$$

$$(\tilde{\tau}_\beta\tilde{\tau}_\alpha)^*(\tilde{\gamma}) = (\tilde{\gamma} + Q(q)\tilde{\beta}') + P(q)\tilde{\alpha}',$$

$$(\tilde{\tau}_\alpha\tilde{\tau}_\beta)^*(\tilde{\gamma}) = (\tilde{\gamma} + P(q)\tilde{\alpha}') + Q(q)\tilde{\beta}'.$$

$(\tilde{\tau}_\alpha)^*$  e  $(\tilde{\tau}_\beta)^*$  commutano e quindi il commutatore  $[\tau_\alpha, \tau_\beta]$  appartiene al nucleo della rappresentazione di Burau.

Resta da dimostrare che tale commutatore non è omotopo alla mappa identità. Sia  $\gamma$  il bordo di una curva regolare, prossima ad  $\alpha$ ; per il lemma 2.3.1 e per la non omotopia tra  $\gamma$  e  $\beta$ ,  $\tau_\beta(\gamma)$  non è omotopo ad  $\alpha$  e, analogamente,  $\tau_\alpha\tau_\beta(\gamma)$  non è omotopo a  $\tau_\beta(\gamma)$ . Ma  $\tau_\beta(\gamma) = \tau_\beta\tau_\alpha(\gamma)$ , quindi  $\tau_\beta\tau_\alpha$  non è omotopo a  $\tau_\alpha\tau_\beta$ . Discende dunque che il commutatore  $[\tau_\alpha, \tau_\beta]$  non è omotopo alla mappa identità.  $\square$

*Osservazione 2.* Il caso di  $\beta$  passante per  $d_1$  e  $p_3$  si dimostra in modo del tutto analogo. Si considera, però, il Dehn twist intorno al bordo di una curva regolare, prossima a  $\beta \cup \partial D$ . Non si ottiene una curva  $\beta'$  a forma di otto, ma una struttura più complicata, che è un commutatore di  $\partial D$ , frontiera di una curva regolare, prossima a  $\beta$ .

Si può ora enunciare e dimostrare la seguente proposizione, dovuta a Bigelow [1]:

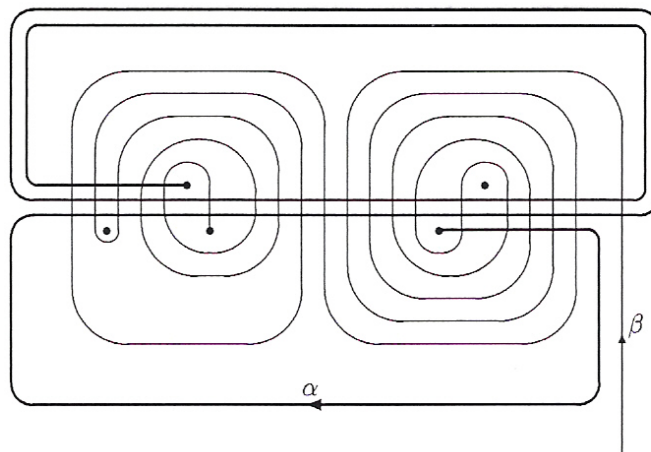


Figura 2.3: Archi sul disco 5-puntato

**Proposizione 2.3.3.** *La rappresentazione di Burau di  $B_5$  non è fedele.*

*Dimostrazione.* Si considerano due archi  $\alpha$  e  $\beta$ , regolarmente immersi in  $D_5$ , come mostrato in Figura 2.3.

Dal teorema 2.3.2 risulta che questi archi non sono tra loro omotopi relativamente agli estremi, e ciò è conseguenza del lemma 2.3.1, applicato alle frontiere di curve regolari, prossime ad  $\alpha$  e  $\beta \cup \partial D$ . Si tratta di mostrare che  $\int_{\beta} \alpha = 0$ .

Siano  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\beta}$  i sollevamenti di  $\alpha$  e  $\beta$  a  $\tilde{D}_5$ ; ogni punto  $p$ , in corrispondenza del quale  $\beta$  passa su  $\alpha$ , fornisce un monomio  $\pm q^k$  a  $\int_{\beta} \alpha$ . L'esponente  $k$  è tale per cui  $\tilde{\beta}$  e  $q^k \tilde{\alpha}$  si attraversano in corrispondenza di un sollevamento di  $p$ . Il segno del monomio dipende dalla natura di questo attraversamento. La scelta convenzionale dei sollevamenti e dei segni dei monomi viene fatta in modo che al primo punto di attraversamento corrisponda il monomio  $+t^0$ . Nella figura, il segno del monomio in corrispondenza di un attraversamento  $p$  è positivo se  $\beta$  è rivolto verso l'alto - rispetto a  $p$  - negativo in caso contrario. Gli esponenti dei vari monomi si calcolano, rifacendosi alla seguente regola. Scelti  $p_1, p_2 \in \alpha \cap \beta$ , si indicano con  $k_1$  e  $k_2$  gli esponenti dei monomi associati. Detti  $\alpha'$  e  $\beta'$  gli archi passanti per  $p_1$  e  $p_2$ , lungo  $\alpha$  e  $\beta$ , si supponga

che  $\alpha' \cap \beta' = \{p_1, p_2\}$ . Sia  $k$  un intero per cui  $\alpha' \cup \beta'$  delimita un disco  $k$ -puntato. Allora  $|k_1 - k_2| = k$ . Se  $\beta'$  è diretto in senso antiorario intorno al disco  $k$ -puntato, allora  $k_1 \geq k_2$ , altrimenti  $k_1 \leq k_2$ .

Gli esponenti si ottengono così in modo ricorsivo, percorrendo il cammino  $\beta$ . Considerando gli attraversamenti da sinistra verso destra, muovendosi dall'alto al basso, si ha, utilizzando gli archi della Figura 2.3 a titolo esemplificativo:

$$\begin{aligned} \int_{\beta} \alpha &= -q^{-3} - q^0 + q^1 + q^{-1} + q^{-3} \\ &-q^{-1} - q^{-2} + q^3 + q^1 + q^{-1} - q^{-2} - q^0 - q^2 + q^1 + q^{-2} \\ &-q^{-1} + q^0 - q^1 + q^2 - q^3 + q^2 - q^1 + q^0 - q^{-1} + q^{-2} \\ &-q^1 - q^4 + q^5 + q^3 + q^1 - q^0 - q^2 - q^4 + q^3 + q^0 \\ &-q^1 + q^2 - q^3 + q^4 - q^5 + q^4 - q^3 + q^2 - q^1 + q^0 \\ &-q^2 + q^1 - q^9 + q^{-1} - q^{-2} = 0. \end{aligned}$$

$\alpha$  e  $\beta$  soddisfano alle richieste del teorema 2.3.2, pertanto si conclude che la rappresentazione di Burau del gruppo delle trecce non è fedele per  $n = 5$ .  $\square$

Dalla dimostrazione del teorema 2.3.3 vengono quindi selezionati: un elemento non banale del nucleo - detto *commutatore* di un Dehn half twist intorno al bordo di una curva regolare, prossima ad  $\alpha$  - e un Dehn twist intorno al bordo di una curva regolare, prossima a  $\beta \cup \partial D$ .

Ad esempio, il seguente elemento di  $B_5$  mappa  $\alpha$  in un arco rettilineo, passante per  $p_4$  e  $p_5$ :

$$\psi_1 = \sigma_3^{-1} \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_4^3 \sigma_3 \sigma_2.$$

Il seguente elemento mappa, invece,  $\beta$  in un arco rettilineo, passante per  $d_1$  e  $p_5$ :

$$\psi_2 = \sigma_4^{-1} \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1^{-2} \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 \sigma_1 \sigma_4^5.$$

L'elemento del nucleo associato è:

$$[\psi_1^{-1} \sigma_4 \psi_1, \psi_2^{-1} \sigma_4 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_3 \psi_2].$$

## Capitolo 3

# La rappresentazione di Lawrence-Krammer

La rappresentazione di Lawrence-Krammer del gruppo delle trecce risulta essere fedele per ogni  $n$ , al contrario di quella di Burau. In questo capitolo, si ripercorre in dettaglio la costruzione topologica di tale rappresentazione, così come esposta da Bigelow [2]. Nel paragrafo 3.6, verranno enunciati due risultati riguardanti la costruzione di ulteriori rappresentazioni di  $B_n$ , che si basano sull'esistenza di un isomorfismo tra il gruppo degli automorfismi del gruppo libero e il gruppo delle trecce.

### 3.1 Nozioni introduttive

Si consideri il disco  $n$ -puntato  $D_n$  e si denoti con  $\Gamma$  l'insieme non ordinato di punti distinti di  $D_n$ , cioè:

$$\Gamma = \frac{(D_n \times D_n) \setminus (x, x)}{(x, y) \sim (y, x)}.$$

Scelti  $d_1 \neq d_2 \in \partial D$ ,  $c_0 = \{d_1, d_2\}$  è un punto base di  $\Gamma$ .

Se  $\alpha$  e  $\beta$  sono due archi su  $D_n$ , tali per cui  $\alpha(s) \neq \beta(s), \forall s \in I$ , allora  $\{\alpha, \beta\}$  individua un arco in  $\Gamma$ , tale per cui  $\{\alpha, \beta\}(s) = \{\alpha(s), \beta(s)\}$ . Se  $y \in D_n$  e  $\alpha$  è un arco in  $D_n \setminus y$ , allora  $\{\alpha, y\}$  è l'arco in  $\Gamma$ , individuato dalla relazione

$\{\alpha, y\}(s) = \{\alpha(s), y\}$ . Lo stesso arco si può indicare anche con  $\{y, \alpha\}$ .

Si definisce una mappa  $\phi$  da un insieme di lacci chiusi in  $\Gamma$ , a valori nel gruppo abeliano libero su due generatori, denotato con  $F_2 = \langle q, t \rangle$ . Un laccio  $\alpha \in \Gamma$  va interpretato come  $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ , con  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  archi su  $D_n$ .

Posto:

$$a = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \left[ \int_{\alpha_1} \frac{dz}{z - p_j} + \int_{\alpha_2} \frac{dz}{z - p_j} \right]$$

$$b = \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha_1 - \alpha_2} \frac{dz}{z},$$

allora  $\phi(\alpha) = q^a t^b$ .

Se  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono lacci chiusi, si denota con  $a$  il numero di avvolgimento totale di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , intorno a ciascuna puntura, mentre  $b$  è il numero di avvolgimento totale di  $\alpha_1$  intorno ad  $\alpha_2$ . Si noti tuttavia che non necessariamente si hanno lacci chiusi: in quest'ultimo caso,  $a$  è la somma dei numeri di avvolgimento totale del laccio chiuso  $\alpha_1 \alpha_2$  intorno a ciascuna puntura e vale la formula:

$$(\alpha_1 - \alpha_2)(1) = -(\alpha_1 - \alpha_2)(0),$$

dalla quale si ricava che  $b$  è un numero intero e dispari.

Si consideri ora lo spazio di ricoprimento  $\tilde{\Gamma}$ , il cui gruppo fondamentale è il nucleo di  $\phi$  - cioè  $\pi_1(\tilde{\Gamma}) = \ker(\phi)$ . Detto  $\Lambda$  l'anello di gruppo  $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}, t^{\pm 1}]$ , il gruppo di omologia  $H_2(\tilde{\Gamma})$  è un  $\Lambda$ -modulo e le azioni di  $q$  e  $t$  si esplicano come trasformazioni di ricoprimento.

Se  $[\sigma] \in B_n$  è una treccia, rappresentata da una mappa  $\sigma \in \mathcal{H}(D, P)$ , si ottiene un'azione indotta di  $\sigma$  su  $\Gamma$ . Sollevando  $\sigma$  su  $\tilde{\Gamma}$ , si ottiene una mappa  $\tilde{\sigma}$ , che fissa il punto  $\tilde{c}_0$ . Questa operazione genera un automorfismo  $\tilde{\sigma}_* : H_2(\tilde{\Gamma}) \rightarrow H_2(\tilde{\Gamma})$ .

**Definizione 3.1.** La rappresentazione di Lawrence-Krammer è la mappa

$$\vartheta : [\sigma] \mapsto \tilde{\sigma}_*. \quad (3.1)$$

Nel prossimo paragrafo si tratta un lemma intermedio, che sarà poi utilizzato per la definizione esplicita di (3.1).

## 3.2 Accoppiamento di Blanchfield

Sia  $\epsilon > 0$  un numero arbitrario sufficientemente piccolo. Scelto un punto  $\{x, y\} \in \Gamma$ , si definiscono i sottoinsiemi  $P$  e  $B$  di  $\Gamma$  come segue:

-  $\{x, y\} \in P$  se  $|x - y| \leq \epsilon$  e se esiste una puntura  $p_i$ , tale che  $|x - p_i| \leq \epsilon$  o  $|y - p_i| \leq \epsilon$ ;

-  $\{x, y\} \in B$  se  $x \in \partial D$ , o  $y \in \partial D$ .

Scelti  $u \in H_2(\tilde{\Gamma}, \tilde{P})$  e  $v \in H_2(\tilde{\Gamma}, \tilde{B})$ , sia  $(u \cdot v)$  il numero standard delle intersezioni algebriche tra  $u$  e  $v$ . É possibile definire un numero, detto *accoppiamento di Blanchfield*, attraverso la mappa:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H_2(\tilde{\Gamma}, \tilde{P}) \times H_2(\tilde{\Gamma}, \tilde{B}) \rightarrow \Lambda,$$

tale che

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} (u \cdot q^i t^j v) q^i t^j. \quad (3.2)$$

Si può mostrare che questa mappa è ben definita e gode delle seguenti proprietà:

scelti  $u \in H_2(\tilde{\Gamma}, \tilde{P})$ ,  $v \in H_2(\tilde{\Gamma}, \tilde{B})$ ,  $\sigma \in B_n$  e  $k \in \Lambda$ ,

$$\langle \sigma u, \sigma v \rangle = \langle u, v \rangle$$

$$\langle ku, v \rangle = k \langle u, v \rangle = \langle u, \bar{k}v \rangle,$$

con  $\bar{k}$  immagine di  $k$  attraverso l'automorfismo  $\tilde{\sigma}_*$ .

## 3.3 Forchette e spaghetti

“Forchette” e “spaghetti” è la traduzione letterale dei termini *forks* e *noodles*; si tratta di oggetti monodimensionali immersi in un disco, designati a rappresentare elementi del secondo gruppo di omologia di  $\tilde{\Gamma}$ . Definendo un “accoppiamento” tra forchette e spaghetti, si otterrà una struttura che preserva gli elementi del nucleo della rappresentazione di Lawrence-Krammer. L'accoppiamento permetterà di individuare intersezioni geometriche tra i bordi corrispondenti sul disco; sfruttando queste costruzioni, si dimostrerà che una treccia nel nucleo della rappresentazione non può che essere banale.



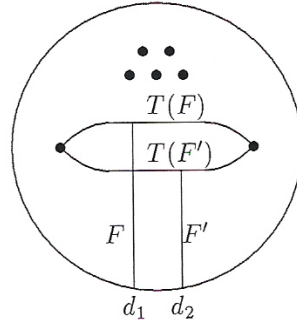


Figura 3.1: Forchetta  $F$  e una copia parallela  $F'$

**Definizione 3.2.** Una forchetta è un albero regolarmente immerso  $F \subset D$ , dotato di tre bordi e di quattro vertici  $d_1, p_i, p_j$  e  $z$ , tali per cui  $F \cap \partial D = \{d_1\}$ ,  $F \cap P = \{p_i, p_j\}$  e i tre bordi hanno come vertice comune  $z$ .

Il bordo contenente  $d_1$  si dice *manico* di  $F$ , l'unione degli altri due bordi è un arco, detto *bordo ramificato*, e denotato con  $T(F)$ .

Si può determinare una *copia parallela*  $F'$  di una forchetta, cioè un albero immerso - mostrata in Figura 3.1. Il bordo ramificato di  $F'$  si definisce in analogia a quello di  $F$ .

Per ogni forchetta si trova una superficie  $\tilde{\Sigma}(F) \subset \tilde{\Gamma}$ : scelta una copia parallela  $F'$  di  $F$  e  $z'$  il vertice comune ai suoi tre bordi, la superficie  $\Sigma(F)$  è l'insieme dei punti di  $\Gamma$  della forma  $\{x, y\}$ , con  $x \in T(F) \setminus P$  e  $y \in T(F') \setminus P$ . Se  $\beta_1$  è un arco che passa per  $d_1$  e  $z$ , lungo  $F$  e  $\beta_2$  è un arco che passa per  $d_2$  e  $z'$ , lungo  $F'$ ,  $\tilde{\beta}$  è il sollevamento di  $\{\beta_1, \beta_2\}$  a  $\tilde{\Gamma}$ .  $\tilde{\Sigma}(F)$  è il sollevamento di  $\Sigma(F)$  a  $\tilde{\Gamma}$ , che contiene  $\tilde{\beta}(1)$ .

**Definizione 3.3.** Uno spaghetti è un bordo regolarmente immerso  $N \subset D_n$ , di estremi  $d_1$  e  $d_2$ .

Assegnato uno spaghetti, si definisce la superficie  $\Sigma(N)$  come l'insieme dei punti  $\{x, y\} \in \Gamma$ , tali per cui  $x$  e  $y$  sono punti distinti di  $N$ . Sia  $\tilde{\Sigma}(N)$  il sollevamento di  $\Sigma(N)$  su  $\tilde{\Gamma}$ , contenente  $\tilde{c}_0$ .

Assegnati una forchetta e uno spaghetti, si definisce  $\langle N, F \rangle \in \Lambda$ , come segue:

$$\langle N, F \rangle = \sum_{a,b \in \mathbb{Z}} q^a t^b (q^a t^b \tilde{\Sigma}(N) \cdot \tilde{\Sigma}(F)). \quad (3.3)$$

$q^a t^b \tilde{\Sigma}(N)$  indica l'immagine di  $\tilde{\Sigma}(N)$  sotto l'azione della trasformazione  $q^a t^b$ ,  $(q^a t^b \tilde{\Sigma}(N) \cdot \tilde{\Sigma}(F))$  indica il numero di intersezioni algebriche delle due superfici in  $\tilde{\Gamma}$ . Si può notare come (3.3) rappresenti proprio l'accoppiamento di Blanchfield (3.2), associato alle due superfici  $\tilde{\Sigma}(N)$  e  $\tilde{\Sigma}(F)$ .

### 3.4 Fedeltà della rappresentazione

Per dimostrare la fedeltà della rappresentazione (3.1) è necessario premettere due lemmi di notevole importanza. Il primo, spesso ricordato come *lemma fondamentale*, comporta dettagli tecnici di notevole complessità e lunghezza - come il calcolo del numero algebrico di intersezioni  $(q^a t^b \tilde{\Sigma}(N) \cdot \tilde{\Sigma}(F))$  - e per questa ragione non se ne espone la dimostrazione <sup>1</sup>.

**Lemma 3.4.1.** *L'accoppiamento (3.3) tra forchette e spaghetti è ben definito; inoltre, se  $\sigma \in \mathcal{H}(D, P)$  è un elemento del nucleo di  $\vartheta$ , allora*

$$\langle N, F \rangle = \langle N, \sigma(F) \rangle; \quad \forall F, \forall N. \quad (3.4)$$

Il secondo risultato, detto *lemma chiave*, è indispensabile per completare la costruzione di tutti gli ingredienti, necessari alla prova della fedeltà della rappresentazione.

**Lemma 3.4.2.** *Dati una forchetta  $F$  e uno spaghetti  $N$ ,  $\langle N, F \rangle = 0$  se e solo se  $T(F)$  è isotopo - relativamente a  $\partial D \cup P$  - a un arco disgiunto da  $N$ .*

*Dimostrazione.* Si può ipotizzare, senza perdere di generalità, che  $T(F)$  intersechi trasversalmente  $N$ , in un numero finito di punti,  $\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$ , imponendo che  $k$  sia il minimo numero possibile di punti di intersezione. Si sceglie una copia parallela  $F'$  di  $F$ , in modo che  $T(F')$  intersechi  $N$  trasversalmente

---

<sup>1</sup>Si veda [2]

in  $\{z'_1, z'_2, \dots, z'_k\}$  - con  $z_i$  e  $z'_i$  appartenenti a uno stesso arco, che non passa per alcun altro  $z_j$  e  $z'_j$ .

Se  $k = 0$ , ovviamente  $\langle N, F \rangle = 0$ . Si dimostra che se  $k \neq 0$ , allora  $\langle N, F \rangle \neq 0$ . Per ogni coppia  $\{z_i, z'_j\}$  esiste un'unica coppia di interi  $\{a_{i,j}, b_{i,j}\}$ , tali per cui  $\tilde{\Sigma}(F)$  incontra  $q^{a_{i,j}}t^{b_{i,j}}\tilde{\Sigma}(N)$  in un punto della fibra di  $\{z_i, z'_j\}$ . Se  $\epsilon_{i,j}$  è il segno di questa intersezione e  $m_{i,j} = q^{a_{i,j}}t^{b_{i,j}}$ , allora:

$$\langle N, F \rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \epsilon_{i,j} m_{i,j}. \quad (3.5)$$

Questa relazione permette di ricavare esplicitamente l'accoppiamento di Blanchfield tra una forchetta e uno spaghetti. L'esponente  $a_{i,j}$  può essere calcolato, costruendo un arco  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , che congiunge  $d_1$  e  $z_n$ , lungo  $F$  e ritorna a  $d_1$ , lungo  $N$  e un arco  $\xi$  che congiunge  $d_1$  e  $d_2$ , lungo  $F$  e ritorna a  $d_1$  lungo  $\partial D$ . Detto  $a_i$  il numero di avvolgimento totale di  $\xi_i$  intorno alle punture e  $a$  l'analogo per  $\xi$ , vale la seguente uguaglianza:

**Proposizione 3.4.3.**  $a_{i,j} = a_i + a_j + a$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\xi'_n$  l'arco che passa per  $d_2$  e  $z'_n$ , lungo  $F'$  e ritorna a  $d_2$ , lungo  $N$  e sia  $a'_n$  il suo numero di avvolgimento totale. Se  $z_i$  è un punto più vicino a  $d_1$ , rispetto a  $z'_j$ , allora  $a_{i,j} = a_i + a'_j$ . Altrimenti  $a_{i,j} = a'_i + a_j$ . Ma  $a'_n = a_n + a, \forall n = 1, 2, \dots, k$ , quindi, in ogni caso,  $a_{i,j} = a_i + a_j + a$ .  $\square$

Il calcolo di  $m_{i,j}$  si effettua attraverso la costruzione di archi regolarmente immersi in  $D_n$ :

1.  $\alpha_1$  da  $d_1$  a  $z$ , lungo il manico di  $F$ ;
2.  $\alpha_2$  da  $d_2$  a  $z'$ , lungo il manico di  $F'$ ;
3.  $\beta_1$  da  $z$  a  $z_i$ , lungo  $T(F)$ ;

4.  $\beta_2$  da  $z'$  a  $z'_i$ , lungo  $T(F')$ ;
5.  $\gamma_1$  da  $z_i$  a  $d_k$ , lungo  $N^2$ ;
6.  $\gamma_2$  da  $z'_j$  a  $d_{k'}$ , lungo  $N^3$ .

Posto  $\delta_{i,j} = \{\alpha_1, \alpha_2\}\{\beta_1, \beta_2\}\{\gamma_1, \gamma_2\}$ , si ha:

$$m_{i,j} = \phi(\delta_{i,j}).$$

Per stimare  $\epsilon_{i,j}$  bisogna scegliere delle orientazioni per  $\Sigma(F)$ ,  $\Sigma(N)$  e  $\Gamma$ .

Su  $\Gamma$  conviene introdurre l'orientazione indotta sul prodotto  $D \times D$  dall'orientazione fissata su  $D$ .

Siano  $f : T(F) \rightarrow I$  e  $f' : T(F') \rightarrow I$  due diffeomorfismi che inducono su  $T(F)$  e  $T'(F)$  due orientazioni parallele. Se  $f_1$  e  $f_2$  sono mappe da  $\Sigma(F)$  in  $I$ , tali che se  $x \in T(F) \setminus P$  e  $y \in T(F') \setminus P$ , allora  $f_1(\{x, y\}) = f(x)$  e  $f_2(\{x, y\}) = f'(x)$ . L'orientazione di  $\Sigma(F)$  è data da  $df_1 \wedge df_2$ .

Sia  $g$  un diffeomorfismo per cui  $g(d_1) = 0$  e  $g(d_2) = 1$ ; se  $g_1, g_2 : \Sigma(N) \rightarrow I$  sono mappe per cui  $g_1(\{x, y\}) = \min(g(x), g(y))$  e  $g_2(\{x, y\}) = \max(g(x), g(y))$ , allora  $dg_1 \wedge dg_2$  da l'orientazione di  $\Sigma(N)$ .

Introdotte queste tre orientazioni,  $\epsilon_{i,j}$  si calcola applicando la seguente formula:

**Proposizione 3.4.4.**  $\epsilon_{i,j} = -m_{i,i}m_{i,j}m_{j,j}$ , valutato con  $q = 1$ ,  $t = -1$ .

*Dimostrazione.* Per definizione,  $\epsilon_{i,j}$  è dato dal segno dell'intersezione tra  $N$  e  $T(F)$  in  $z_i$ , dal segno dell'intersezione tra  $N$  e  $T(F')$  in  $z'_i$  e da quale tra i due punti  $z_i$  e  $z'_i$  si trova più vicino a  $d_1$ , lungo  $N$ .

Questi tre elementi si determinano considerando rispettivamente i valori di  $m_{i,i}$ ,  $m_{j,j}$  e  $m_{i,j}$ , con  $q = 1$  e  $t = -1$ . Infatti, il segno di  $m_{i',j'}$ , valutato per

---

<sup>2</sup> $k = 1, 2$  è tale che  $\gamma_1$  non passa per  $z'_j$ .

<sup>3</sup> $k' = 1, 2$  è tale che  $\gamma_2$  non passa per  $z_j$ .

$q = 1$  e  $t = -1$ , dipende dalla posizione che i punti assumono sul cammino  $\delta_{i',j'}$ ; questo dipende, a sua volta, da quale tra i due punti  $z_{i'}$  e  $z_{j'}$  si trova più vicino a  $d_1$ , lungo  $N$ .

$\epsilon_{i,j}$  si ottiene come prodotto tra  $m_{i,i}$ ,  $m_{j,j}$  e  $m_{i,j}$ , valutato con  $q = 1$  e  $t = -1$ . Per verificare che il segno del prodotto è negativo, bisogna ricorrere a qualche esempio specifico.  $\square$

**Definizione 3.4.** Si ha  $q^{atb} \leq q^{a't'b'}$  se e solo se:

- $a < a'$ ;
- $a = a'$  e  $b = b'$ .

Per  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ , si dice che  $m_{i,j}$  è massimale se  $m_{i,j} \geq m_{i',j'}$ , per ogni  $i', j' \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

**Proposizione 3.4.5.** Se  $m_{i,j}$  è massimale,  $m_{i,i} = m_{j,j} = m_{i,j}$ .

Le proposizioni 3.4.4 e 3.4.5 permettono di affermare che, se  $m_{i,j}$  è massimale,  $\epsilon_{i,j} = -m_{i,j}$ , con  $q = 1$ ,  $t = -1$ . Quindi il secondo membro della (3.5) non può annullarsi e  $\langle N, F \rangle \neq 0$ . Questo completa la dimostrazione del lemma chiave.  $\square$

Si concludono i risultati preliminari con un ulteriore lemma:

**Lemma 3.4.6.** Siano  $\alpha$  e  $\beta$  due curve chiuse semplici in  $D \setminus P$ , che hanno un numero elevato ma finito di intersezioni. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- a)  $\alpha$  è isotopo, relativamente a  $\partial D \cup P$ , a una curva chiusa semplice, che interseca in un numero inferiore di punti;
- b)  $\alpha$  e  $\beta$  delimitano un digono - un disco regolarmente immerso in  $D \setminus P$ , che ha come bordo porzioni delle due curve.

Infine:

**Teorema 3.4.7.** La rappresentazione di Lawrence-Krammer del gruppo delle trecce  $B_n$  è fedele per ogni  $n$ , inoltre  $B_n$  è lineare.

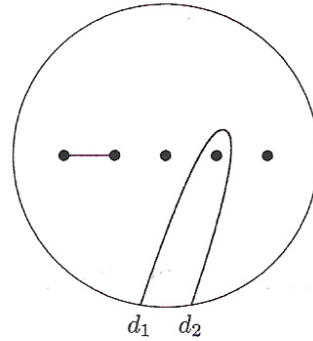


Figura 3.2: Il bordo  $E_1$  con lo spaghetto  $N_4$

*Dimostrazione.* Sia  $\sigma \in \mathcal{H}(D, P)$  un omomorfismo, che appartiene al nucleo della rappresentazione di Lawrence-Krammer. Si deve mostrare che  $\sigma$  è isotopo, relativamente a  $\partial D \cap P$ , alla mappa identità.

Sia  $E_i$  il bordo che congiunge le punture  $p_i$  e  $p_{i+1}$  e sia  $N_i$  lo spaghetto che si attorciglia intorno alla sola puntura  $p_i$  e interseca due volte l'asse reale (figura 3.2).

Sia  $F$  la forchetta per cui  $T(F) = E_1$ ; per il lemma fondamentale  $\langle N_3, F \rangle = 0$  e  $\langle N_3, \sigma(F) \rangle = 0$ . Dal lemma chiave segue che  $\sigma(E_1)$  è isotopo, relativamente a  $\partial D \cup P$ , a un arco disgiunto da  $N_3$  e a un arco disgiunto da  $N_4$ .

Per il lemma 3.4.6, l'isotopia può essere realizzata mediante una sequenza di azioni, che permettono di non realizzare il digono, evitando così di dover introdurre intersezioni con  $N_3$ . Si assume, grazie a questa ipotesi, che  $\sigma(E_1)$  sia disgiunto sia da  $N_3$ , sia da  $N_4$ . Risulta, quindi, che per  $i = 3, 4, \dots, n$ ,  $\sigma(E_1)$  è disgiunto da  $N_i$ . Con una isotopia conclusiva, si ha che  $\sigma(E_1) = E_1^4$ . Fissato  $E_1$ , si ripete lo stesso ragionamento per  $\sigma(E_2)$  e così via, finché  $\sigma(E_i) = E_i$ , per  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Ne consegue che  $\sigma$  è isotopo, relativamente a  $\partial D \cup P$ , a  $\Delta^k$ , dove  $\Delta$  è il Dehn twist intorno al bordo di una striscia, prossima a  $\partial D$ . L'azione di  $\Delta$  su  $H_2(\tilde{\Gamma})$  è data dalla moltiplicazione per  $q^{2nt^2}$ , e dal momento che  $\sigma$  agisce

<sup>4</sup>Si noti che non necessariamente  $\sigma$  preserva l'orientazione di  $E_1$ , infatti non sono state fatte ipotesi a riguardo.

banalmente su  $H_1(\tilde{\Gamma})$ ,  $k$  è nullo e  $\sigma$  è la treccia banale.  $\square$

La linearità del gruppo delle trecce<sup>5</sup> - immediata conseguenza della dimostrazione della fedeltà della rappresentazione di Lawrence-Krammer - ha rappresentato un traguardo fondamentale, in quanto si è risolto un problema, che per molto tempo era rimasto aperto, come già osservato nell'introduzione a questa tesi.

### 3.5 Forma matriciale

Di particolare interesse risulta essere il legame tra i generatori standard di  $B_n$  e la rappresentazione di Lawrence-Krammer, che permetterà di ricavare in particolare la forma matriciale della rappresentazione stessa. Il risultato principale qui esposto sarà poi ripreso nel quinto capitolo per dimostrare che la rappresentazione di Lawrence-Krammer è equivalente alla rappresentazione irriducibile di  $B_n$  sull'algebra di Birman-Murakami-Wenzl.

**Teorema 3.5.1.**  $H_2(\tilde{\Gamma})$  è un  $\Lambda$ -modulo libero di rango  $\binom{n}{2}$ . Si può determinare una base  $\{v_{j,k} : 1 \leq j < k \leq n\}$ , su cui la treccia standard  $\sigma_i$  agisce come segue:

$$\sigma_i(v_{jk}) = \begin{cases} v_{j,k} & \text{se } i \notin \{j-1, j, k-1, k\} \\ qv_{i,k} + (q^2 - q)v_{i,j} + (1 - q)v_{j,k} & \text{se } i = j - 1 \\ v_{j+1,k} & \text{se } i = j \neq k - 1 \\ qv_{j,i} + (1 - q)v_{j,k} + (q^2 - q)tv_{i,k} & \text{se } i = k - 1 \neq j \\ -tq^2v_{j,k} & \text{se } i = j = k - 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

*Dimostrazione.* Sia  $\xi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , un cammino in  $D$  con punto base  $d_1$ , che si avvolge in senso antiorario intorno a  $p_j$ . Si denotino con  $x_i$  l'arco  $\{\xi_j, d_2\}$ , con  $\tau_1$  l'arco da  $d_1$  a  $d_2$  e con  $\tau_2$  l'arco da  $d_2$  a  $d_1$ , in modo che  $\tau_1\tau_2$  sia una

<sup>5</sup>Si ricordi che un gruppo si dice lineare se è isomorfo a un sottogruppo di  $GL(n, K)$ , dove  $K$  è un anello.

curva semplice che non racchiude alcuna puntura. Posto  $y = \{\tau_1, \tau_2\} \in \Gamma$ , sia  $\mathcal{G} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, y\}$ .

Ricorrendo alle notazioni di [14], sia  $r_{j,j}$  il complesso  $[x_j, yx_jy]$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

Per  $1 \leq j < k \leq n$ , si ha  $r_{j,k} = [x_j, yx_ky^{-1}]$ .

Ponendo  $\mathcal{R} = \{r_{j,k} : 1 \leq j < k \leq n\}$ ,  $K$  denoterà il complesso di Cayley associato alla presentazione  $\langle \mathcal{G} | \mathcal{R} \rangle$ .  $K$  ha un vertice, un bordo per ciascun elemento  $g \in \mathcal{G}$  e una faccia  $f_r$  per ciascun elemento  $r \in \mathcal{R}$ . Si deve dimostrare che  $\Gamma$  è omotopicamente equivalente a  $K$ .

Il doppio ricoprimento di  $\Gamma$  è lo spazio  $\bar{\Gamma}$  delle coppie ordinate di punti distinti di  $D_n$ .  $\pi_1(\bar{\Gamma})$  è generato da  $x_1, x_2, \dots, x_n, y^2$ .

Introducendo le notazioni  $X_j = yx_jy^{-1}$  e  $Y = y^2$ , si ha che

$$\mathcal{G} = \{x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_n, Y\}$$

e i complessi si riscrivono nei seguenti modi:

- se  $1 \leq j \leq n$ :

$$\bar{r}_{j,j} = [x_j, X_jY]$$

$$\bar{r}'_{j,j} = [X_j, Yx_j]$$

- se  $1 \leq j < k \leq n$ :

$$\bar{r}_{j,k} = [x_j, X_k]$$

$$\bar{r}'_{j,k} = [X_j, Yx_kY^{-1}].$$

Si introduce l'insieme:

$$\bar{\mathcal{R}} = \{\bar{r}_{j,k} : 1 \leq j < k \leq n\} \cup \{\bar{r}'_{j,k} : 1 \leq j < k \leq n\}.$$

Se  $\bar{K}$  è il complesso di Cayley associato a  $\langle \bar{\mathcal{G}} | \bar{\mathcal{R}} \rangle$ , allora è omotopicamente equivalente al doppio ricoprimento di  $K$ , il cui gruppo fondamentale è sempre generato da  $x_1, x_2, \dots, x_n, y$ . Mostrando che  $\bar{\Gamma}$  è omotopicamente equivalente a  $\bar{K}$  si ha che  $\Gamma$  è omotopicamente equivalente a  $K$ .

La proiezione sulla prima coordinata  $\pi : \bar{\Gamma} \rightarrow D_n$  può essere ristretta all'interno di  $\bar{\Gamma}$ ; si ottiene così un fibrato vettoriale sull'interno di  $D_n$ , la cui fibra è il disco aperto  $(n+1)$ -puntato.



$D_n$  è omotopicamente equivalente a un grafo con un vertice e  $n$  bordi associati a  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . La fibra è omotopicamente equivalente a un grafo con un vertice e  $n + 1$  bordi, associati a  $X_1, X_2, \dots, X_n, Y$ . La struttura di fibrato vettoriale su  $\bar{C}$  da un'equivalenza omotopica tra  $\bar{C}$  stesso e il complesso di Cayley associato a  $\langle \bar{\mathcal{G}} | \bar{\mathcal{R}}' \rangle$ , dove  $\bar{\mathcal{R}}'$  denota l'insieme delle relazioni del tipo:

$$Y^{x_k} = X_k Y X_k^{-1}$$

$$X_j^{x_k} = \begin{cases} X_j Y X_j Y^{-1} X_j^{-1} & j = k \\ X_k Y X_k^{-1} Y^{-1} X_j Y X_k Y^{-1} X_k^{-1} & j < k \\ X_j & j > k \end{cases}$$

per  $j, k = 1, 2, \dots, n$ .

Le relazioni di  $\bar{\mathcal{R}}'$  possono essere trasformate in relazioni di  $\mathcal{R}$ , usando azioni che si realizzano mediante isotopia delle mappe, definite sulle facce del complesso di Cayley. In questo modo  $\bar{\Gamma}$  è omotopicamente equivalente a  $\bar{K}$ , come richiesto.

Si valuta ora la struttura del gruppo  $H_2(\tilde{\Gamma})$ ; siano  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  i  $\Lambda$ -moduli liberi di base rispettivamente  $\{[g] : g \in \mathcal{G}\}$  e  $\{[f_r] : r \in \mathcal{R}\}$ . Un elemento generico  $w \in \mathcal{C}_1$  si definisce in modo induttivo, ricorrendo alle seguenti regole:

$$[1] = 0$$

$$[gw] = [g] + \phi(g)[w]$$

$$[g^{-1}w] = \phi^{-1}(g)([w] - e_g),$$

per ogni  $g \in \mathcal{G}$ .  $H_2(\tilde{\Gamma})$  è il nucleo della mappa  $\partial : \mathcal{C}_2 \rightarrow \mathcal{C}_1$  data da  $\partial f_r \doteq [r]$ .

In particolare:

$$\partial f_r = \begin{cases} (1 + q^{-1}t^{-1})((1 - t)[x_j] + (q - 1)[y]) & \text{se } r = r_{j,j} \\ (q^{-1} - q^{-2})(-[x_j] + t[x_k] - (q - 1)[y]) & \text{se } r = r_{j,k} \end{cases}$$

Il nucleo di questa mappa è un  $\Lambda$ -modulo libero, di base  $\{v_{j,k} : 1 < k \leq n\}$ , dove

$$v_{j,k} = (q - 1)f_{j,j} - (q - 1)t f_{k,k} + (1 - t)(1 + qt)f_{j,k}.$$

Siano  $F_{j,k}$  delle forchette che corrispondono ai vettori  $v_{j,k}$ . Scelte  $n$  punture  $p_1, p_2, \dots, p_n$  sull'asse reale, tali per cui  $-1 < p_1 < p_2 < \dots < p_n < 1$ , si considerino  $d_1$  e  $d_2$  nel semipiano inferiore, in modo che  $d_1$  stia a sinistra di  $d_2$ . Sia  $F_{j,k}$  la forchetta che giace nel semipiano inferiore chiuso e il cui bordo ramificato  $T(F)$  ha per estremi  $p_j$  e  $p_k$ ,  $1 \leq j < k \leq n$ ; questa forchetta è univocamente determinata e prende il nome di *forchetta standard*.

Si costruisce  $D' \subset D$ , in modo che contenga  $F_{j,k}$  e  $D' \cap P = \{p_j, p_k\}$ . Siano  $\Gamma'$  l'insieme di coppie non ordinate di punti distinti di  $D'$  e  $\tilde{\Gamma}'$  l'immagine di  $\Gamma'$  in  $\tilde{\Gamma}$ .  $v_{j,k}$  è proprio un elemento di  $H_2(\tilde{\Gamma}')$ , generatore di tale spazio come  $\Lambda$ -modulo.

La superficie  $\Sigma_2(F_{j,k})$  è contenuta in  $\tilde{\Gamma}'$  e rappresenta la classe di omologia  $lv_{j,k}$ , per qualche  $l \in \Lambda$  - si noti che il valore di  $l$  non dipende da  $j$  e  $k$ .

La scrittura  $\sigma_i(v_{j,k})$  si esplicita in termini di vettori della base, dopo aver determinato una combinazione lineare di forchette standard che rappresenti sia un qualche elemento di  $H_2(\tilde{\Gamma})$  sia  $\sigma_i(v_{j,k})$ .

Se  $i \notin \{j-1, j, k-1, k\}$ ,  $i = j \neq k$  e  $i = k$ ,  $\sigma_i(F_{j,k})$  è proprio una forchetta standard.

Se  $i = j = k - 1$ , la forchetta  $\sigma_i(F_{j,k})$  ha lo stesso bordo ramificato di  $F_{j,k}$ , quindi rappresenta la medesima superficie in  $\tilde{\Gamma}$ , a meno della scelta di un'opportuna orientazione e dell'applicazione di trasformazioni di ricoprimento. Calcolando l'accoppiamento  $\langle N, \sigma_i(F_{j,k}) \rangle$ , dove  $N$  è un opportuno spaghetti, si ha  $\sigma_i(v_{j,k}) = -tq^2 v_{j,k}$ .

I casi rimanenti sono  $i = j - 1$  e  $i = k - 1 \neq j$ . Per trattarli si utilizza la seguente proposizione:

**Proposizione 3.5.2.**  $\sigma_i(v_{j,k})$  è una combinazione lineare dei vettori  $v_{j',k'}$ , tali che  $j', k' \in \{i, i+1, j, k\}$ .

*Dimostrazione.* Esiste un disco  $D' \subset D$  che contiene  $\sigma_i(F_{j,k})$  e  $F_{j',k'}$ ,  $\forall j', k' \in \{i, i+1, j, k\}$ ,  $j' < k'$  e  $D' \cap P = \{p_i, p_{i+1}, p_j, p_k\}$ .

$H_2(\tilde{\Gamma}')$  è, in questo caso, un  $\Lambda$ -modulo libero, la cui base è costituita dai  $v_{j',k'}$ , con  $j', k' \in \{i, i+1, j, k\}$  e  $j' < k'$ .

$\sigma_i(v_{j,k})$  è un elemento di  $H_2(\tilde{\Gamma}')$  e quindi una combinazione dei  $v_{j',k'}$ . □

Se  $i = j - 1$ , grazie alla proposizione,  $\sigma_i(F_{j,k})$  rappresenta un elemento di  $H_2(\tilde{\Gamma})$  come combinazione  $\Lambda$ -lineare di tre forchette standard  $F_{i,j}$ ,  $F_{i,k}$  e  $F_{j,k}$ . Il calcolo esplicito dell'accoppiamento con opportuni spaghetti mostra che le combinazioni corrette sono quelle dell'enunciato, anche nel rimanente caso  $i = k - 1 \neq j$ .  $\square$

Si noti che attraverso le (3.6), la rappresentazione di Lawrence-Krammer si reinterpreta come:

$$\lambda : B_n \rightarrow GL(\Lambda),$$

cioè come una rappresentazione lineare.

A titolo di esempio, si costruisce la matrice  $A_1$  mediante l'azione della treccia  $\sigma_1 \in B_3$  sul vettore  $v_{i,j}$ . Dalla (3.6) si ha che:

$$\sigma_1(v_{1,2}) = -tq^2v_{1,2};$$

$$\sigma_1(v_{1,3}) = v_{2,3};$$

$$\sigma_1(v_{2,3}) = (q^2 - q)tv_{1,2}.$$

La matrice che si ottiene è:

$$A_1 = \sigma_1(v_{i,j}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -tq^2 & 0 & 1 \\ (q^2 - q)t & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

In particolare, la dimensione delle matrici è  $\binom{n}{2} \times \binom{n}{2}$ .

### 3.6 Ulteriori rappresentazioni di $B_n$

La rappresentazione  $\vartheta$  del gruppo delle trecce non è in realtà l'unica a essere fedele. La costruzione presentata nel paragrafo 1.5, che lega  $B_n$  a  $F_n$  infatti costituisce la base per la dimostrazione di un risultato fondamentale<sup>6</sup>:

**Teorema 3.6.1.** *L'omomorfismo (1.3) fornisce una rappresentazione fedele del gruppo delle trecce  $B_n$  come gruppo degli automorfismi del gruppo libero*

<sup>6</sup>Si veda in proposito [15].

$F_n$ . Questo omomorfismo induce un isomorfismo di  $B_n$  con il sottogruppo  $M_n \subset \text{Aut}(F_n)$  degli automorfismi di  $F_n$ , indotti dagli omeomorfismi che fissano puntualmente  $\partial D_n$ .

Si noti che si possono costruire altre rappresentazioni finito-dimensionali del gruppo delle trecce, sull'anello  $\mathbb{C}[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_k, t_k^{-1}]$ , con  $t_i$  parametri,  $i = 1, 2, \dots, k$  e  $k \geq 0$ .

Limitandosi al caso più semplice, si osserva preliminarmente che per realizzare tale costruzione, non si tratterà  $B_n$  come gruppo in sè, ma piuttosto come sottogruppo del gruppo delle trecce  $B_{n+1}$ . In questo gruppo le  $n + 1$  componenti sono numerate da 0 a  $n$ . Se  $B_{1,n}$  è l'insieme delle trecce di  $B_{n+1}$  a cui sono associate le permutazioni, che fissano la componente numero 0, allora si determina una relazione con  $B_n$ , data da:

$$1 \rightarrow F_n \rightarrow B_{1,n} \rightarrow B_n \rightarrow 1, \quad (3.7)$$

dove  $B_{1,n} \rightarrow B_n$  è un omomorfismo, ottenuto estraendo la componente numero 0.

Considerando  $B_n$  come un sottogruppo del gruppo  $\text{Aut}(F_n)$ , è possibile introdurre un prodotto semidiretto  $\rtimes$ , tale per cui  $B_{1,n}$  si identifica con  $F_n \rtimes B_n$ . Il legame tra  $B_n$  ed  $F_n$  è stato trattato nel primo capitolo e, ricordando che  $F_n \cong \pi_1(D_n, d_0)$ , si ricavano le seguenti relazioni:

$$\sigma_i \mathbf{x}_j \sigma_i^{-1} = \begin{cases} \mathbf{x}_{i+1} & \text{se } j = i \\ \mathbf{x}_{i+1}^{-1} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_{i+1} & \text{se } j = i + 1 \\ \mathbf{x}_j & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.8)$$

dove  $\{\mathbf{x}_i\}_{1 \leq i \leq n}$  sono i generatori del gruppo libero  $F_n$ . Poichè  $B_n \subset B_{n+1}$ , anche  $F_n$  e  $F_n \rtimes B_n$  sono sottogruppi di  $B_{n+1}$ .

La rappresentazione che si vuole costruire necessita delle nozioni di omologia e comologia di uno spazio a coefficienti in un fibrato vettoriale piatto. Se  $M$  è una varietà, il nostro scopo è assegnare una rappresentazione  $r : \pi_1(M) \rightarrow GL(V)$ , dove  $V$  è uno spazio vettoriale. Sia  $\tilde{M}$  lo spazio di ricoprimento di  $M$ ;  $\pi_1(M)$  agisce su  $\tilde{M} \times V$  nel modo seguente:  $g \cdot (x, \mathbf{v}) = (g \cdot \tilde{x}, r(g) \cdot \mathbf{v})$ .

Il fibrato  $E_r$  è il quoziente di  $\tilde{M} \times V$ , dato da questa azione. Il gruppo di comologia di 1-forme con coefficienti in  $E_r$ , viene denotato con  $H^1(M, r)$ . Per determinare l'azione del gruppo delle trecce, si utilizzano le relazioni (3.8). Dal momento che  $B_{1,n}$  è un sottogruppo di  $B_{n+1}$ , ogni rappresentazione di  $B_{n+1}$ , soddisfa alle relazioni e, per questa ragione, si è considerato  $B_n$  come sottogruppo di  $B_{n+1}$ . Si può, a questo punto, enunciare il teorema che fornisce la rappresentazione cercata:

**Teorema 3.6.2.** *Data una rappresentazione  $r : F_n \rtimes B_n \rightarrow GL(V)$ , si può sempre costruire una rappresentazione  $r^+ : B_n \rightarrow H^1(M, r)$ . In particolare, da ogni rappresentazione  $r : B_{n+1} \rightarrow GL(V)$  si costruisce una rappresentazione  $r^+ : B_n \rightarrow H^1(M, r)$ .*

Il teorema mostra che, data una rappresentazione di  $B_n$  dipendente dal parametro  $k$ , si costruisce una nuova rappresentazione con parametro  $k + 1$ . Ad esempio, la rappresentazione banale di  $F_n \rtimes B_n$  - cioè quella nel parametro  $k = 0$  - genera la rappresentazione di Burau e, partendo da questa, si genera la rappresentazione di Lawrence-Krammer.

Per concludere si ha:

**Corollario 3.6.3.** *Se  $r$  è unitaria, anche  $r^+$  è unitaria.*

L'unitarietà di  $r^+$  dipende dunque dall'unitarietà di  $r$ .

# Capitolo 4

## Algebre di Hecke

Lo studio delle algebre di Hecke, denotate con  $\mathcal{H}_n$ ,  $n \geq 1$ , si manifesta a partire da alcune analogie con la rappresentazione di Burau del gruppo delle trecce. Adrian Ocneanu ha introdotto una funzione traccia sull'algebra, dalla quale si parte per ricavare il più generale invariante dei nodi orientati, dipendente da due variabili, il polinomio HOMFLY.

Prima di affrontare la costruzione di tale traccia, si specificheranno la struttura e le proprietà di  $\mathcal{H}_n$ , introducendo altresì le rappresentazioni di  $B_n$  sull'algebra e costruendo una base.

### 4.1 Definizione e proprietà

Ricordando la costruzione e le notazioni del secondo capitolo, si deduce immediatamente che l'immagine dei generatori standard del gruppo delle trecce  $B_n$ , sotto l'azione della rappresentazione di Burau (2.1), soddisfa a un'equazione caratteristica del tipo

$$x^2 = (1 - q)x + q, \tag{4.1}$$

che ha due distinti autovalori complessi.

Jones [16] ha studiato tutte le rappresentazioni  $r : B_n \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ , con al più due distinti autovalori. Se  $x_i = r(\sigma_i)$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n$ ,  $x_i$  deve soddisfare a

un'equazione quadratica della forma

$$x_i^2 + ax_i + b = 0. \quad (4.2)$$

Nell'ipotesi che uno degli autovalori sia 1, esprimendo in funzione della sola variabile  $b$  - imponendo  $a = -(1 + b)$  - e sostituendo nella (4.2)  $b = -q$ , si ha:

$$x_i^2 - (1 + b)x_i + b = x_i^2 - (1 - q)x_i - q = 0 \quad (4.3)$$

La (4.3) è proprio un'equazione identica alla caratteristica per la rappresentazione di Burau e, in questo caso,  $q$  è un elemento unità in un campo  $R$ .

Per queste ragioni, l'algebra di Hecke si costruisce a partire da generatori della forma  $x_i$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

**Definizione 4.1.** L'algebra di Hecke  $\mathcal{H}_n(q)$  è l'algebra generata dagli elementi  $1, x_1, \dots, x_{n-1}$  e in cui valgono le relazioni:

$$x_i x_k = x_k x_i \quad |i - k| \geq 2 \quad (4.4)$$

$$x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n - 1 \quad (4.5)$$

$$x_i^2 = (1 - q)x_i + q \quad 1 \leq i \leq n - 1. \quad (4.6)$$

Si noti che se  $q = 1$ ,  $\mathcal{H}_n$  è l'algebra di gruppo<sup>1</sup>  $\mathbb{C}S_n$  associata al gruppo simmetrico  $S_n$ , in questo caso l'algebra si dice *semisemplice*. Si può pensare quindi all'algebra di Hecke come a una deformazione di  $\mathbb{C}S_n$ . Vale, inoltre, il seguente risultato, dimostrato da J. Tits [9], che raggruppa alcune proprietà significative dell'algebra di Hecke:

**Teorema 4.1.1.** - Per un generico  $q$ ,  $\mathcal{H}_n(q)$  ha dimensione  $n!$ ;  
 - per  $q$  sufficientemente prossimo a 1,  $\mathcal{H}_n(q)$  è semisemplice;  
 - i moduli semplici di  $\mathcal{H}_n(q)$  sono in corrispondenza con i diagrammi di Young e le regole di decomposizione e le dimensioni coincidono con quelle di  $S_n$ .

<sup>1</sup>Un algebra di gruppo è un anello di gruppo  $A[G]$ , in cui  $A$  è un campo.

La definizione 4.1 si riferisce alla dipendenza da un solo parametro  $q$ ; esiste tuttavia una definizione più generale per cui  $\mathcal{H}_n$  dipende da due parametri  $q_1$  e  $q_2$ .

**Definizione 4.2.** Assegnati un intero positivo  $n$  e  $q_1, q_2$  elementi unità di un campo  $R$ , l'algebra di Hecke  $\mathcal{H}_n(q_1, q_2)$  è la  $R$ -algebra associativa, generata da  $1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  e in cui valgono le relazioni:

$$x_i x_k = x_k x_i \quad |i - k| > 1 \quad (4.7)$$

$$x_i x_{i+1} x_i = x_{i+1} x_i x_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n - 1 \quad (4.8)$$

$$(x_i - q_1)(x_i - q_2) = 0. \quad (4.9)$$

*Osservazione 3.* L'uso di un solo parametro corrisponde alla scelta  $\mathcal{H}_n(-1, q)$ , oppure  $\mathcal{H}_n(1, -q)$ . Non c'è perdita di generalità nel definire l'algebra in termini di un solo parametro, poichè esiste un isomorfismo naturale tra  $\mathcal{H}_n(q_1, q_2)$  e  $\mathcal{H}_n(-1, -\frac{q_2}{q_1})$ , dato da  $x_i \mapsto q_1 x_i$ .

Se  $q_1$  e  $q_2$  sono elementi unità, anche gli  $x_i$  sono elementi unità in  $\mathcal{H}_n$  e vale

$$x_i^{-1} = \frac{x_i - q_1 - q_2}{q_1 q_2}.$$

Si può determinare inoltre una mappa naturale  $\mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$  tra  $R$ -algebre, che rende  $\mathcal{H}_{n+1}$  un  $(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_n)$ -bimodulo del tipo  $\mathcal{H}_n \oplus [\mathcal{H}_n \otimes_{\mathcal{H}_{n-1}} \mathcal{H}_n]$ . Fissato  $q$ , vale la seguente:

**Proposizione 4.1.2.** *Esiste un isomorfismo naturale tra  $(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_n)$ -bimoduli*

$$\phi : \mathcal{H}_n \oplus [\mathcal{H}_n \otimes_{\mathcal{H}_{n-1}} \mathcal{H}_n] \rightarrow \mathcal{H}_{n+1}, \quad (4.10)$$

dato da  $\phi(a + \sum_i b_i \otimes c_i) = a + \sum_i b_i x_n c_i$ .

Si noti fin da ora che l'isomorfismo  $\phi$  è il punto chiave per poter ricavare le proprietà della funzione traccia, che sarà definita in seguito.



## 4.2 Rappresentazioni dell'algebra

Per descrivere le rappresentazioni dell'algebra di Hecke, si ricorre alla struttura e alle proprietà delle cosiddette *bialgebre graduate*.

**Definizione 4.3.** Si dice bialgebra graduata una famiglia di algebre  $A_n$ ,  $n \geq 0$ , definite su un anello commutativo  $A$  e dotate di applicazioni  $\mu_{pq} : A_p \otimes A_q \rightarrow A_{p+q}$  tali che,  $\forall p, q = 1, 2, \dots, n$ :

- $\mu_{pq}$  sono morfismi tra  $A$ -algebre;
- $\mu_{pq}$  sono associative;
- $\mu_{pq}$  ammettono elemento neutro.

Usualmente, la bialgebra si denota con  $A_*$  e il prodotto  $\mu_{pq}$  con  $\times$ .

**Definizione 4.4.** Una rappresentazione del gruppo delle trecce  $B_n$  su una bialgebra graduata  $A_*$  è una famiglia  $r_n$ ,  $n \geq 0$ , tale che:

- $r_n$  è una rappresentazione di  $B_n$  sul gruppo degli elementi unitari di  $A_*$ , per ogni  $n$ ;
- queste rappresentazioni sono compatibili con il prodotto.

**Proposizione 4.2.1.** *L'unione delle algebre di Hecke  $\bigcup_n \mathcal{H}_n$  costituisce una bialgebra graduata  $\mathcal{H}_*$  e l'applicazione  $f : B_n \rightarrow \mathcal{H}_n$  è una rappresentazione del gruppo delle trecce, per ogni valore di  $n$ .*

L'isomorfismo  $f$  tra  $B_n$  e  $\mathcal{H}_n$  è ben definito e trasforma un generatore standard  $\sigma_i$  in un generatore  $x_i$ , mediante  $f(\sigma_i) \doteq x_i$ . Questo significa che le rappresentazioni di  $\mathcal{H}_n$  sono equivalenti alle rappresentazioni di  $B_n$ , che di conseguenza soddisfano alla relazione  $\sigma_i^2 = (1 - q)\sigma_i + q$ . In particolare, dal teorema 4.1.1, si ricava che la  $f$  è una rappresentazione completamente riducibile e che le sue sottorappresentazioni irriducibili corrispondono ai diagrammi di Young per le rappresentazioni del gruppo simmetrico - si veda l'appendice A.

Denotando con  $K$  l'anello dei polinomi di Laurent a coefficienti interi nelle variabili  $\lambda$  e  $\mu$  e scelto un intero positivo  $n$ , si indica con  $X_n$  l'insieme

$\{1, 2, \dots, n\}$  e con  $M$  il  $K$ -modulo, liberamente generato dall'insieme  $F$  delle applicazioni  $X_n \rightarrow \mathbb{Z}$ .

Scelto un intero  $0 < i < n$ , qualunque sia  $f \in F$ , siano  $s_i : M \rightarrow M$  gli endomorfismi per cui:

$$s_i(f) = \begin{cases} \lambda f \circ \varepsilon_i & \text{se } f(i) < f(i+1) \\ \lambda f & \text{se } f(i) = f(i+1) \\ (\lambda + \mu)f - \mu f \circ \varepsilon_i & \text{se } f(i) > f(i+1) \end{cases} \quad (4.11)$$

dove  $\varepsilon_i$  rappresentano le permutazioni di  $X_n$ , che scambiano  $i$  e  $i+1$ .

**Lemma 4.2.2.** *Gli endomorfismi  $s_i$  verificano le seguenti formule:*

$$s_i^2 - (\lambda + \mu)s_i + \lambda\mu = 0 \quad (4.12)$$

$$s_i s_j = s_j s_i \quad \forall i, j < n, \quad j > i+1 \quad (4.13)$$

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \quad \forall i, j < n \quad (4.14)$$

**Corollario 4.2.3.** *Esiste una rappresentazione dell'algebra  $\mathcal{H}_n$ , definita dall'algebra degli endomorfismi di  $M$ , che mappano i generatori  $x_i \in \mathcal{H}_n$  negli endomorfismi  $s_i$ . In questo modo,  $M$  acquisisce la struttura di  $\mathcal{H}_n$ -modulo.*

Sia  $\Phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  un'applicazione a supporto finito; si dice *peso* di  $\Phi$  il numero  $\sum_{p \in \mathbb{Z}} \Phi(p)$ . Si denota con  $M(\Phi)$  il sottomodulo di  $M$ , generato dalle applicazioni  $f \in F$  tali che:

$$\Phi(p) = \#(f^{-1}(p)) \quad \forall p \in \mathbb{Z}. \quad (4.15)$$

Si dimostra, in modo evidente che:

**Proposizione 4.2.4.** *Per tutte le applicazioni  $\Phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  a supporto finito, il sottomodulo  $M(\Phi)$  di  $M$  è un  $\mathcal{H}_n$ -modulo.*

*Osservazione 4.* Jones [16] ha dimostrato che per ogni componente di una treccia esiste una rappresentazione irriducibile dell'algebra di Hecke di dimensione 1. In particolare, l'algebra  $\mathcal{H}_n$  possiede un sottospazio invariante sotto moltiplicazione per un generatore  $x_i$  o  $\sigma_i$ . Questo in analogia con quanto Birman e Wenzl hanno dimostrato per l'algebra BMW, come verrà successivamente chiarito.

### 4.3 Costruzione della base

Si procede ora con la costruzione della base per l'algebra di Hecke, denotando con  $\Sigma_p$  l'insieme degli elementi di  $\mathcal{H}_n$ , della forma  $\tau_i = x_{p-1}x_{p-2}\dots x_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , e con  $\mathcal{S}_n$  l'insieme degli elementi di  $\mathcal{H}_n$ , della forma  $\tau_1\tau_2\dots\tau_n$ ,  $\tau_i \in \Sigma_i$ ;  $\mathcal{S}_n$  ha  $p!$  elementi. Si dimostra la seguente:

**Proposizione 4.3.1.** *L'algebra di Hecke è un  $K$ -modulo libero, di base  $\mathcal{S}_n$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $p \leq n$  un intero strettamente positivo e  $\tau_i = x_{p-1}x_{p-2}\dots x_i$ . Se  $i \leq p$ , per ogni  $j < p$ , valgono le seguenti uguaglianze:

$$\tau_i x_i = \begin{cases} x_j \tau_i & \text{se } j < i - 1 \\ \tau_j & \text{se } j = i - 1 \\ (\lambda + \mu)\tau_i - (\lambda\mu)\tau_{i-1} & \text{se } j = i \\ x_{j-1}\tau_i & \text{se } j > i \end{cases} \quad (4.16)$$

Il sottomodulo di  $\mathcal{H}_n$ , generato da  $\mathcal{S}_n$ , è stabile per moltiplicazione a destra, per tutti i generatori  $x_i$ . Quindi  $\mathcal{H}_n$  è linearmente generato da  $\mathcal{S}_n$ .

Sia data la mappa  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ , di supporto  $\{1, 2, \dots, n\}$ , che vale 1 sul supporto stesso. Il  $K$ -modulo  $M(\varphi)$  è isomorfo all'anello  $K[S_n]$ , costruito sul gruppo simmetrico. Detta  $f_0$  l'inclusione di  $\{1, 2, \dots, n\}$  in  $\mathbb{Z}$ , la moltiplicazione a destra per  $f_0$  induce un'applicazione  $\gamma : \mathcal{H}_n \otimes K \rightarrow M(\varphi)$ ,  $K$ -lineare. Tensorizzando  $M(\varphi)$  attraverso il morfismo  $K \rightarrow \mathbb{Z}$ , che mappa  $\lambda$  in 1 e  $\mu$  in -1,  $\mathcal{H}_n \otimes \mathbb{Z}$  e  $M(\varphi)$  vengono identificati con  $\mathbb{Z}[S_n]$  e  $\gamma$  diventa l'identità.

A questo punto,  $\gamma(\mathcal{S}_n)$  è una base di  $M(\varphi) \otimes \mathbb{Z}$  e un sistema libero di generatori per  $M(\varphi)$ . Dunque  $\mathcal{S}_n$  è una base per  $\mathcal{H}_n$ .  $\square$

Gli elementi della base dell'algebra sono permutazioni di suoi generatori e ciò chiarisce ancor più efficacemente l'interpretazione di  $\mathcal{H}_n$  come deformazione di  $\mathbb{C}S_n$ .

**Corollario 4.3.2.**  $\mathcal{H}_n$ ,  $n > 0$ , è un  $\mathcal{H}_{n-1}$ -modulo libero a sinistra, di base  $\{\sigma_{n-1}, \sigma_{n-2}, \dots, \sigma_1\}$ .

**Corollario 4.3.3.**  $\mathcal{H}_{n+1}$ ,  $n > 0$ , è un  $\mathcal{H}_n$ -bimodulo isomorfo a  $\mathcal{H}_n \oplus [\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_{n-1} \mathcal{H}_n]$ .

## 4.4 La funzione traccia

Una funzione traccia su  $\mathcal{H}_n$  è una funzione lineare  $tr : \mathcal{H}_n \rightarrow R$ , tale per cui  $tr(ab) = tr(ba)$ , per ogni  $a$  e  $b$  in  $\mathcal{H}_n$ . La traccia  $tr$  su  $\mathcal{H}_n$  si dice di Ocneanu.

Se  $V$  è un sottospazio vettoriale, che ha per generatori gli elementi della forma  $ab - ba$ , allora la funzione traccia è la mappa lineare  $V \rightarrow R$ .

Se  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  è una partizione dell'intero  $n$  - nel senso precisato nell'appendice A - e  $b_\lambda$  è una treccia, il cui diagramma è unione disgiunta dei diagrammi delle trecce  $b_{(\lambda_i)}$ , detta  $v_\lambda$  la chiusura di  $b_\lambda$ , vale il seguente:

**Teorema 4.4.1.** *L'insieme dei  $v_\lambda$ , generato dalle partizioni  $\lambda$  di  $n$ , è una base per il sottospazio  $V$ .*

È possibile costruire una famiglia a un parametro di funzioni traccia, su un'algebra, dipendente da un parametro; si calcola così in modo consistente la traccia  $tr(f(\alpha))$ , per ogni  $\alpha \in B_n$ , come stabilito dal seguente teorema.

**Teorema 4.4.2.** *Siano  $R$  un campo e  $q, z$  due suoi elementi. Sia  $\mathcal{H}_n$  l'algebra di Hecke su  $R$ , corrispondente al parametro  $q$ ; allora esiste una funzione traccia:*

$$tr : \mathcal{H}_n \rightarrow R, \quad (4.17)$$

compatibile con l'inclusione  $\mathcal{H}_n \hookrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$  e tale che:

- $tr(1) = 1$ ;
- $tr(ab) = tr(ba)$ ;
- $tr$  è  $R$ -lineare;
- $tr(ax_nb) = z(tr(ab))$ .

*Dimostrazione.* Si definisce per induzione su  $n$  la mappa  $R$ -lineare  $tr : \mathcal{H}_{n+1} \rightarrow R$ , usando l'applicazione (4.10) e la proposizione 4.1.2. La quarta proprietà sfrutta proprio l'isomorfismo (4.10), in quanto l'elemento  $ax_nb \in \mathcal{H}_{n+1}$  è immagine dell'elemento  $a \otimes b \in \mathcal{H}_n \otimes_{\mathcal{H}_{n-1}} \mathcal{H}_n$ .

Partendo dall'identità,  $tr : \mathcal{H}_0 = R \rightarrow R$ , si definisce  $tr : \mathcal{H}_{n+1} \rightarrow R$  mediante l'uguaglianza  $tr(x) = tr(a) + \sum_i z(tr(b_i c_i))$ , avendo posto  $x = \phi(a +$

$\sum_i b_i \otimes c_i$ ). Se  $a, b \in \mathcal{H}_n$ , allora  $tr(ax_nb) = z(tr(ab))$ , poichè  $\phi(a \otimes b) = ax_nb$ . Bisogna solo provare che  $tr(ab) = tr(ba)$ ,  $\forall a, b \in \mathcal{H}_{n+1}$ . Si procede ancora per induzione su  $n$ .

Se  $a$  è scritto come combinazione dei generatori  $x_i$  dell'algebra, ma  $b$  non contiene esplicitamente i generatori, si potrà porre  $a = a'x_na''$ , dove  $a'$  e  $a''$  sono combinazione dei generatori, ottenendo:

$$tr(ab) = tr(a'x_na''b) = z(tr(a'a''b)) = z(tr(ba'a'')) = tr(ba'x_na'') = tr(ba).$$

Se  $b$  è combinazione dei generatori, basta controllare il caso in cui  $a = cx_nd$ , con  $c, d \in \mathcal{H}_n$  e  $b = x_n$ . Si presentano diverse possibilità a seconda che  $c$  e  $d$  contengano o meno il generatore  $x_{i-1}$ . Il caso più critico si ha in corrispondenza delle scelte  $c = c'x_{n-1}c''$  e  $d = d'x_{n-1}d''$ , dove  $c', c'', d', d'' \in \mathcal{H}_{n-1}$ .

Si ha così:

$$tr(cx_ndx_n) = z[(q-1)tr(cd) + q(tr(cd'd''))]$$

$$tr(x_ncx_nd) = z[(q-1)tr(cd) + q(tr(c'c''d))].$$

Ma

$$tr(cd'd'') = tr(c'x_{n-1}c''d'd'') = z(tr(c'c''d'd'')),$$

e

$$tr(c'c''d) = tr(c'c''d'x_{n-1}d'') = z(tr(c'c''d'd'')).$$

In questo modo

$$tr(cx_ndx_n) = tr(x_ncx_nd)$$

come richiesto. □

Si ottiene poi una famiglia a un parametro di tracce, definita su una famiglia a un parametro di algebre, grazie al seguente risultato:

**Teorema 4.4.3.** *Per ogni  $z \in \mathbb{C}^*$ , esiste un'unica funzione traccia*

$$tr : \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n(q) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (4.18)$$

*tale che:*

- $tr(1) = 1$ ;
- $tr(ab) = tr(ba)$ ;
- $tr$  è una funzione  $\mathbb{C}$ -lineare;
- $tr(ux_{n-1}v) = z[tr(uv)]$ ,  $\forall u, v \in \mathcal{H}_{n-1}(q)$ .

*Osservazione 5.* Ricordando l'isomorfismo  $f : B_n \rightarrow \mathcal{H}_n$ , introdotto nel paragrafo 4.2, la seconda proprietà della funzione traccia permette di affermare che  $tr \circ f$  è invariante sulle classi di  $B_n$ .

# Capitolo 5

## L'algebra di Birman-Murakami-Wenzl

L'algebra di Birman-Murakami-Wenzl [8], [22], denotata con  $\mathcal{C}_n$ , può essere utilizzata per costruire la rappresentazione regolare e irriducibile del gruppo delle trecce. Lo studio di  $\mathcal{C}_n$  porta a trovare un legame (intuito per primo da Zinno [27]) tra questa rappresentazione e la rappresentazione di Lawrence-Krammer: le due rappresentazioni, infatti, coincidono *sotto opportune condizioni algebriche e di normalizzazione*. Tale identificazione implica che la rappresentazione di Lawrence-Krammer del gruppo delle trecce è irriducibile.

### 5.1 Definizione e proprietà

**Definizione 5.1.** L'algebra BMW, denotata con  $\mathcal{C}_n(l, m)$ ,  $l, m \in \mathbb{C}$ , si costruisce mediante generatori invertibili  $G_1, G_2, \dots, G_{n-1}$ , che soddisfano le relazioni

$$G_i G_j = G_j G_i, \quad |i - j| \geq 2 \quad (5.1)$$

$$G_i G_{i+1} G_i = G_{i+1} G_i G_{i+1} \quad (5.2)$$

e mediante elementi non invertibili  $E_i$ , dati dalle combinazioni:

$$G_i + G_i^{-1} = m(1 + E_i). \quad (5.3)$$

Valgono inoltre le relazioni:

$$\begin{aligned}
E_i E_{i\pm 1} E_i &= E_i \\
G_{i\pm 1} G_i E_{i\pm 1} &= E_i G_{i\pm 1} G_i = E_i E_{i\pm 1} \\
G_{i\pm 1} E_i G_{i\pm 1} &= G_i^{-1} E_{i\pm 1} G_i^{-1} \\
G_{i\pm 1} E_i E_{i\pm 1} &= G_i^{-1} E_{i\pm 1} \\
E_{i\pm 1} E_i G_{i\pm 1} &= E_{i\pm 1} G_i^{-1} \\
G_i E_i &= E_i G_i + l^{-1} E_i \\
E_i G_{i\pm 1} E_i &= l E_i \\
E_i^2 &= [m^{-1}(l + l^{-1}) - 1] E_i \\
G_i^2 &= m(G_i + l^{-1} E_i) - 1
\end{aligned}$$

L'algebra BMW si può anche rappresentare come il quoziente tra  $\mathbb{C}[B_n]$  e un opportuno sottogruppo di  $B_n$ , rispetto alle relazioni:

$$e_i G_i = m^{-1} e_i \quad (5.4)$$

$$e_i G_{i-1}^{\pm 1} e_i = m^{\pm 1} e_i, \quad (5.5)$$

avendo posto

$$e_i = (l + l^{-1})(G + G^{-1}) \in \mathbb{C}[B_n]$$

$$l^4 \neq 1, \quad m^4 \neq 1.$$

Wenzl ha studiato la struttura algebrica e le rappresentazioni di  $\mathcal{C}_n(l, m)$ , dimostrando in particolare:

**Proposizione 5.1.1.**  $\mathcal{C}_n(l, m)$  è semisemplice, per  $l$  ed  $m$  generici.

Si osserva che il termine “generici” sta a indicare che  $l$  non è una radice dell'unità immaginaria  $i$  e  $im$  non è una potenza intera di  $-il$ .

Indicato con  $|\lambda|$  il numero di celle di un diagramma di Young  $\lambda$ , vale la seguente:

**Proposizione 5.1.2.** I  $\mathcal{C}_n(l, m)$  – moduli, irriducibili e finito-dimensionali, sono indicizzati dai diagrammi di Young  $\lambda$ , tali che  $|\lambda| \leq n$  e  $|\lambda| \equiv n \pmod{2}$ .



I  $\mathcal{C}_n(l, m)$  – moduli irriducibili corrispondenti a  $\lambda$  si denotano con  $V_{n,\lambda}$ . Come si vedrà nel paragrafo successivo, componendo la proiezione naturale  $B_n \subset \mathbb{C}[B_n] \rightarrow \mathcal{C}_n(l, m)$  con l'azione di  $\mathcal{C}_n(l, m)$  su  $V_{n,\lambda}$ , si ottiene la rappresentazione regolare di  $B_n$ .

In [8] si trova dimostrazione del fatto che  $\mathcal{C}_n(l, m)$  è finito-dimensionale, con dimensione è limitata inferiormente da  $n!$ . Più precisamente  $\dim \mathcal{C}_n(l, m) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n - 1)$ .

Si definisce anche una funzione traccia  $tr'$  sull'algebra BMW, che gode di alcune significative proprietà. Posto  $g_i = l^{-1}G_i$ ,  $1 \leq i \leq n - 1$ ,  $z^{-1} = m^{-1}(l + l^{-1}) - 1$  e denotata con  $\mathcal{W}_{n-1}$  la sottoalgebra di  $\mathcal{C}_n(l, m)$  generata da  $g_1, g_2, \dots, g_{n-1}$ , vale il seguente:

**Teorema 5.1.3.** *L'algebra  $\mathcal{C}_n(l, m)$  supporta una funzione traccia*

$$tr' : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathbb{C}, \quad (5.6)$$

*tale per cui:*

- $tr'(a + b) = tr'(a) + tr'(b)$ ;
- $tr'(ab) = tr'(ba)$ ;
- $tr'(1) = 1$ ,  $1 \in \mathcal{C}_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ;
- $tr'(wg_n^{\pm 1}) = tr'(wE_n) = z[tr(w)]$ ,  $w \in \mathcal{W}_{n-1}$ .

Birman e Wenzl [8] espongono una dimostrazione molto dettagliata del precedente teorema. Si noti che l'ultima proprietà lega la traccia  $tr'$  alla traccia  $tr$ , definita sull'algebra di Hecke e trattata nel capitolo precedente. Questo fatto si giustifica grazie al risultato che esprime il legame tra l'algebra di Hecke e l'algebra BMW. Assumendo come parametri dell'algebra di Hecke  $q_1 = l$  e  $q_2 = m$  e ponendo  $\mathcal{H}'_n = \mathcal{C}_n E_n \mathcal{C}_n$ , vale infatti il seguente:

**Teorema 5.1.4.** *L'algebra  $\mathcal{C}(l, m)$  è rappresentabile come somma diretta tra  $\mathcal{H}_n(l, m)$  e  $\mathcal{H}'_n(l, m)$ ; cioè*

$$\mathcal{C}_n(m, l) = \mathcal{H}_n(l, m) \oplus \mathcal{H}'_n(l, m). \quad (5.7)$$

*Osservazione 6.*  $\mathcal{H}'_n(l, m)$  è un'algebra su  $\mathbb{C}[l, \alpha]$ , dove il vincolo sui parametri  $\alpha + \alpha^{-1} = m$  si ricava in modo induttivo dall'inclusione naturale  $\mathcal{C}_{n-2} \subset \mathcal{C}_{n-1}$ .

Grazie a questo risultato, si estende l'isomorfismo  $f : B_n \rightarrow \mathcal{H}_n$ , dato nella proposizione 4.2.1, a  $\mathcal{W}_{n-1}$ , ottenendo

$$f' : B_n \rightarrow \mathcal{W}_{n-1} \rightarrow \mathcal{H}_n, \quad (5.8)$$

che si realizza mediante

$$\sigma_i \mapsto g_i \mapsto x_i. \quad (5.9)$$

Si ha così che  $\mathcal{C}_n(l, m)$  contiene una sottoalgebra isomorfa all'algebra di Hecke e un sottospazio invariante sotto la moltiplicazione sinistra per una treccia standard, sul quale si costruisce una rappresentazione irriducibile - come mostrato nel paragrafo successivo.

Si noti infine che dal calcolo della dimensione per  $\mathcal{C}_n(l, m)$ , si ritrova che la dimensione di  $\mathcal{H}_n(l, m)$  è  $n!$ , come affermato nel teorema 4.1.1.

## 5.2 Legame con la rappresentazione di Lawrence-Krammer

Nel terzo capitolo si è presentata la rappresentazione di Lawrence-Krammer e la dimostrazione della sua fedeltà ricorrendo a una costruzione puramente topologica, dovuta a Bigelow.

Zinno [27] presenta la costruzione algebrica di una rappresentazione regolare e irriducibile sull'algebra BMW, mediante l'introduzione di un opportuno sottospazio, invariante per moltiplicazione a sinistra per una treccia standard.

Nonostante la diversa natura delle due trattazioni, Zinno dimostra che le due rappresentazioni coincidono. L'obiezione più giustificata può riguardare la natura e l'utilizzo dei due parametri complessi su cui sono costruite le rappresentazioni: nelle dimostrazioni di Zinno i parametri sembrano essere

coinvolti senza particolare attenzione ad esempio al campo di appartenenza e vengono introdotti cambiamenti di indici vettoriali e opportuni riscalamanti. L'autore stesso ammette di essersi preso alcune libertà con l'indicizzazione dei vettori e delle trecce, giustificandole in quanto non comportano perdita di generalità. Va ricordato che la rappresentazione di Lawrence-Krammer si basa sulla scelta dei parametri  $q$  e  $t$ , da intendersi come generatori del gruppo libero  $F_2$ , su cui agisce la mappa  $\phi$ , come si è visto nel primo paragrafo del terzo capitolo. I parametri  $l$  e  $m$  della rappresentazione dell'algebra BMW, introdotti in questo capitolo, hanno l'unico vincolo di appartenenza al campo complesso (si tratta però di parametri di "deformazione", che emergono appunto quando si deforma l'algebra di gruppo  $\mathbb{C}S_n$ ). Non si può evidenziare, dunque, una reale identificabilità tra le due coppie, tuttavia Zinno sottolinea il fatto che i parametri usati da Bigelow altro non sono che una specializzazione dei parametri  $m$  e  $l$ , legata alla natura topologica della costruzione. Si noti che le considerazioni seguenti partono dalla costruzione dell'algebra BMW come opportuno quoziente di  $\mathbb{C}[B_n]$ .

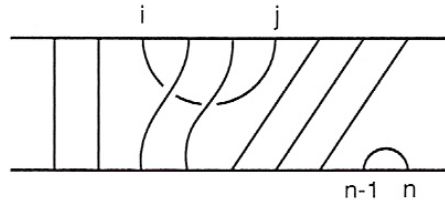
Il prossimo teorema stabilisce esplicitamente il legame tra la rappresentazione di Lawrence-Krammer e l'algebra BMW:

**Teorema 5.2.1.** *La rappresentazione di Lawrence-Krammer del gruppo delle trecce è identica<sup>1</sup> alla rappresentazione irriducibile di dimensione  $(n-2) \times 1$  dell'algebra  $\mathcal{C}_n(l, m)$ .*

La dimostrazione si articola in vari punti, alcuni dei quali piuttosto complessi.

In primo luogo bisogna costruire la rappresentazione citata dell'algebra BMW, introducendo un vettore  $v$ , che corrisponde all'indice di treccia  $n-2$ , cioè al generatore standard  $\sigma_{n-2}$ . Dunque, un elemento  $v \in V_{n-2, \lambda} \subset H_{n-2}$  può essere espresso come combinazione lineare di elementi di  $\mathcal{C}_n$ , utilizzando i generatori  $G_1, G_2, \dots, G_{n-1}$ .

<sup>1</sup>Sotto condizioni algebriche che legano i parametri: si veda la dimostrazione che segue.

Figura 5.1: Generico elemento  $T_{ij}$ 

Si noti che  $v$  gode della seguente proprietà:

$$G_i v = \kappa v, \quad \forall i \leq n-1, \quad (5.10)$$

dove  $\kappa \in \mathbb{C}$  rappresenta l'autovalore associato al vettore  $v$ .

Si introduce poi un sottospazio  $C$  di  $\mathcal{C}_n(m, l)$  - il candidato di cui si mostrerà l'invarianza, generato dai vettori

$$T_{ij} \doteq \left( \prod_{k=i}^{j-2} G_k \right) \left( \prod_{l=j-1}^{n-1} E_l \right) v = G_i \dots G_{j-2} E_{j-1} E_j \dots E_{n-1} v, \quad 1 \leq i \leq j \leq n, \quad (5.11)$$

che si dimostreranno costituire una base del sottospazio  $C$  (raffigurato combinatoricamente in Figura 5.1). Si vuole determinare come tali vettori agiscono sotto un'azione sinistra dei generatori standard del gruppo delle trecce. I generatori di Artin per il gruppo delle trecce,  $\sigma_i$ , sono mappati in  $\mathcal{C}_n$  dall'applicazione  $\sigma_i \mapsto G_i$ . Per il nostro scopo, tale mappa deve essere opportunamente modificata:  $\sigma_i \mapsto G_i / \kappa$ . Si considerano quattro differenti tipi di moltiplicazione - tre delle quali generano delle sottomoltiplicazioni, dipendenti dall'ordine degli indici:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \sigma_i T_{i,i+1} \\ 2) \sigma_i T_{jk}, \quad \{i, i+1\} \cap \{j, k\} = \emptyset \\ 3) \sigma_i T_{i+1,j} \\ 4) \sigma_i T_{ij} \end{array} \right. \quad (5.12)$$

Si mostrerà che queste azioni definiscono una rappresentazione per l'algebra  $\mathcal{C}_n(l, m)$ ; per ognuna di esse, si mapperà  $\sigma_i \mapsto G_i / \kappa$  e si espanderà  $T_{ij}$  come

definito nella (5.11). L'espressione ottenuta sarà opportunamente semplificata, grazie alle relazioni, date nella definizione 5.1.

Per calcolare i prodotti specificati, torneranno utili anche due lemmi che consentono di accelerare, seppur minimamente, i calcoli.

**Lemma 5.2.2.**  $E_i G_{i+1} = E_i E_{i+1} G_i^{-1}$

**Lemma 5.2.3.**  $E_{i-2} G_i E_{i-1} E_i = E_{i-2} E_{i-1} G_{i-2} E_i$

1)

$$\sigma_i T_{i,i+1} = \kappa^{-1} G_i (E_i E_{i+1} \dots E_{n-1} v) = \kappa^{-1} l^{-1} E_i \dots E_{n-1} v = k^{-1} l^{-1} T_{i,i+1} \quad (5.13)$$

L'espressione formale di  $T_{jk}$  obbliga a distinguere l'azione sinistra in base all'ordine degli indici  $i$ ,  $j$  e  $k$ .

2) Se  $i + 1 < j, k$ :

$$\begin{aligned} \sigma_i T_{jk} &= \kappa^{-1} G_i (G_j \dots G_{k-2} E_{k-1} \dots E_{n-1} v) \\ &= \kappa^{-1} (G_j \dots G_{k-2} E_{k-1} \dots E_{n-1}) G_i v \\ &= \kappa^{-1} (G_j \dots G_{k-2} E_{k-1} \dots E_{n-1}) (\kappa v) = T_{jk} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Se  $j < i < i + 1 < k$ :

$$\begin{aligned} \sigma_i T_{jk} &= \kappa^{-1} G_i (G_j \dots G_i \dots G_{k-2} E_{k-1} \dots E_{n-1} v) \\ &= \kappa^{-1} G_j \dots G_{i-2} G_i G_{i-1} G_i G_{i+1} \dots G_{k-2} E_{k-1} \dots E_{n-1} v \\ &= \kappa^{-1} G_j \dots G_{i-2} G_{i-1} G_i G_{i-1} G_{i+1} \dots G_{k-2} E_{k-1} \dots E_{n-1} v \\ &= \kappa^{-1} G_j \dots G_{i-2} G_{i-1} G_i G_{i+1} \dots G_{k-2} E_{k-1} \dots E_{n-1} (G_{i-1} v) \\ &= \kappa^{-1} G_j \dots G_{k-2} E_{k-1} \dots E_{n-1} (\kappa v) = T_{jk} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Se  $j < k < i$ :

$$\begin{aligned} \sigma_i T_{jk} &= \kappa^{-1} G_i (G_j \dots G_{k-2} E_{k-1} \dots E_i \dots E_{n-1} v) \\ &= \kappa^{-1} G_j \dots G_{k-2} E_{k-1} \dots E_{i-2} G_i E_{i-1} E_i \dots E_{n-1} v \\ &= \kappa^{-1} G_j \dots G_{k-2} E_{k-1} \dots E_{n-1} G_{i-2} v \\ &= \kappa^{-1} G_j \dots G_{k-2} E_{k-1} \dots E_{n-1} (\kappa v) = T_{jk} \end{aligned} \quad (5.16)$$

3) Se  $i + 1 < j$  si ottengono nuovi indici per  $T$ :

$$\sigma_i T_{i+1,j} = \kappa^{-1} G_i(G_{i+1} \dots G_{j-2} E_{j-1} \dots E_{n-1} v) = \kappa^{-1} T_{ij} \quad (5.17)$$

Se  $j < i$ :

$$\begin{aligned} \sigma_i T_{j,i+1} &= \kappa^{-1} G_i(G_j \dots G_{i-1} E_i \dots E_{n-1} v) \\ &= \kappa^{-1} G_j \dots G_{i-2} G_i G_{i-1} E_i \dots E_{n-1} v \\ &= \kappa^{-1} G_j \dots G_{i-2} E_{i-1} E_i \dots E_{n-1} v = \kappa^{-1} T_{ji} \end{aligned} \quad (5.18)$$

4) Per l'ultima azione, il calcolo non dipende solo dall'ordine degli indici, ma anche dalle relazioni quadratiche in  $\mathcal{C}_n(l, m)$ .

Se  $i + 1 < j$

$$\begin{aligned} \sigma_i T_{ij} &= \kappa^{-1} G_i(G_i \dots G_{j-2} E_{j-1} \dots E_{n-1} v) \\ &= \kappa^{-1} (mG_i + ml^{-1}E_i - 1)G_{i+1} \dots G_{j-2} E_{j-1} \dots E_{n-1} v \\ &= \kappa^{-1} (mT_{ij} - T_{i+1,j} + ml^{-1}E_i G_{i+1} \dots G_{j-2} E_{j-1} \dots E_{n-1} v) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Ora, applicando il lemma 5.2.2:

$$\begin{aligned} E_i G_{i+1} G_{i+2} \dots G_{j-2} E_{j-1} \dots E_{n-1} v &= E_i E_{i+1} G_i^{-1} G_{i+2} \dots G_{j-2} E_{j-1} \dots E_{n-1} v \\ &= E_i E_{i+1} G_{i+2} \dots G_{j-2} E_{j-1} \dots E_{n-1} (G_i^{-1} v) \\ &= E_i E_{i+1} G_{i+2} \dots G_{j-2} E_{j-1} \dots E_{n-1} (\kappa^{-1} v) \end{aligned} \quad (5.20)$$

A questo punto si ha, attraverso successive applicazioni del lemma 5.2.2, utili a scrivere  $T$  nella forma standard:

$$\sigma_i T_{ij} = m\kappa^{-1} T_{ij} - \kappa^{-1} T_{i+1,j} + ml^{-1} \kappa^{i-j+1} T_{i,i+1} \quad (5.21)$$

Se  $j < i$ :

$$\begin{aligned} \sigma_j T_{ji} &= \kappa^{-1} G_i(G_j \dots G_{i-2} E_{i-1} \dots E_{n-1} v) \\ &= \kappa^{-1} G_j \dots G_{i-2} G_i E_{i-1} E_i \dots E_{n-1} v \\ &= \kappa^{-1} G_j \dots G_{i-2} G_{i-1}^{-1} E_i \dots E_{n-1} v \\ &= \kappa^{-1} G_j \dots G_{i-2} (m + mE_{i-1} - G_{i-1}) E_i \dots E_{n-1} v \\ &= \kappa^{-1} (mT_{ij} - T_{j,i+1} + mG_j \dots G_{i-2} E_i \dots E_{n-1} v) \end{aligned} \quad (5.22)$$

In definitiva, dal momento che  $E_i \dots E_{n-1} v = T_{i,i+1}$ , si ha:

$$\begin{aligned} \sigma_i T_{ji} &= \kappa^{-1} (m T_{ji} - T_{j,i+1} + m \kappa^{i-1-j} T_{i,i+1}) \\ &= m \kappa^{-1} T_{ji} - \kappa^{-1} T_{j,i+1} + m \kappa^{i-j-2} T_{i,i+1} \end{aligned} \quad (5.23)$$

I vettori trovati, generatori indipendenti di  $C$ , conferiscono dunque al sottospazio la proprietà di essere invariante, e di avere dimensione  $\binom{n}{2}$ ; un'azione dei generatori del gruppo delle trecce su tale insieme individua una rappresentazione del gruppo delle trecce stesso, che è descritta dall'azione  $T_{ij} \mapsto \sigma_i T_{ij}$ . Come già osservato, questa rappresentazione dipende da due parametri complessi  $m$  ed  $l$ . L'autovalore  $\kappa$  non è un parametro "indeterminato" nello stesso senso di  $m$  ed  $l$ , essendo una quantità specifica, associata al vettore  $v$  e al generatore  $G_i$ .

Si può ora dimostrare che il sottospazio  $C$  altro non è che  $V_{n,\lambda}$  :

**Teorema 5.2.4.** *Il sottospazio  $C$  coincide con  $V_{n,\lambda}$ , cioè lo spazio dei  $\mathcal{C}_n(l, m)$ -moduli irriducibili, corrispondenti a  $\lambda$ .*

*Dimostrazione.*  $v \in V_{n-2,\lambda}$  quindi  $T_{n-1,n} = E_{n-1} v \in V_{n,\lambda}$ . Se  $p \in V_{n-2,\lambda}$  è elemento idempotente<sup>2</sup> minimo, allora  $p E_{n-1}$  è elemento idempotente minimo di  $V_{n,\lambda}$ . In questo caso, siccome  $V_{n-2,\lambda}$  è monodimensionale, l'elemento idempotente minimo  $p$  è un multiplo scalare di  $v$ . Si conclude che  $v E_{n-1}$  è elemento minimo idempotente di  $V_{n,\lambda}$ .  $\square$

Questo completa la descrizione della rappresentazione irriducibile dell'algebra BMW.

Ricordando le relazioni (3.6), si dimostra infine che:

**Teorema 5.2.5.** *Con le identificazioni*

$$q = -\kappa^2, \quad m = \kappa(1 - q), \quad l = \kappa t q^2 \quad (5.24)$$

---

<sup>2</sup>Un elemento idempotente è una soluzione dell'equazione  $x^2 = x$ .

e

$$v_{ij} = \kappa^{i+1}T_{ij}, \quad (5.25)$$

le azioni descritte dalla (5.12) e dalla (3.6) coincidono, a meno di un opportuno riordinamento degli indici.

*Dimostrazione.* Si riscalano gli indici, imponendo  $v_{ij} = \kappa^{i+j+k}T_{ij}, \forall k$ ; data l'arbitrarietà di  $k$ , si assume, per semplicità,  $k = 0$ .

$$\sigma_i v_{jk} = \kappa^{k+1} \sigma_i T_{jk} = v_{jk} \quad (5.26)$$

Se  $i + 1 < j$ :

$$\begin{aligned} \sigma_i v_{ij} &= \kappa^{i+j} \sigma_i T_{ij} = m \kappa^{i+j-1} T_{ij} - \kappa^{i+j-1} T_{i+1,j} + m l^{-1} \kappa^{2i+1} T_{i,i+1} \\ &= (1-q) \kappa^{i+j} T_{ij} - \kappa^{i+j-1} T_{i+1,j} + \kappa^2 (1-q) t q^2 \kappa^{2i+1} T_{i,i+1} \\ &= (1-q) v_{ij} - \kappa^2 v_{i+1,j} + \kappa^2 (1-q) t q^2 v_{i,i+1} \\ &= (1-q) v_{ij} + q v_{i+1,j} + t (q^2 - q) v_{i,i+1}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\sigma_i v_{i+1,j} = \kappa^{i+j-1} \sigma_i T_{i+1,j} = \kappa^{i+j} T_{ij} = v_{ij} \quad (5.28)$$

Se  $j < i$ :

$$\begin{aligned} \sigma_i v_{ji} &= \kappa_{i+j} \sigma_i T_{ji} = m \kappa^{i+j-1} T_{ji} - \kappa i + j - 1 t_{j,i+1} + m \kappa^{2(i-1)} T_{i,i+1} \\ &= (1-q) \kappa^{i+j} T_{ji} - \kappa^{i+j-1} T_{j,i+1} + (1-q) \kappa^{2i-1} T_{i,i+1} \\ &= (1-q) v_{ji} - \kappa^{-2} v_{j,i+1} + \kappa^{-2} (1-q) v_{i,i+1} \\ &= (1-q) v_{ji} + q v_{j,i+1} + (q^2 - q) v_{i,i+1} \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \sigma_i v_{i,i+1} &= \kappa^{2i+1} \sigma_i T_{i,i+1} \\ &= \kappa^{2i+1} t q^2 T_{i,i+1} = t q^2 v_{i,i+1} \end{aligned} \quad (5.30)$$

La dimostrazione è del tutto analoga, imponendo  $k = n + 1$ ; in questo modo gli esponenti variano da  $-(n - 2)$  a  $(n - 2)$ .  $\square$

Dal teorema fondamentale seguono due corollari immediati, vale a dire:

**Corollario 5.2.6.** *La rappresentazione di Lawrence-Krammer è irriducibile.*

**Corollario 5.2.7.** *La rappresentazione regolare dell'algebra BMW è fedele.*



## Capitolo 6

# Invarianti polinomiali dei nodi

Dopo alcuni richiami di carattere generale sulle relazioni tra trecce e topologia dei nodi, si introdurranno due polinomi a due variabili, costruiti rispettivamente a partire dalle tracce sulle algebre di Hecke e di Birman-Murakami-Wenzel: il polinomio HOMFLY e il polinomio di Kauffman. Del secondo invariante si descriverà anche la costruzione combinatorica originaria, basata sulle skein relations.

Si concluderà cercando di dare un'interpretazione originale del legame tra i due invarianti - del quale poco viene specificato in letteratura - ed evidenziando anche il ruolo della rappresentazione di Lawrence-Krammer.

### 6.1 Nodi come chiusure di trecce

Un *nodo*  $K$  in  $\mathbb{R}^3$  (o nella 3-sfera  $S^3$ ) è una varietà liscia e chiusa monodimensionale, regolarmente immersa. I nodi possono essere orientati. Un *link*, o nodo a più componenti, è l'unione disgiunta di un numero finito di nodi in  $\mathbb{R}^3$  ( $S^3$ ). Nel seguito si intenderà con nodo un oggetto a più componenti.

Si dice *isotopia ambientale* tra due nodi orientati  $K$  e  $K'$  un diffeomorfismo  $\varrho : S^3 \rightarrow S^3$  di grado 1, tale che  $K \mapsto K'$  e  $\varrho|_{K'}$  ha grado 1 su ogni componente. Si indica con  $\mathcal{L}$  la classe di isotopia ambientale di nodi orientati, nel senso appena precisato.

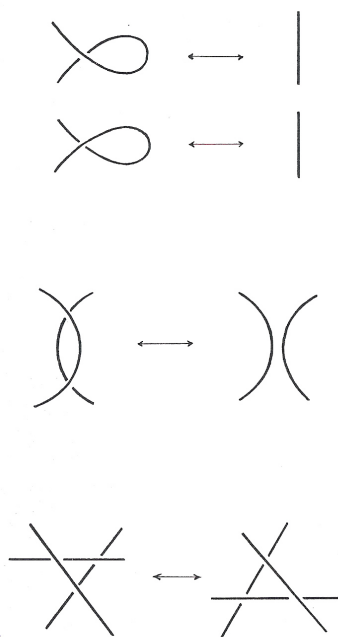


Figura 6.1: Le azioni di Reidemeister

La *proiezione* di un nodo è una immersione generica nel piano dell'unione disgiunta e finita di cerchi. Ad esempio, se  $K \subset R^3$  è un nodo, una proiezione affine  $p$  di  $K$  su un piano  $V \subset R^3$  da una proiezione del nodo, se  $p|_K$  è un'immersione.

Si può definire la classe di isotopia ambientale di un nodo attraverso una qualsiasi sua proiezione, scegliendo per ogni punto di attraversamento il ramo che passa sopra all'altro.

Un *diagramma* del nodo è una proiezione, con la scelta di un attraversamento superiore o inferiore, in corrispondenza di ogni punto doppio (i punti tripli o incroci di ordine superiore non sono ammessi). Un diagramma si ha nel momento in cui la classe di isotopia ambientale è ben definita e ogni classe si ottiene in questo modo. Molti diagrammi diversi possono dar luogo a nodi isotopi; si risolve l'ambiguità definendo le azioni di Reidemeister (Figura 6.1), che coinvolgono porzioni di nodi regolarmente immerse in dischi, lasciando invariati i diagrammi al di fuori di questi dischi.

Figura 6.2:  $K_+$ ,  $K_-$  e  $K_0$ 

**Teorema 6.1.1.** *I diagrammi di due nodi orientati rappresentano nodi orientati ambientalmente isotopi se e solo se uno può essere trasformato nell'altro attraverso una sequenza finita di azioni di Reidemeister.*

Si dice che tre nodi orientati  $K_+$ ,  $K_-$  ed  $K_0$  sono tra loro legati da *skein relations* se i loro diagrammi sono identici, fatta eccezione per un intorno di un punto di attraversamento, in corrispondenza del quale si presentano come in Figura 6.2.

Un *invariante dei nodi* è ricavabile da una procedura enumerativa che permette di associare ad un nodo un numero o un polinomio, in modo tale che due nodi isotopi abbiano lo stesso invariante. La giustificazione di tale costruzione combinatorica si basa su:

**Teorema 6.1.2.** *Assegnato un anello commutativo  $A$ , un invariante dei nodi  $P : \mathcal{L} \rightarrow A$  è un invariante lineare, rispetto alle skein relations se:*

- $P(\bigcirc) = 1$ , dove  $\bigcirc$  denota il non-nodo con una componente;
- esistono tre elementi invertibili  $a_+$ ,  $a_-$  e  $a_0 \in A$ , tali che, se  $K_+$ ,  $K_-$  e  $K_0$  sono skein related, allora  $a_+P_{K_+} + a_-P_{K_-} + a_0P_{K_0} = 0$ .

Questo risultato permetterà di definire un invariante polinomiale dei nodi, dipendente da due variabili  $l$  ed  $m$ , che sarà introdotto nel paragrafo successivo.

Si esamina ora il legame tra nodi e trecce, dovuto sostanzialmente al fondamentale contributo di Alexander.

**Definizione 6.1.** Si dice *treccia chiusa su  $n$ -componenti*, l'unione disgiunta

di cerchi  $D \times S^1$ , le cui frontiere si intersecano in esattamente  $n$  punti.

Trecce chiuse sono equivalenti se possono essere trasformate con continuità, l'una nell'altra.

La chiusura di una treccia è un nodo. Per individuare tale chiusura si può ricorrere a due diverse costruzioni<sup>1</sup>; la prima è di natura algebrica e utilizza il seguente risultato:

**Proposizione 6.1.3.** *Ogni nodo  $K$  è chiusura di una treccia  $\beta \in B_n$ , per qualche  $n$ .*

Segue che, assegnata una treccia geometrica  $\beta$ , si ottiene una treccia chiusa, identificando gli estremi superiori e inferiori di  $\beta$ , in modo ordinato. La seconda costruzione, su cui non ci si sofferma, è di carattere topologico e si basa sulla seguente:

**Proposizione 6.1.4.** *Ogni varietà tridimensionale  $M$  connessa, compatta e orientabile, è il complemento di un nodo  $K$  nella sfera  $S^3$ .*

Nel seguito, si denoterà sempre con  $L$  un nodo ottenuto come chiusura di una treccia.

Sia  $B_\infty$  l'unione disgiunta dei gruppi delle trecce  $B_n$ ,  $n \geq 1$ . Per ogni  $n \geq 1$ , sia  $\xi : B_n \rightarrow B_{n+1}$  la mappa che aggiunge una componente a destra di ogni treccia. Allora:

**Teorema 6.1.5** (di Markov). *Due trecce  $\alpha$  e  $\beta \in B_n$  hanno la stessa chiusura se e solo se si realizzano le seguenti azioni (Markov moves):*

- $\alpha\beta \leftrightarrow \beta\alpha$ ;
- $\beta \leftrightarrow \sigma_n \xi(\beta)$ ;
- $\beta \leftrightarrow \sigma_n^{-1} \xi(\beta)$ .

É possibile definire la stessa mappa  $\xi$  su  $\mathcal{H}_n$  in  $\mathcal{H}_{n+1}$ , in modo che  $x_i \mapsto x_i$ . Una famiglia di mappe  $tr : \mathcal{H}_n \rightarrow R$  definisce un invariante per i nodi se e

<sup>1</sup>Per considerazioni più specifiche e per consultare referenze complete su queste due costruzioni, si veda [11].

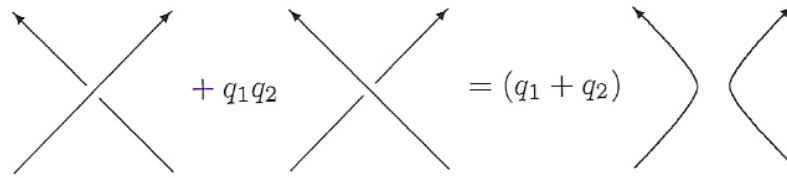


Figura 6.3: Le skein relations per l'algebra di Hecke

solo se valgono:

- $tr(\alpha\beta) = tr(\beta\alpha)$ ;
- $tr(\beta) = tr(x_n\xi(\beta))$ ;
- $tr(\beta) = tr(x_n^{-1}\xi(\beta))$ ,

con  $n \geq 1$  e  $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_n$ . Questa famiglia di mappe prende il nome di *traccia normalizzata di Markov*.

A partire dalle skein relations (Figura 6.3) la terza condizione, verificata dalla traccia normalizzata, si riscrive:

$$(1 + q_1q_2)tr(\beta) = (q_1 + q_2)tr(\xi(\beta)), \quad (6.1)$$

dove  $q_1 + q_2$  è un elemento unità di  $R$ .

Scelta una partizione  $\lambda$  di  $n$ , sia  $b_\lambda$  la treccia su  $k$  componenti ad essa associata. Usando le azioni di Markov e l'equazione (6.1), si ha che ogni traccia normalizzata soddisfa all'equazione:

$$tr(b_\lambda) = \left[ \frac{1 + q_1q_2}{q_1 + q_2} \right]^{k-1} tr(id_1), \quad (6.2)$$

dove  $id_1$  è l'identità in  $\mathcal{H}_1$ .

Si dimostra anche il viceversa, cioè che l'equazione (6.2) definisce una traccia normalizzata di Markov.

## 6.2 Il polinomio HOMFLY

Il polinomio HOMFLY<sup>2</sup> è un invariante rispetto alle azioni di Markov, che si ottiene a partire da una treccia qualsiasi. Una possibile definizione è la seguente:

**Definizione 6.2.** Il polinomio HOMFLY,  $P_L(q_1, q_2)$ , di un nodo orientato  $L$  è la traccia  $tr(\beta)$  di una qualunque treccia  $\beta$ , che ha per chiusura  $L$ , come definito in (6.2).

Si tratta, ora, di operare ricorsivamente, mediante la scelta di opportune variabili, in modo da costruire un polinomio  $P_L(l, m)$ , che sia stabile rispetto alle azioni di Markov. Mediante un riscaldamento delle variabili  $l$  ed  $m$ , si otterrà alla fine il polinomio HOMFLY.

Sia  $k$  un numero complesso, tale che  $tr(kx_i) = tr((kx_i)^{-1})$ . Allora:

$$k^2 tr(x_i) = tr(x_i^{-1})$$

$$k^2 z = tr(q^{-1}x_i + q^{-1} - 1)$$

$$k^2 = \frac{q^{-1}z + q^{-1} - 1}{z}$$

$$k^2 = \frac{1 - z + q}{qz}.$$

Risolvendo rispetto a  $z$ , si ottiene

$$z = -\frac{1 - q}{1 - k^2 q}.$$

Ponendo  $\kappa = k^2$ , si definisce  $f_\kappa : B_n \rightarrow \mathcal{H}_n(q)$ , tale che  $f_\kappa(\sigma_i) = \sqrt{\kappa}$ . Allora:

$$\begin{aligned} tr(f_\kappa(\sigma_i)) &= \sqrt{\kappa} z \\ &= -\sqrt{\kappa} \frac{1 - q}{1 - \kappa q} \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Acronimo costituito dalle iniziali degli scopritori Jim Hoste, Adrian Ocneanu, Ken Millett, Peter Freyd, Ray Lickorish e David Yetter [12].

Si deve definire una mappa  $B_n \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm 1}, \kappa^{\pm 1}]$ , invariante per azioni di Markov.

Si sa che:

$$\text{tr}(f(\omega \cdot \sqrt{\kappa}\sigma_n)) = -\sqrt{\kappa} \frac{1-q}{1-\kappa q} \text{tr}(f(\omega)) = \text{tr}[f(\omega \cdot \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\sigma_n^{-1})],$$

per ogni treccia  $\omega \in B_n$ .

Scelta una treccia chiusa  $X$ , si definisce

$$\begin{aligned} F(X) = F_X(q, \kappa) &= \left( -\frac{1}{\kappa}, \frac{1-\kappa q}{1-q} \right)^{n-1} \text{tr}(f_\kappa(X)) \\ &= \left( -\frac{1}{\kappa}, \frac{1-\kappa q}{1-q} \right)^{n-1} (\sqrt{\kappa})^E \text{tr}(f(X)), \end{aligned}$$

dove  $E$  rappresenta la somma delle componenti di  $X$ .

Attraverso la riparametrizzazione:

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{\kappa}\sqrt{q} \\ m &= \sqrt{q} - \frac{1}{\sqrt{q}} \end{aligned}$$

si ottiene un polinomio di Laurent  $P_L(l, m)$  nelle due variabili  $l$  e  $m$  - dove  $L$  è la chiusura di  $X$  - che soddisfa alla seguente relazione:

$$mP_{L_0} + l^{-1}P_{L_+} - lP_{L_-} = 0,$$

come previsto dal teorema 4.2.2, con le scelte  $a_- = -l$ ,  $a_+ = l^{-1}$ ,  $a_0 = m$ .

Il polinomio HOMFLY nella forma standard si ottiene in realtà mediante un'ulteriore riparametrizzazione, imponendo  $q_1 = il^{-1}$  e  $q_2 = im$ .

Questo polinomio dei nodi gode di alcune importanti proprietà:

- \* Somma connessa:  $P_{L_1 \# L_2} = P_{L_1} \cdot P_{L_2}$ ;
- \* Unione disgiunta:  $P_{L_1 \sqcup L_2} = \frac{q_1^{-1} - q_1}{q_2} [P_{L_1} \cdot P_{L_2}]$ ;
- \*  $P_{\bar{L}} = P_L$ , dove  $\bar{L}$  rappresenta il nodo ottenuto cambiando l'orientazione di tutte le componenti di  $L$ ;
- \*  $P_{\tilde{L}}(q_1, q_2) = P_L(q_1^{-1}, q_2^{-1})$ , dove  $\tilde{L}$  rappresenta il nodo speculare a  $L$ .

Il polinomio HOMFLY è l'invariante più generale che si possa determinare a partire da una rappresentazione di  $B_n$  nell'algebra di Hecke; esso è una generalizzazione del polinomio di Jones - descritto in [16] - e del polinomio di Alexander (trattato, seppur brevemente, nel secondo capitolo).

In particolare, il polinomio di Jones si ottiene per specializzazione delle variabili a:

$$V_L(t) = P_L(-t^{\frac{1}{2}}, t^{\frac{3}{2}}). \quad (6.3)$$

Se  $K$  è un nodo non inteso come chiusura di treccia,  $V_K$  coinvolge solo le potenze intere di  $t$ . Questo polinomio fu originariamente definito come la funzione traccia sull'algebra di Temperley-Lieb (più nota come algebra di Jones<sup>3</sup>). Le costruzioni successive, permettono di ricavare la TL algebra come un opportuno quoziente dell'algebra di Hecke, come osservato in [11].

## 6.3 Il polinomio di Kauffman

Il polinomio di Kauffman è l'analogo del polinomio HOMFLY, ottenuto però dalla rappresentazione di  $B_n$  sull'algebra di Birman-Murakami-Wenzl. Storicamente, il polinomio è precedente allo studio dell'algebra BMW in quanto tale. Seguendo il percorso storico, si presenterà qui la costruzione combinatorica dovuta a Kauffman stesso, mostrando successivamente la relazione con l'algebra  $\mathcal{C}_n$ .

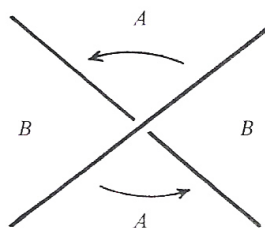
Sia  $K$  un nodo non orientato e si consideri un punto doppio; il piano  $\mathbb{R}^2$  viene ripartito in quattro regioni, che vengono denotate come mostrato in Figura 6.4. Partendo dalla prima zona in alto, si procede in senso antiorario, chiamando con lo stesso nome le regioni opposte.

**Definizione 6.3.** Si dice indicatore per un punto doppio, una scelta di A o B, per questo punto. In termini simbolici, si usa la rappresentazione data in Figura 6.5

---

<sup>3</sup>Si veda, ad esempio, [4].



Figura 6.4: Ripartizione del piano  $\mathbb{R}^2$ 

Uno “stato”<sup>4</sup>  $S$  del nodo  $K$  è la scelta di un indicatore, in corrispondenza di ogni punto doppio di  $K$ .

La proiezione di  $K$  da luogo a un insieme di curve semplici  $\Gamma_S \in S^2$ , tra loro disgiunte; sia  $|S|$  il numero di curve in  $\Gamma_S$ . Si denotano con  $a(S)$  e  $b(S)$  il numero di indicatori A e B, per lo stato  $S$ . Se  $c(K)$  indica il numero di attraversamenti, o di punti doppi del nodo  $K$ , il numero degli stati per  $K$  è pari a  $2^{c(K)}$ . Kauffman ha inizialmente individuato un polinomio  $\langle K \rangle \in \mathbb{Z}[A, B, d]$ , dato da:

$$\langle K \rangle = \sum_S A^{a(S)} B^{b(S)} d^{|S|-1}. \quad (6.4)$$

La somma si realizza su tutti i  $2^{c(K)}$  possibili stati.

Il polinomio gode di alcune importanti proprietà:

- $\langle \bigcirc \rangle = 1$ ;
- $\langle \bigcirc \sqcup K \rangle = d \langle K \rangle$ , se  $K$  non è vuoto;
- dato un nodo non orientato  $K$  e scelto un attraversamento  $\times$ , siano  $K_A$  e  $K_B$  i diagrammi ottenuti da  $K$  collegando le due regioni A e B in  $\times$ . Allora:  
 $\langle K \rangle = A \langle K_A \rangle + B \langle K_B \rangle$ .

Due risultati, legati al polinomio e di cui non si presenta la dimostrazione, sono i seguenti:

<sup>4</sup>Terminologia usata da Kauffman in analogia a costruzioni combinatoriche in modelli di meccanica statistica.

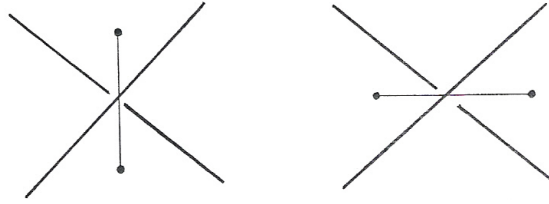


Figura 6.5: Indicatore A e indicatore B

**Proposizione 6.3.1.**  $\langle . \rangle$  è l'unica mappa, definita dalla famiglia dei nodi non orientati a valori in  $\mathbb{Z}[A, B, d]$ , che goda delle proprietà sopra elencate.

**Proposizione 6.3.2.** Posto  $B = A^{-1}$  e  $d = -(A^2 + A^{-2})$ ,  $\langle . \rangle$  è una funzione in  $\mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ , invariante sotto le azioni di Reidemeister.

Indicata con  $w(K)$  la somma dei segni dei punti doppi del nodo  $K$ , il polinomio di Kauffman è:

$$f_K(A) = (-A)^{-3w(K)} \langle K \rangle \quad (6.5)$$

**Proposizione 6.3.3.** Il polinomio (6.5) è invariante per azioni di Reidemeister e quindi è definito su classi di isotopia ambientale.

La precedente proposizione, permette di affermare che il polinomio di Kauffman induce un'applicazione  $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ , tale per cui:

**Teorema 6.3.4.** -  $f(\bigcirc) = 1$ ;

- se  $K_+$ ,  $K_-$  ed  $K_0$  sono skein related, allora:

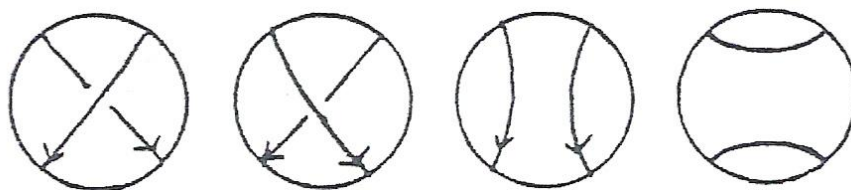
$$A^4 f_{K_+} - A^{-4} f_{K_-} = (A^{-2} - A^2) f_{K_0}. \quad (6.6)$$

Per la dimostrazione si veda [13].

Per mostrare invece il legame tra il polinomio di Kauffman e l'algebra  $\mathcal{C}_n(m, l)$ , è necessario rifarsi alle notazioni usate nel quinto capitolo, in cui sono state definite le proprietà dell'algebra stessa.

Il polinomio (6.4) si riscrive come:

$$P_D(l, m) = l^\varepsilon K_L(l, m), \quad (6.7)$$

Figura 6.6:  $D_+$ ,  $D_-$ ,  $D_0$  e  $D_\infty$ 

dove  $D$  denota il diagramma associato al nodo  $L$  ed  $\varepsilon$  il numero di attraversamenti nel diagramma stesso (si ricordi che i nodi non sono orientati).  $K_L(l, m)$  rappresenta il polinomio nella sua forma definitiva, ma Kauffman si accorse solo successivamente di questo fatto. Egli propose la costruzione del polinomio  $P_D$  e trovò, contrariamente alle sue aspettative, che il polinomio  $K_L$  gode della proprietà di invarianza.

Si noti come  $P_D$  non sia un invariante dei nodi, nel momento in cui lo è  $K_L$ : considerando due diagrammi  $D$  e  $D'$ , associati ai nodi  $L$  e  $L'$ , aggiungendo un laccio banale in  $D'$ , cambia il numero di attraversamenti  $\varepsilon'$ ; si ha infatti che:

$$P_{D'}(l, m) = lP_D(l, m). \quad (6.8)$$

Così, applicando ad esempio le azioni di Markov,  $K_L$  è invariante, ma  $P_D$  non lo è.

Si denotano, ora, con  $D_+$ ,  $D_-$ ,  $D_0$  e  $D_\infty$  quattro diagrammi identici, fatta eccezione per un disco, nel quale si presentano come in Figura 6.6. I polinomi  $P_{D_+}$ ,  $P_{D_-}$ ,  $P_{D_0}$  e  $P_{D_\infty}$  associati, sono legati dalla seguente formula:

$$P_{D_+}(l, m) + P_{D_-}(l, m) = m[P_{D_0}(l, m) + P_{D_\infty}(l, m)]. \quad (6.9)$$

Si ricordano due ulteriori proprietà di  $P_D$ :

a)

$$P_D(l, m) = 1, \quad (6.10)$$

se  $D$  è un cerchio;

b)

$$P_D(l, m) = P_{D'}(l, m), \quad (6.11)$$

se  $L$  e  $L'$  sono ambientalmente isotopi nel piano.

Le formule (6.8) - (6.11) sono da considerarsi “assiomi” che permettono di individuare in modo univoco il polinomio  $P_D(l, m)$  per ogni diagramma. Aggiungendo la relazione (6.7) si definisce il polinomio di Kauffman  $K_L(l, m)$  per tutti i nodi.

Per esprimere il polinomio in funzione della traccia sull'algebra BMW, si introduce una treccia  $\beta = \sigma_{\mu_1} \sigma_{\mu_2} \dots \sigma_{\mu_r}$ , con chiusura  $L$ ; detto  $D_\beta$  il diagramma associato, il polinomio  $K_{D_\beta}(l, m)$  è essenziale per esprimere la traccia di una combinazione di generatori di  $\mathcal{C}_n(l, m)$ , come segue:

$$\text{tr}'(G_{\mu_1} G_{\mu_2} \dots G_{\mu_r}) = (m^{-1}(l + l^{-1}) - 1)^{1-n} K_{D_\beta}(l, m). \quad (6.12)$$

$K_{D_\beta}(l, m)$  è ben definito sui diagrammi, perciò la traccia risulta ben definita sugli elementi dell'algebra. Quindi, se  $g_i = l^{-1} G_i$ ,  $1 \leq i \leq n - 1$ , allora:

$$\text{tr}'(g_{\mu_1} g_{\mu_2} \dots g_{\mu_r}) = (m^{-1}(l + l^{-1}) - 1)^{1-n} K_L(l, m) \quad (6.13)$$

cioè:

$$K_L(l, m) = (m^{-1}(l + l^{-1}) - 1)^{n-1} \text{tr}'(g_{\mu_1} g_{\mu_2} \dots g_{\mu_r}), \quad (6.14)$$

oppure, ricordando il teorema 5.1.3,

$$K_L(l, m) = z^{1-n} \text{tr}'(w), \quad (6.15)$$

essendo  $w = (g_{\mu_1} g_{\mu_2} \dots g_{\mu_r}) \in \mathcal{W}_{n-1}$ .

Moltiplicando  $w$  per  $g_n$  e per  $g_n^{-1}$  si ottiene:

$$K_L(l, m) = z^{1-n} \text{tr}'(w g_n^{-1} g_n),$$

che per il teorema 5.1.3 si riscrive:

$$K_L(l, m) = z^{1-n} z[\text{tr}(w g_n^{-1})] = z^{2-n}[\text{tr}(\tilde{w})],$$

che è l'espressione del polinomio di Kauffman in termini della traccia sull'algebra di Hecke.

## 6.4 Conclusioni

Come osserva Kauffman [17], il polinomio HOMFLY e il polinomio di Kauffman non sembrano avere alcun legame di tipo algebrico: il primo è definito per i nodi orientati, il secondo per quelli non orientati e le skein relations sono essenzialmente diverse (si vedano infatti le Figure 6.3 e 6.6). Kauffman dimostra però che, sotto opportune ipotesi, il polinomio HOMFLY si scrive anche come “somma pesata” di polinomi di Kauffman.

Ricordando la relazione (5.7), che presenta l'algebra  $\mathcal{C}_n$  come somma diretta  $\mathcal{H}_n \oplus \mathcal{H}'_n$ , sembra corretto affermare che il polinomio HOMFLY è l'invariante ottenuto considerando solo il primo addendo - che è l'algebra di Hecke, appunto; il polinomio di Kauffman si ricava invece dalla traccia, definita su tutta la somma diretta - l'algebra BMW. La decomposizione (5.7) esprime quindi, oltre all'isomorfismo tra l'algebra di Hecke e una sottoalgebra dell'algebra BMW, un legame tra i due invarianti.

Si è dimostrato nel capitolo precedente che la rappresentazione di Lawrence-Krammer è equivalente alla rappresentazione irriducibile dell'algebra BMW: si può dunque affermare che esiste un ulteriore collegamento tra il polinomio di Kauffman e la rappresentazione di Lawrence-Krammer. Se si riscrivono le rappresentazioni nella forma matriciale, la traccia coincide proprio con il carattere delle rappresentazioni<sup>5</sup>; quindi il polinomio di Kauffman si reinterpreta come carattere della rappresentazione regolare e irriducibile dell'algebra BMW. Rappresentazioni equivalenti hanno lo stesso carattere (si noti che il viceversa è falso in questo caso, perchè le rappresentazioni non sono costruite su gruppi finiti, ma su gruppi finitamente generati), e quindi il polinomio di Kauffman è il carattere della rappresentazione di Lawrence-Krammer.

---

<sup>5</sup>Si veda l'appendice A per la definizione.

# Appendice A

## Richiami di teoria delle rappresentazioni

### A.1 Azione di un gruppo su un insieme

**Definizione A.1.** Siano  $G$  un gruppo ed  $M$  un insieme; un'azione di  $G$  su  $M$  è una mappa  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  tale che  $(a, m) \mapsto am$ .

Vale la legge associativa

$$a(bm) = (ab)m$$

e

$$em = m, \forall m \in M$$

con  $e$  elemento neutro del gruppo  $G$ .

Da questa definizione si evince che un'azione di un gruppo  $G$  su un insieme  $M$  è un omomorfismo da  $G$  sull'insieme delle trasformazioni iniettive di  $M$ .

Se  $G$  agisce su  $M$  ed  $m$  è un elemento di  $M$ , si può considerare il sottoinsieme di  $M$ , costituito da elementi della forma  $am$ , al variare di  $a$  in  $G$ . Questo sottoinsieme si dice *orbita* - e si indica con  $G \cdot m$  - di  $m$  sotto l'azione di  $G$  su  $M$ .

Sia assegnato il sottoinsieme  $G_m = \{a \in G | am = m, \forall m \in M\}$  di  $G$ . Se

$am = m$ , risulta evidente che  $a^{-1}m = m$ ; inoltre se  $am = m$  e  $bm = m$  allora  $(ab)m = m$ .  $G_m$  è, perciò, un sottogruppo di  $G$  detto *gruppo di isotropia* di  $m$ .

Ad esempio, considerato il gruppo  $SO(3)$  che agisce su uno spazio euclideo tridimensionale, il gruppo di isotropia di un qualunque  $m \neq 0$  è costituito dalle rotazioni che conservano  $m$ , cioè dal sottogruppo delle rotazioni intorno all'asse, passante per  $m$ . Per  $m \neq 0$ ,  $G_m$  è isomorfo a  $SO(2)$  e consiste delle rotazioni nel piano perpendicolare a  $m$ .

Si supponga da ora in poi che  $G$  sia finito e sia  $\#G$  la sua cardinalità. Scelto  $m \in M$ , l'orbita di  $m$  sotto l'azione di  $G$ , contiene  $\#(G \cdot m)$  elementi. Se  $n$  è un elemento dell'orbita,  $n = am$  per qualche  $a \in G$ . Se  $n = bm$ , allora  $a^{-1}b$  appartiene a  $G_m$ ; questo significa che per ogni elemento  $n$  ci sono esattamente  $\#G_m$  elementi del gruppo che mappano  $m$  in  $n$ . Dal momento che ogni elemento di  $G$  manda  $m$  in un elemento dell'orbita, si ha:

$$\#G = \#(G \cdot m) \cdot \#G_m. \quad (\text{A.1})$$

Se  $M$  ha una sola orbita, si dice che  $G$  agisce *transitivamente* su  $M$ . Ogni volta che si ha un'azione transitiva di un gruppo su un insieme, scegliendo  $m \in M$  si determina una partizione di  $G$  in classi della forma  $aG_m = \{ab, \forall b \in G_m\}$ . Ciascuna classe contiene tanti elementi quanti  $G_m$ . La classe  $aG_m$ , che consiste in tutti gli elementi del gruppo che trasportano  $m$  in  $am$ , può essere identificata con  $am$ . Dal momento che l'azione di  $G$  è transitiva, per ogni elemento  $m \in M$  si trova un elemento  $b \in G$  per cui  $n = bm$ . Indicando con  $G \setminus G_m$  l'insieme delle classi, si può identificare  $M$  con  $G \setminus G_m$ .

Un gruppo  $G$  può agire anche su se stesso attraverso la moltiplicazione a sinistra, in modo che, dati  $a$  e  $b$  si ottiene  $ab$ ; questa azione è sempre transitiva. Per ogni coppia di elementi  $c$  e  $b$ , si trova un elemento  $a = cb^{-1}$ , per cui  $ab = cb^{-1}b = c$ . Il gruppo di isotropia di ogni elemento consiste nella sola identità, poichè  $ab = b$  implica  $a = e$ .

Un ulteriore modo per un gruppo di agire su se stesso è quello per *coniugazione*.

**Definizione A.2.**  $G$  agisce su se stesso per coniugazione se  $a$  mappa  $b$  in  $aba^{-1}$ .

La coniugazione definisce l'azione del gruppo, dal momento che l'azione di  $ac$  su  $b$  risulta:

$$(ac)b(ac)^{-1} = acbc^{-1}a^{-1} = a(cbc^{-1})a^{-1},$$

che corrisponde all'azione di  $c$ , seguita dall'azione di  $a$ .

Le orbite di un gruppo sotto coniugazione sono le *classi di coniugazione* del gruppo. Due elementi  $b$  e  $c$  appartengono alla stessa classe di coniugazione se esiste un elemento  $a$ , tale per cui  $aba^{-1} = c$ .

**Proposizione A.1.1.** *L'identità costituisce una classe di equivalenza.*

*Se  $G$  è un gruppo abeliano ogni elemento costituisce una classe di coniugazione.*

*Dimostrazione.* Chiaramente, per ogni  $a$ ,  $aea^{-1} = e$ .

Se  $G$  è abeliano,  $aba^{-1} = aa^{-1}b = b$ . □

Il gruppo di isotropia  $G_b$  di un elemento  $b$  è costituito dagli elementi  $a$ , tali per cui  $aba^{-1} = b$ .  $e$ ,  $b$  e  $b^{-1}$  soddisfano la precedente uguaglianza.

Poichè il numero di elementi di  $G_b$  si determina dalla A.1, in ogni classe di coniugazione, il numero di elementi è un divisore del numero di elementi del gruppo.

## A.2 Rappresentazioni

**Definizione A.3.** Una rappresentazione  $r$  di un gruppo  $G$  su uno spazio vettoriale  $V$  è un'azione di  $G$  su  $V$ , per cui ogni elemento  $a \in G$  agisce come una trasformazione lineare.

Una mappa

$$\begin{aligned} r(a) : V &\rightarrow V \\ v &\mapsto r(a)v \end{aligned}$$



è una trasformazione lineare, per ogni  $a$ , perciò è una rappresentazione.

La *dimensione*, o *grado*, di una rappresentazione coincide con la dimensione dello spazio vettoriale su cui agisce.

Fissata una base di  $V$ , si può sempre costruire una matrice associata alla rappresentazione. La matrice associata a  $r(a)$  si denota con  $r_{ij}(a)$ . Alcune proprietà delle matrici associate a una rappresentazione sono le seguenti:

1.  $r_{ij}(e) = I$
2.  $r_{ij}(a^{-1}) = r_{ij}^{-1}(a)$
3.  $r_{ij}(ab) = \sum_k r_{ik}(a)r_{kj}(b)$

Assegnate due rappresentazioni  $r$  e  $r'$  del gruppo  $G$  sugli spazi vettoriali  $V$  e  $V'$ :

**Definizione A.4.**  $r$  e  $r'$  sono equivalenti -  $r \sim r'$  - se e solo se esiste una trasformazione lineare non singolare  $T : V \rightarrow V'$ , tale che

$$r'(a)T = Tr(a), \forall a \in G.$$

Un sottospazio  $W \subset V$  si dice *invariante* se  $r(a)W \subset W$ , per ogni  $a \in G$ . Ciò significa che per ogni vettore  $w$  in  $W$  e per ogni  $a$  in  $G$ ,  $r(a)w$  è un vettore di  $W$ . Dal momento che  $r(a^{-1}) = r^{-1}(a)$ , si dice che  $W$  è invariante se e solo se  $r(a)W = W$ .

*Osservazione 7.* Chiaramente, lo spazio  $V$  e il sottospazio banale  $\{0\}$  sono invarianti.

**Definizione A.5.** Una rappresentazione si dice *irriducibile* se ha come unici sottospazi invarianti  $V$  e  $\{0\}$ .

Una restrizione di  $r$  su  $W$  è ancora una trasformazione lineare - che viene indicata con  $r(a)|_W$  - e dunque una rappresentazione, che si dice *sottorappresentazione* di  $r$ .

Dati due spazi vettoriali  $V_1$  e  $V_2$ , lo spazio vettoriale  $Hom(V_1, V_2)$  contiene

tutte le mappe lineari da  $V_1$  a valori in  $V_2$ . Se  $r_1$  ed  $r_2$  sono due rappresentazioni di  $G$  su  $V_1$  e  $V_2$ , si indica con  $Hom_G(V_1, V_2)$  lo spazio delle applicazioni  $G$ -lineari da  $V_1$  a  $V_2$ .  $Hom_G(V_1, V_2) \subset Hom(V_1, V_2)$  ha per elementi le mappe lineari  $T$  per cui  $r_2(a)T = Tr_1(a), \forall a \in G$ . Il risultato principale è il seguente:

**Lemma A.2.1** (di Schur). *Assegnate  $r_1$  ed  $r_2$  rappresentazioni irriducibili del gruppo  $G$ , rispettivamente sugli spazi vettoriali  $V_1$  e  $V_2$  e scelto  $T \in Hom_G(V_1, V_2)$ , allora:*

*se  $r_1 \not\approx r_2$ , allora  $T = 0$ ;*

*se  $r_1 = r_2$ , allora  $T$  è un operatore scalare.*

**Definizione A.6.** Data una rappresentazione  $r$  del gruppo  $G$  sullo spazio  $V$ , si dice carattere della rappresentazione la seguente grandezza:

$$\chi^r(a) = tr[r(a)] = \sum_i r_{ii}(a).$$

Se si sceglie  $a = e$ ,  $r(e)$  risulta essere l'operatore identità e  $\chi^r(e) = \dim V$ .

**Proposizione A.2.2.** *Rappresentazioni con lo stesso carattere sono equivalenti.*

## A.3 Diagrammi di Young

Il metodo dei diagrammi di Young è una costruzione combinatoria che fornisce in particolare una codifica utile per descrivere le rappresentazioni di ogni gruppo simmetrico e per studiarne le proprietà. Introdotti nel Novecento da Alfred Young, essi furono applicati allo studio dei gruppi simmetrici da Georg Frobenius.

Come osservazione preliminare all'utilizzo successivo, si noti che un diagramma di Young è in realtà lo strumento più semplice per costruire partizioni di un numero intero positivo.

**Definizione A.7.** Dato  $n$  un intero positivo, una partizione di  $n$  è una sua scrittura come somma non decrescente di interi positivi

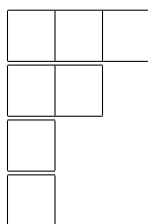
$$n = \sum_{i=0}^m k_i, \text{ con } k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m.$$

La sequenza ha  $m$  addendi (visivamente  $m$  righe), la prima delle quali contiene  $k_1$  celle, la seconda  $k_2$  celle e analogamente fino a  $m$ . Ogni riga è allineata a sinistra e la generica configurazione si denota con  $K = [k_1, k_2, \dots, k_m]$ .

**Definizione A.8.** Si dice partizione coniugata di  $K$  la partizione di  $n$  che consiste nei numeri delle celle delle successive colonne del diagramma.

A ogni diagramma risulta associato il diagramma coniugato, il quale può essere individuato come schema ottenuto riflettendo il diagramma dato, rispetto alla diagonale.

I diagrammi di Young si ottengono collocando in ogni riga numeri positivi non decrescenti - da sinistra verso destra - e in ogni colonna numeri non decrescenti - dall'alto verso il basso. Il diagramma è disegnato con una configurazione di celle di forma quadrata in righe allineate a sinistra; tipiche rappresentazioni dei diagrammi di Young sono, ad esempio, le due seguenti:



Il numero associato ad una cella viene detto anche valore della cella. L'insieme dei valori delle celle di una tabella di Young  $\lambda$  si dice *codominio*.

## A.4 Le rappresentazioni di $S_n$

**Definizione A.9.** Il gruppo simmetrico  $S_n$  è l'insieme di tutte le possibili permutazioni dell'insieme  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Un elemento  $s$  del gruppo simmetrico  $S_n$  può essere scritto nella forma a cicli. Ad esempio  $s \in S_5$  assume la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

che nella scrittura ciclica diventa (omettendo la stringa di riferimento nella prima riga)

$$(132)(45).$$

In generale, data una permutazione  $s \in S_n$ , scritta in forma a cicli, l'elemento  $tst^{-1} \in S_n$  si ottiene rimpiazzando ciascun intero  $i$  nella forma a cicli di  $s$  con  $t(i)$ , mantenendo la struttura a cicli originaria. Viceversa, date  $s_1$  ed  $s_2$  con la stessa struttura a cicli, per la quale esiste una permutazione  $t$  che trasforma l'argomento  $i$  in  $s_1$ , nell'argomento  $t(i)$  in  $s_2$ , si conclude che  $s_2 = ts_1t^{-1}$ . Questo significa che due elementi in  $S_n$  sono *coniugati* se e solo se hanno la medesima struttura a cicli.

*Osservazione 8.* Ogni permutazione ciclica degli argomenti di un singolo ciclo non altera la permutazione stessa e cicli disgiunti possono essere permutati a piacere.

Una classe di coniugazione è data da una stringa di interi  $\nu = [\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n]$ , con  $\nu_1$  numero di 1-cicli,  $\nu_2$  numero di 2-cicli e così via.

Vale inoltre la condizione:  $\nu_1 + 2\nu_2 + \dots + n\nu_n = n$ .

Posto

$$\lambda_1 = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n$$

$$\lambda_2 = \nu_2 + \nu_3 + \dots + \nu_n$$

...

$$\lambda_n = \nu_n,$$

allora  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = n$  e  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ .

$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$  è una partizione dell'intero  $n$ , che viene convenientemente rappresentata con un diagramma di Young, come descritto nelle definizioni A7, A8.

Un *tabloid* di Young, corrispondente al diagramma  $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ , è l'assegnazione di una partizione di  $\{1, 2, \dots, n\}$  in insiemi disgiunti e parzialmente ordinati, per cui il primo contenga  $\lambda_1$  elementi, il secondo  $\lambda_2$  elementi e così via. In poche parole, un tabloid è un metodo per collocare i numeri  $\{1, 2, \dots, n\}$  nelle celle di un diagramma, senza tener conto dell'ordine all'interno di ciascuna riga e senza ripetizioni.

Ad esempio se  $n = 7$ ,  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  si può decomporre in  $\{3, 5, 2\}\{1, 7\}\{4\}\{6\}$ ,  $\{2, 3, 5\}\{7, 1\}\{4\}\{6\}$ ,  $\{3, 5, 2\}\{1, 7\}\{6\}\{4\}$  oppure, in forma grafica:

3	5	2
1	7	
4		
6		

2	3	5
7	1	
4		
6		

3	5	2
1	7	
6		
4		

Un *tableaux* di Young è un assegnamento dei numeri  $\{1, 2, \dots, n\}$  a ciascuna cella di  $\lambda$ , tenendo conto, a differenza di quanto fatto per i tabloid, dell'ordine. Ciascun *tableaux* origina un tabloid, mentre *tableaux*, diversi per una permutazione delle entrate delle loro righe, danno luogo allo stesso tabloid.

## A.5 Formula per le dimensioni

La dimensione di una rappresentazione irriducibile  $r_{(\lambda)}$ , che corrisponde a una partizione  $\lambda$ , è pari al numero di diagrammi di Young distinti, che si possono ottenere a partire dalla rappresentazione. Tale intero si calcola mediante la formula della *length hook*. La *length hook*  $h(x)$  della cella  $x$  è data dalla somma di 1 con il numero di celle che stanno nella stessa riga a destra di  $x$  e il numero delle celle nella stessa colonna al di sotto di  $x$ . La dimensione della rappresentazione è data dalla formula:

$$\dim r_{(\lambda)} = \frac{n!}{\prod_{x \in \lambda} h(x)}.$$

Ad esempio, per le rappresentazioni di  $S_4$ ,

$$\dim r_{(4)} = \frac{4!}{4!} = 1$$

$$\dim r_{(3,1)} = \frac{4!}{4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 3$$

$$\dim r_{(2,2)} = \frac{4!}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 2$$

$$\dim r_{(2,1,1)} = \frac{4!}{4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 3$$

$$\dim r_{(1,1,1,1)} = \frac{4!}{4!} = 1.$$

# Bibliografia

- [1] Stephen Bigelow. *The Burau representation is not faithful for  $n = 5$* .  
Geometry and Topology **3**, 1999.
- [2] Stephen Bigelow. *Homological representations of Braid Groups*.  
PhD Thesis, 2000.
- [3] Stephen Bigelow. *Braid groups are linear*.  
J. Amer. Math. Soc. **14** No. 2, 2001.
- [4] Stephen Bigelow. *The Lawrence-Krammer representation*.  
arXiv:math.GT/0204057 v1, 2002.
- [5] Stephen Bigelow. *Representations of Braid Groups*.  
Proceedings of the ICM, Vol. II, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.
- [6] Stephen Bigelow. *Braid groups and Iwahori-Hecke algebras*.  
arXiv:math.GT/0505064 v1, 2005.
- [7] Joan S. Birman. *Braids, links and mapping class groups*.  
Princeton University Press, Princeton, N.J., 1974, Annals of  
Mathematics Studies, No. 82.
- [8] Joan S. Birman, Hans Wenzl. *Braids, link polynomials and a new algebra*.  
Trans. AMS **313**, No. 1, 1989.
- [9] J.S. Birman, D. Long, J. Moody. *Linear representations of the braid  
groups*.  
Contemporary Mathematics **169**, 1994.

- 
- [10] J. Birman, K. Y. Ko, S. J. Lee. *A new approach to the word and conjugacy problems in the braid groups.*  
Adv. Math. **139**, No. 2, 1998.
- [11] Joan S. Birman, Tara E. Brendle. *Braids: a survey.*  
Handbook of Knot Theory. W. Menasco, M. Thistlethwaite. Elsevier, Amsterdam, 2005. (Oppure: arXiv:math.GT/0409205 v2).
- [12] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, A. Ocneanu. *A New Polynomial Invariant of Knots and Links.*  
Bull. Amer. Math. Soc. **12**, 1985.
- [13] P. de la Harpe, M. Kervaire, C. Weber. *On the Jones Polynomial.*  
L'Enseignement Mathématique **32**, 1986.
- [14] Allen Hatcher. *Algebraic Topology.*  
Cambridge University Press, 2002.
- [15] Craig H. Jackson. *Braid Group Representations.*  
Degree Master of Science Thesis, Graduate School of the Ohio State University, 2001.
- [16] Vaughan F.R. Jones. *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials.*  
Ann. of Math. **126**, 1987.
- [17] Louis H. Kauffman. *Knots and Physics.*  
Series on Knots and Everything - vol. 1, World Scientific, 1991.
- [18] Daan Krammer. *The braid group  $B_4$  is linear.*  
Invent. Math. **142** No. 3, 2000.
- [19] Daan Krammer. *Braid groups are linear.*  
Ann. of Math. (2) **155** No. 1, 2002.
- [20] Ruth Lawrence. *Homological representations of the Hecke algebra.*  
Comm. Math. Phys. **135** No. 1, 1990.



- 
- [21] John Moody. *The Burau representation of the braid group  $B_n$  is not faithful for large  $n$ .*  
Bull. Amer. Math. Soc. **25**, 1991.
- [22] Jun Murakami. *The Kauffman polynomial of links and representation theory.*  
J. Math. **24**, No. 4, 1987.
- [23] Shlomo Strenberg. *Group Theory and Physics.*  
Cambridge University Press, 1994.
- [24] Vladimir Turaev. *Faithful Linear Representations of the Braid Group.*  
arXiv:math.GT/0006202, 2000.
- [25] Vladimir V. Vershinin. *Braids, their properties and generalizations.*  
arXiv:math.GR/0611712 v1, 2006.
- [26] Pierre Vogel. *Représentations et traces des algèbres de Hecke. Polinôme de Jones-Conway.*  
L'Enseignement Mathématique, t. **34**, 1988.
- [27] Matthew Zinno. *On Krammer's Representation of the Braid Group.*  
Math. Ann. **321**, no. 1, 2001.