



Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Anno Accademico 2008-2009

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN MATEMATICA

Un'analisi sui sistemi di Reazione-Diffusione

Relatore
Prof. Andrea Terracina

Laureando
David Sarrocco
Matricola: 1153043

*A Deborah,
Alla mia famiglia,
A Cinzia e Andrea,
Grazie..*

Indice

Introduzione	3
1 Un Teorema di esistenza e unicità	6
1.1 Preliminari	6
1.2 Teorema di esistenza e unicità	12
2 Domini invarianti	16
2.1 Motivazioni	16
2.2 Domini invarianti	17
2.2.1 Una spiegazione “fisica”	19
2.2.2 Il caso dei rettangoli	20
3 Un teorema di confronto	24
3.1 Problemi associati	24
3.2 Teorema di confronto	29
4 Due esempi fisicamente interessanti	32
4.1 Modello Preda-Predatore	32
4.1.1 Alla ricerca di un dominio invariante	33
4.1.2 Applichiamo il confronto	35
4.2 Un Modello di Competizione (scoiattoli rossi vs scoiattoli grigi)	36
4.2.1 Alla ricerca di un dominio invariante 2	36
4.2.2 Applichiamo il confronto 2	37
Bibliografia	39

Introduzione

Lo scopo che ci poniamo in questa tesi è quello di formulare un modello matematico, e una metodologia che permetta la descrizione dell'evoluzione di alcuni tra i più interessanti fenomeni che si presentano in natura. L'equazione che ci accompagna è detta di *reazione-diffusione* ed è della forma

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = D\Delta \mathbf{u} + f(\mathbf{u}), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t > 0 \quad (1)$$

dove $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, D è una matrice $m \times m$ definita positiva (che verrà considerata diagonale), e f è una funzione regolare. Il laplaciano che compare nel secondo membro ci dà un'idea di come l'evoluzione dipenda dalla variazione della quantità \mathbf{u} nello spazio; per tale motivo prende il nome di termine di "diffusione" in combinazione con la matrice D detta appunto matrice di diffusione. Il termine f invece prende il nome di termine di "reazione" o termine "cinetico", in quanto in assenza di diffusione la (1) diventa un'equazione differenziale ordinaria e la f ne definisce la cinetica. L'importanza della (1) (e dei problemi di Cauchy associati) discende dal fatto che a seconda della matrice D e del termine di reazione si possono ottenere equazioni che descrivono le situazioni più differenti, dalla competizione tra specie animali alle applicazioni in finanza matematica, dai modelli preda-predatore alla dinamica degli enzimi. Per prima cosa cerchiamo di capire da dove esca fuori un'equazione di tale specie, ovvero preoccupiamoci di derivarne la forma.

Derivazione.

Consideriamo u essere la densità di una determinata quantità misurabile (per esempio la densità di una popolazione in una determinata regione, o il livello di concentrazione di enzimi o proteine nel sangue), e supponiamo che *la variazione di tale quantità/densità sia dovuta sia a un termine di "produzione locale"* (per esempio la nascita/morte di elementi della popolazione), *sia a un termine di trasporto/fluxo* (per esempio il trasferirsi da una regione all'altra della specie animale). Ovvero considerata una regione dello spazio Ω assumiamo valga la legge di bilancio:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u dV = \int_{\Omega} f dV - \int_{\partial\Omega} J \cdot n dS, \quad (2)$$

dove con f si intende appunto il termine di produzione/distruzione della quantità u , mentre J rappresenta il flusso uscente di tale quantità attraverso la superficie $\partial\Omega$ lungo la normale n .

A questo punto se consideriamo Ω una regione abbastanza regolare e il flusso J di classe $\mathbb{C}^1(\Omega)$ possiamo applicare il *Teorema della divergenza*

$$\int_{\partial\Omega} J \cdot ndS = \int_{\Omega} \text{div}(J)dV \quad (3)$$

e quindi sostituendo in (4) e supponendo l'uguaglianza ottenuta valga per ogni regione Ω si ottiene passando alla forma localizzata

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f - \text{div}(J) \quad (4)$$

Ora per quanto riguarda f ci occuperemo di funzioni dipendenti solo dallo stato u e non dal tempo (direttamente), mentre riguardo il flusso J si può considerare essere direttamente proporzionale alla variazione (componente per componente) della quantità u ovvero del suo gradiente. Quindi in formule

$$J = -d\nabla u \quad (5)$$

dove d è una quantità che può dipendere da vari fattori, ma che noi considereremo costante e positiva. Infatti se la variazione è negativa (ovvero ho una diminuzione della quantità u) allora il flusso uscente dovrà necessariamente essere positivo (la quantità sta uscendo) se invece è positiva allora il flusso uscente sarà negativo, ovvero ho un'entrata di tale quantità in Ω . La (5) va sotto il nome di *legge di Fourier* o anche *legge di Fick*.

In finale quindi sostituendo l'espressione della (5) nella (4) si ottiene la forma scalare della (1) ovvero:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + f(u) \quad (6)$$

Se la quantità u è vettoriale ($u = u_1, \dots, u_m$) le varie componenti possono indicare ciascuna ad esempio un agente chimico presente in una regione dello spazio, o una specie animale presente su un territorio, in tal caso le formule con integrali vanno intese componente per componente e ciò che si sta considerando è il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = d_1\Delta u_1 + f_1(u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial t} = d_m\Delta u_m + f_m(u_1, \dots, u_m) \end{cases} \quad (7)$$

Ora, tornando all'obiettivo principe di questa trattazione (l'analisi di equazioni della forma (1)), facciamo un brevissimo quadro dei passi che verranno seguiti.

In primo luogo dimostreremo che sotto opportune ipotesi l'equazione (1) associata a un particolare problema di Cauchy, ammette una soluzione unica perlomeno per tempi brevi (ovvero localmente nel tempo).

Fatto ciò però osserveremo che, dato il problema di Cauchy, qualora si fosse in grado di definire una *limitazione a priori* di quella che ne sarà la soluzione, allora si otterrà che tale soluzione esisterà globalmente nel tempo.

Introdurremo quindi il concetto di *dominio invariante* per un sistema di equazioni e mostreremo che se tale sistema ammette un dominio invariante allora la limitazione a priori è garantita.

Daremo quindi condizioni sufficienti (ma anche necessarie) affinché un'equazione-sistema ammetta tale dominio.

La nostra analisi poi ci porterà a utilizzare tali regioni per dimostrare un importante teorema che lega la soluzione della nostra equazione con la soluzione di un'equazione differenziale ordinaria, e ciò ci permetterà di ottenere informazioni per tempi grandi (quindi asintoticamente in t) sul comportamento dell'equazione o del sistema di equazioni.

Infine nell'ultima parte ci occuperemo di presentare due modelli classici nei quali tale analisi risulta esauriente e particolarmente interessante: il modello di competizione tra due specie animali, e il modello preda-predatore.

Capitolo 1

Un Teorema di esistenza e unicità

1.1 Preliminari

L'obiettivo principale di questo capitolo è arrivare alla formulazione di un Teorema di Esistenza e Unicità per un problema di Cauchy per un particolare sistema di equazioni a derivate parziali di tipo parabolico. Le equazioni di cui ci occupiamo sono appunto le equazioni di reazione-diffusione. In realtà la situazione che ci poniamo di studiare è abbastanza specifica, ovvero consideriamo il problema di Cauchy di un sistema in un dominio spaziale $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ limitato con condizioni di Neumann al bordo. Ovvero siamo interessati a risolvere

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{c}^2 \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}(\mathbf{u}) & (x, t) \in \Omega \times (t > 0) \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^0(x) \\ \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \mathbf{n}} = 0 & x \in \partial\Omega \times (t > 0) \end{cases} \quad (1.1)$$

con l'uso della seguente notazione: $\mathbf{c}^2 = (c_1^2, c_2^2, \dots, c_m^2)$

$\mathbf{u} = (u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_m(x, t))$,

$\mathbf{u}^0 = (u_1^0(x, t), u_2^0(x, t), \dots, u_m^0(x, t))$,

$\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua con derivata continua e tale che $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,

u_i^0 continuo con derivata continua e tale che soddisfi le condizioni al bordo,

con $\|\mathbf{u}\|_\infty = \max(\|u_1\|_\infty, \|u_2\|_\infty, \dots, \|u_m\|_\infty)$, $\|u_i\|_\infty = \max_{x \in \Omega}(u_i(\cdot, t))$ ($t > 0$),

Ovvero stiamo considerando un sistema di m equazioni legate tra loro per il tramite del termine di reazione f .

In realtà diversi risultati che otterremo necessitano della sola *lipschitzianità* per la \mathbf{f} (sia nel caso di sistemi, che nel caso scalare), per questo in alcuni punti della trattazione la considereremo solamente lipschitziana.

Per arrivare al nostro obiettivo procederemo per gradi, ovvero in primo luogo cercheremo la soluzione nel caso scalare e unidimensionale ($x \in \mathbb{R}$), considerando l'equazione omogenea (senza il

termine di reazione), generalizzando poi quindi al caso di sistemi, infine tramite il metodo Duhamel definiremo la condizione che la soluzione del problema (1.1) deve verificare per essere tale. A quel punto potremo enunciare e dimostrare il teorema che pone le ipotesi per le quali tale condizione è verificata. La scelta di lavorare nel caso unidimensionale è per semplicità, i risultati ottenuti si estendono senza troppe difficoltà a più dimensioni.

Nel seguito indicheremo le derivate parziali con pedici sulla funzione.

Passo 1.

Considerata l'equazione scalare e il problema associato

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & x \in (0, \pi) \times (t > 0) \\ u(x, 0) = u^0(x) \\ u_x(t) = 0 & x \in \{0, \pi\} \times (t > 0) \end{cases} \quad (1.2)$$

estendiamo il dato iniziale $u^0(x)$ per parità tra $[-\pi, \pi]$ e considerata la base ortonormale di tale intervallo $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\}_{k=1,2,\dots}$ supponendo che tale dato iniziale prolungato sia sviluppabile in serie di Fourier nella forma

$$u^0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u^0(y)}{\sqrt{2\pi}} dy + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u^0(y) \cos ky}{\sqrt{\pi}} dy$$

si ottiene facilmente un'espressione per il dato iniziale (ricordando che ora $u^0(y)$ è pari) lo sviluppo della forma

$$u^0(x) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{u_0^0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0 \cos kx \right]$$

con

$$u_0^0 = \int_0^{\pi} u_0(y) dy, \quad u_k^0 = \int_0^{\pi} u_0(y) \cos(ky) dy$$

Lo sviluppo del dato iniziale ci suggerisce di cercare una "soluzione" della forma

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{a_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \cos kx \right] \quad (1.3)$$

A tale espressione, comunque, si giunge se si tenta di risolvere il sistema (1.2) per separazione di variabili e prendendo la serie della famiglia di soluzioni trovate. Ora considerando la serie (1.3) termine a termine si ottiene per ognuno di essi (sostituendolo nell'equazione, e ricordando che deve valere $u(x, 0) = u_0(x)$) il problema ai coefficienti

$$\begin{cases} \dot{a}_k(t) = -c^2 k^2 a_k(t) & k = 0, 1, 2, \dots \\ a_k(0) = u_k^0 \end{cases} \quad (1.4)$$

la cui soluzione è data da $a_k(t) = u_k^0 e^{-c^2 k^2 t}$ se $k = 0, 1, 2, \dots$

Allora sostituendo i parametri $a_k(t)$ si ottiene una “soluzione” della forma

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{u_0^0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^{\pi} u_0(y) \cos(ky) \cos(kx) e^{-c^2 k^2 t} dy \right) \right] \quad (1.5)$$

Ora, per costruzione ogni termine della serie soddisfa il problema di Cauchy (1.2), per cui ogni somma finita di tali termini lo soddisfa;

verifichiamo che anche la serie lo soddisfa.

1) Il dato iniziale è soddisfatto (per come è costruita la soluzione).

2) Se potessimo derivare termine a termine sotto il segno di derivata allora, poichè ogni termine soddisfa il bordo e l'equazione, avremmo concluso.

Sia \bar{u}_k il termine generico della serie, allora $\sup_{(x)} |\bar{u}_k| \leq \pi \|u_0\|_{\infty} e^{-c^2 k^2 \tau}$ la cui serie converge, per cui la nostra serie converge (totalmente) in $[\tau, \infty) \forall \tau > 0$.

A questo punto ci basta verificare che la serie delle derivate seconde rispetto a x e quelle delle derivate prime rispetto a t converge uniformemente:

$$|(\bar{u}_n)_t(x, t)| = \left| - \left(\int_0^{\pi} u_0(y) \cos(ky) \cos(kx) c^2 k^2 e^{-c^2 k^2 t} dy \right) \right| \leq \|u_0\|_{\infty} \pi c^2 k^2 e^{-c^2 k^2 \tau}$$

la cui serie converge $\forall t \in [\tau, T]$ con $\tau > 0$, inoltre poichè tale stima è vera $\forall x \in (0, \pi)$ la serie converge totalmente e quindi uniformemente.

Analogamente vale $\forall x \in (0, \pi)$ e $\forall t \in [\tau, T]$

$$|(\bar{u}_n)_{xx}| = \left| - \left(\int_0^{\pi} u_0(y) \cos(ky) \cos(kx) k^2 e^{-c^2 k^2 t} dy \right) \right| \leq \|u_0\|_{\infty} \pi k^2 e^{-c^2 k^2 \tau}$$

Per cui è possibile effettuare la derivazione termine a termine e quindi l'equazione è verificata.

Con la stessa argomentazione si verifica che si può derivare una volta rispetto a x per cui è soddisfatta la condizione di Neumann.

Osservazione 1.

Poichè la serie di $u(x, t)$ converge uniformemente e poichè i termini \bar{u}_n sono continui si ha che $u(x, t)$ è continua. Inoltre poichè anche le serie derivate hanno la stessa proprietà, la soluzione risulta essere $\mathbb{C}^{\infty}(0, \pi)$ per ogni $t > 0$, e continua nel tempo (per $t > 0$).

Verifichiamo infine la continuità nello spazio e nel tempo per $t = 0$, per farlo ci basta verificare la convergenza totale in $[0, T]$ (quindi includendo lo 0) della serie (1.3). Vale infatti:

$$|a_k(t) \cos kx| \leq |a_k(t)| = |u_k^0 e^{-c^2 k^2 t}| \leq |u_k^0|$$

e poichè stiamo assumendo che il dato iniziale sia \mathbb{C}^1 su un insieme limitato, si verifica facilmente (con un'integrazione per parti) che la serie dei suoi coefficienti di Fourier $\frac{1}{\sqrt{\pi}}u_k^0 \in l_1$. Da cui la convergenza totale in $[0, T]$, $\forall T > 0$, per la nostra serie.

Osservazione Importante. Se definiamo la funzione

$$g(x, y, t) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx)\cos(ky)e^{-c^2k^2t} \quad (1.6)$$

allora la soluzione (1.3) del nostro problema omogeneo (1.2) si può scrivere nella forma

$$u(x, t) = \int_0^{\pi} g(x, y, t)u_0(y)dy \quad (1.7)$$

Occupiamoci di verificare due importanti proprietà della funzione $g(x, y, t)$ definita in (1.6):

Proprietà 1.

$$g(x, y, t) \in \mathbb{C}^{\infty}((0, \pi) \times (0, \pi)) \forall t > 0$$

Dimostrazione. $\sup_x |e^{-c^2k^2t}\cos kx\cos ky| = e^{-c^2k^2t}$ che come già detto è il termine di una serie convergente per $t > 0$, da cui quindi già si osserva che $g(x, y, t)$ è continua nelle variabili spaziali. Inoltre considerata la serie delle derivate (rispetto a x e a y) si ottiene nuovamente lo stesso risultato, con la stessa maggiorazione, per cui la funzione è derivabile con derivata continua. Iterando il processo si ha che $g(x, y, t) \in \mathbb{C}^{\infty}((0, \pi) \times (0, \pi))$ per ogni tempo fissato. \square

Proprietà 2.

$$\int_0^{\pi} g(x, y, t) = 1 \quad \forall t > 0 \text{ fissato}, \quad (1.8)$$

dove il primo termine della (1.8) è da intendersi sia come integrale sulle y avendo fissato x , sia come integrale lungo le x avendo fissato y .

Dimostrazione.

$$\int_0^{\pi} g(x, y, t) = \int_0^{\pi} \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-c^2k^2t} \int_0^{\pi} \cos(kx)\cos(ky) = 1,$$

in quanto i termini della sommatoria sono tutti nulli $\forall k > 0$, dal momento che sia integrando lungo le x sia lungo le y l'integrale del coseno tra $[0, \pi]$ risulta nullo. \square

A questo punto se consideriamo il *sistema* di equazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t = c^2 \mathbf{u}_{xx} & x \in (0, \pi) \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^0(x) \\ \mathbf{u}_x(x) = 0 & x \in \{0, \pi\} \end{cases}$$

con $c^2 = (c_1^2, c_2^2, \dots, c_m^2)$, e $\mathbf{u}^0(x) = (u_1^0, \dots, u_m^0)$, la soluzione sarà data da:

$$\mathbf{u}(x, t) = \int_0^\pi G(x, y, t) \mathbf{u}_0(y) dy$$

con $G(x, y, t) = \text{diag}(g_1(x, y, t), \dots, g_m(x, y, t))$, dove $g_i(x, y, t) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-c_i^2 k^2 t} \cos(kx) \cos(ky)$.

Passo 2

Il secondo passo è quello che ci porta a definire quale deve essere la forma della soluzione del problema (1.1), ovvero quale equazione (integrale) deve soddisfare l'ipotetica soluzione qualora esista. Data la complessità di alcuni aspetti tecnici, riportiamo qui i risultati che ci interessano, rimandando ad altri testi per i dettagli.

Anche in questo caso continuiamo a considerare $x \in \mathbb{R}$ per semplicità, ripetendo nuovamente che le stesse considerazioni si possono estendere per $x \in \mathbb{R}^n$.

Con le notazioni introdotte consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t = c^2 \mathbf{u}_{xx} + \mathbf{h}(x, t) & x \in (0, \pi), t > 0 \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^0(x) \\ \mathbf{u}_x(x) = 0 & x \in \{0, \pi\} \end{cases} \quad (1.9)$$

La soluzione per tale problema è dato dalla somma di due soluzioni rispettivamente dei problemi

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t = c^2 \mathbf{u}_{xx} & x \in (0, \pi), t > 0 \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^0(x) \\ \mathbf{u}_x(x) = 0 & x \in \{0, \pi\} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t = c^2 \mathbf{u}_{xx} + \mathbf{h}(x, t) & x \in (0, \pi), t > 0 \\ \mathbf{u}(x, 0) = 0 \\ \mathbf{u}_x(x) = 0 & x \in \{0, \pi\} \end{cases}$$

Riguardo la prima abbiamo già trovato la soluzione, mentre per la seconda ci viene in aiuto il *metodo duhamel*. Esso consiste nell'eseguire i seguenti passi:

- 1) Si costruisce una famiglia di soluzioni del problema di Cauchy omogeneo, con tempo iniziale non $t = 0$ ma un $s > 0$ variabile, con dato iniziale $h(x, s)$.
- 2) A questo punto si integra la famiglia trovata, tra 0 e t .

La soluzione in questo caso è data per il tramite delle *soluzioni fondamentali* (cfr.[6],cap.IV)

$$g_i(x, y, t - s) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-c_i^2 k^2 (t-s)} \cos kx \cos ky, \quad t > s \quad (1.10)$$

ovvero:

$$\mathbf{u}(x, t) = \int_0^t \left(\int_0^\pi G(x, y, t - s) \mathbf{h}(y, s) dy \right) ds \quad (1.11)$$

Poichè assumiamo $\mathbf{h}(x, t)$ continua con derivata continua si può dimostrare che tale costruzione dà luogo ad una soluzione classica del nostro secondo sistema (cfr. [5],cap. I).

Abbiamo quindi osservato che la funzione $g(x, y, t)$ costruita per il problema omogeneo è tale da poter definire la soluzione (classica!) anche per il problema non omogeneo; in conclusione la soluzione del problema (1.9) è data da:

$$\mathbf{u}(x, t) = \int_0^\pi G(x, y, t) \mathbf{u}_0(y) dy + \int_0^t \int_0^\pi (G(x, y, t - s) \mathbf{h}(y, s)) dy ds \quad (1.12)$$

Se quindi ora torniamo al problema iniziale, il (1.1), ci accorgiamo che la $f(u(x, t))$ è in realtà una funzione della forma $h(x, t)$ la cui espressione esplicita è ignota.

Ma allora per la costruzione appena fatta la soluzione del nostro problema principale avrà la stessa forma, ovvero:

$$\mathbf{u}(x, t) = \int_0^\pi G(x, y, t) \mathbf{u}_0(y) dy + \int_0^t \int_0^\pi (G(x, y, t - s) \mathbf{f}(u(y, s))) dy ds \quad (1.13)$$

e il semplice fatto che $\mathbf{f}(u(x, t))$ sia a priori solo continua ci garantisce la classicità della soluzione, infatti in tal caso ho una soluzione $u(x, t)$ continua, derivabile con continuità in x 2 volte e una volta in t , ciò quindi garantisce più regolarità (a posteriori) a $f(u(x, t))$, tanto da far valere la 1.13 (cfr. [5],capitolo 1).

Siamo arrivati alla fine: a questo punto per dimostrare che il sistema (1.1) ammette unica soluzione (almeno localmente nel tempo), basterà mostrare che esiste un'unica

$\mathbf{u}(x, t)$ che soddisfa l'equazione integrale (1.13). Questo è proprio ciò che faremo nella prossima sezione. (Per semplicità notazionale non scriverò il *sistema* di equazioni in grassetto, qualora ci si dovesse riferire all'equazione scalare, verrà fatto notare.)

1.2 Teorema di esistenza e unicità

Teorema 1.2.1 (Teorema di esistenza e unicità).

Sia $u_0 \in (\mathbb{C}^0(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$, con $\frac{\partial u_0}{\partial n} = 0$ se $x \in \partial\Omega$,
 $\implies \exists t_0 > 0$ dipendente solo da f e da $\|u_0\|_\infty$, tale che esiste unica $u \in \mathbb{C}^0([0, t_0], \mathbb{C}^0(\Omega))$ soluzione per (1.13) e tale che $\|u\| \leq 2\|u_0\|_\infty$, con $\|u\| \doteq \sup_{t \in [0, t_0]} \|u_0\|_\infty$.

Osservazione 2. Quello che il teorema afferma è che esiste una funzione *continua nel tempo*, e *continua nello spazio* che localmente risolve l'equazione integrale.

Dimostrazione. Poniamoci per semplicità in $\Omega = (0, \pi)$. Fissato $t_0 > 0$ consideriamo lo spazio

$$\mathbb{X} = \{u \in (\mathbb{C}^0([0, t_0], \mathbb{C}^0(\Omega)), \|\cdot\|) \text{ t.c. } \|u - \int_0^\pi G(x, y, t)u_0(y)dy\| \leq \|u_0\|_\infty\}$$

Ora,

- $\mathbb{X} \neq \emptyset$:
infatti $0 \in \mathbb{X}$ ($\|\int_0^\pi G(x, y, t)u_0(y)dy\| \leq \|G(x, y, t)\|_{L^1} \|u_0\|_\infty = \|u_0\|_\infty$).
- Lo spazio $(\mathbb{C}^0([0, t_0], \mathbb{C}^0(\Omega)), \|\cdot\|)$ è completo.

Prima di dimostrarlo osserviamo che una volta verificato che tale spazio è completo, e dimostrato inoltre che \mathbb{X} è chiuso, avrò un insieme chiuso in uno spazio completo, da cui \mathbb{X} sarà completo.

A quel punto basterà mostrare che esiste una contrazione nello spazio \mathbb{X} che per il teorema di punto fisso di Banach-Caccioppoli darà luogo a un unico punto fisso per l'equazione integrale (1.13), e quindi a una soluzione per il nostro problema.

- $\mathbb{P} = (\mathbb{C}^0([0, t_0], \mathbb{C}^0(\Omega)), \|\cdot\|)$ è completo.

Discende dal fatto che $(\mathbb{C}^0(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ è completo, infatti sia $\{u_n\} \in \mathbb{P}$ di cauchy, allora

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \text{ t.c. } \sup_{t \in [0, t_0]} \|u_n(t) - u_m(t)\|_\infty < \epsilon \forall n, m \geq n_\epsilon, \text{ ovvero}$$

$$\|u_n(t) - u_m(t)\|_\infty < \epsilon \forall n, m \geq n_\epsilon \forall t \in [0, t_0], \text{ ma allora}$$

$\{u_n\}$ è di cauchy ($\forall t$) in $(\mathbb{C}^0(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ che è completo, $\implies \exists \bar{u} \in (\mathbb{C}^0(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ t.c. $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon$ t.c.

$$\|u_n(t) - \bar{u}(t)\|_\infty < \epsilon \forall n > n_\epsilon.$$

Allora passando al *sup* su $t \in [0, t_0]$ si ha la tesi.

Ora verifichiamo \mathbb{X} essere chiuso.

Sia $\{u_n\} \in \mathbb{X}$ convergente a \tilde{u} in norma $\|\cdot\|$, ci chiediamo se $\tilde{u} \in \mathbb{X}$.

- Se $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \tilde{u}$ nella norma $\|\cdot\|$ allora $u_n(t) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \tilde{u}$ nella norma $\|\cdot\|_\infty \forall t$
 $\implies u(t) \in \mathbb{C}^0(\Omega) \forall t \in [0, t_0]$.
- $\|\tilde{u} - \int_0^\pi G(x, y, t)u_0(y)dy\| \leq \|\tilde{u} - u_n\| + \|u_n - \int_0^\pi G(x, y, t)u_0(y)dy\| \leq \epsilon + \|u_0\| \forall \epsilon > 0$ se $n \geq n_\epsilon$.
 $\implies \tilde{u} \in \mathbb{X}$.

Prima di concludere la dimostrazione sono però necessarie due disuguaglianze:

1° Disuguaglianza: Sia $u \in \mathbb{X} \implies \|u(t)\|_\infty \leq 2 \|u_0\|_\infty \quad \forall t \in [0, t_0]$.

Dimostrazione. $\|u(t)\|_\infty \leq \|u(t) - \int_0^\pi G(x, y, t)u_0(y)dy\|_\infty + \|\int_0^\pi G(x, y, t)u_0(y)dy\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty + \|u_0\|_\infty = 2 \|u_0\|_\infty$. \square

2° Disuguaglianza: Sia $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente lipchitziana e t.c. $f(0) = 0$
 $\implies \forall M > 0 \exists K_M$ t.c. $\|f(u) - f(v)\|_\infty \leq K_M \|u - v\|_\infty \quad \forall u, v \in (\mathbb{C}^0(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ con $\|u\|_\infty \leq M$, $\|v\|_\infty \leq M$.

Dimostrazione. Siano u, v t.c. $\|u\|_\infty \leq M$ e $\|v\|_\infty \leq M$

Ora $\|f(u) - f(v)\|_\infty = \max(\|f_1(u^1, \dots, u^n) - f_1(v^1, \dots, v^n)\|_\infty, \dots, \|f_n(u^1, \dots, u^n) - f_n(v^1, \dots, v^n)\|_\infty)$,
 ma $\forall i \{f_i\}$ sono lipchitz. $\implies \|f_i(u) - f_i(v)\|_\infty \leq K_i \|u - v\|_\infty$, con K_i dipendenti ciascuno da $\|u\|_\infty$ e $\|v\|_\infty$, ma allora preso $K_M = \max\{K_i\}$ si ha $\|f(u) - f(v)\|_\infty \leq K_M \|u - v\|_\infty$.

Applicando l'ultima disuguaglianza allo spazio \mathbb{X} otteniamo:

Proposizione 1.2.2. *Dati $u, v \in \mathbb{X}$ vale $\|f(u) - f(v)\|_\infty \leq K \|u - v\|_\infty$ con K dipendente solo da $\|u_0\|_\infty$ (e ovviamente da f).*

In particolare non dipende da t .

Dimostrazione. Siano $u_i \in \mathbb{X}$ con $i = 1, 2$.

$\|u_i\|_\infty \leq 2 \|u_0\|_\infty$ (segue dalla prima disuguaglianza),

allora preso $M = \|u_0\|_\infty$ si ha che $K = K_M = K(\|u_0\|_\infty)$.

Quindi $\forall u, v \in \mathbb{X} \exists K = K(\|u_0\|_\infty)$ t.c. $\|f(u) - f(v)\|_\infty \leq K \|u - v\|_\infty$. \square

A questo punto definiamo ciò che poi mostreremo essere una contrazione.

Sia $t_0 = 1/2K$ (osservazione: t_0 dipende da $\|u_0\|_\infty$) e sia Φ la mappa:

$$(\mathbb{C}^0([0, t_0], \mathbb{C}^0(\Omega)), \|\cdot\|) \xrightarrow{\Phi} (\mathbb{C}^0([0, t_0], \mathbb{C}^0(\Omega)), \|\cdot\|)$$

$$u \longrightarrow \Phi(u)$$

Con

$$\Phi(u) = \int_0^\pi G(x, y, t)u_0(y)dy + \int_0^t \int_0^\pi (G(x, y, t-s)f(u(s)))dyds$$

Ora se tale mappa risulta avere un punto fisso in \mathbb{X} questo risolve l'equazione integrale da cui siamo partiti. Affinchè ciò sia vero vogliamo applicare il teorema di Banach-Caccioppoli (o punto fisso) allo spazio \mathbb{X} .

Per fare ciò bisogna verificare:

1. $\Phi : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$, ovvero Φ manda \mathbb{X} in sè.

2. Φ è una contrazione dello spazio \mathbb{X} .

Dimostrazione. Verifica della 1.)

Dalla definizione di Φ si ha

$$\left\| \Phi(u(t)) - \int_0^\pi G(x, y, t) u_0(y) dy \right\|_\infty \leq \int_0^t \left\| \int_0^\pi (G(x, y, t-s) f(u(s))) dy ds \right\|_\infty ds \leq \int_0^t \|f(u)\|_\infty ds$$

Inoltre dalla proposizione (1.2.2) prendendo $v = 0$ si ottiene

$$\|f(u(t))\|_\infty \leq K \|u(t)\|_\infty \leq 2K \|u_0\|_\infty, t \in [0, t_0]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\| \Phi(u(t)) - \int_0^\pi G(x, y, t) u_0(y) dy \right\|_\infty &\leq 2K \int_0^t \|u_0\|_\infty ds \leq 2K \|u_0\|_\infty \int_0^{t_0} ds = \\ &2K \|u_0\|_\infty t_0 = \|u_0\|_\infty, \forall t \in [0, t_0] \end{aligned}$$

e passando al \sup_t al primo membro si ottiene $\|\Phi(u(t)) - \int_0^\pi G(x, y, t) u_0(y) dy\| \leq \|u_0\|_\infty$, ovvero Φ mappa \mathbb{X} in sè.

Verifica della 2.)

$$\begin{aligned} \|\Phi(u(t)) - \Phi(v(t))\|_\infty &\leq \int_0^t \left\| \int_0^\pi G(x, y, t-s) [f(u(s)) - f(v(s))] dy \right\|_\infty ds \leq \\ &\leq \int_0^t \| [f(u(s)) - f(v(s))] \|_\infty ds \leq K \int_0^t \| [u(s) - v(s)] \|_\infty ds \leq \\ &\leq K \int_0^t \| [u(s) - v(s)] \| ds \leq K t_0 \| [u(s) - v(s)] \| = \frac{1}{2} \|u - v\| \end{aligned}$$

ovvero passando al \sup_t al membro iniziale si ottiene

$$\|\Phi(u(t)) - \Phi(v(t))\| \leq \frac{1}{2} \|u - v\|.$$

Pertanto Φ è una contrazione dello spazio, quindi l'equazione integrale (1.13) ammette un unico punto fisso e di conseguenza il problema (1.1) ha anch'esso soluzione $\forall t \in [0, t_0]$. \square

Osservazione 3. Abbiamo mostrato l'esistenza di un unico punto fisso per Φ e quindi l'esistenza di un soluzione per il nostro problema. Quindi in realtà per concludere il teorema (1.2.1) ci manca ancora l'unicità.

Richiamiamo prima un importante lemma (senza dimostrarlo).

Lemma 1.2.3 (Lemma di Gronwall). *Sia $t \rightarrow \Lambda(t)$ una funzione continua e non negativa per la quale esistano due numeri non negativi a e b tali che*

$$\Lambda(t) \leq a + b \int_0^t \Lambda(s) ds \quad t \in [0, T], T \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad (1.14)$$

Allora

$$\Lambda(t) \leq ae^{bt} \quad t \in [0, T] \quad (1.15)$$

□

Siamo arrivati alla fine, dimostriamo l'unicità della soluzione:

Lemma 1.2.4 (unicità).

Siano u e $v \in (C^0([0, T], C^0(\Omega)), \|\cdot\|)$, $T > 0$, soluzioni del problema (1.1) per $t \in [0, T]$, con $\|u\|_\infty$ e $\|v\|_\infty \leq M$.

Allora esiste una costante $k = k(M) > 0$ tale che

$$\|u(t) - v(t)\|_\infty \leq e^{kt} \|u(0) - v(0)\|_\infty, t \in [0, T] \quad (1.16)$$

Dimostrazione. Preso $t \in [0, T]$

$$u(t) - v(t) = \int_0^\pi G(x, y, t)(u(0) - v(0)) + \int_0^t \int_0^\pi G(x, y, t-s)[f(u(s)) - f(v(s))] ds. \quad (1.17)$$

Per quanto visto esiste poi $k = k(M) > 0$ tale che $\|f(u(s)) - f(v(s))\|_\infty \leq k \|u(s) - v(s)\|$; quindi vale

$$\|u(t) - v(t)\|_\infty \leq \|u(0) - v(0)\|_\infty + k \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_\infty ds,$$

ma allora applicando il lemma di Gronwall a $t \rightarrow \|u(t) - v(t)\|_\infty$ si conclude. □

Osservazione 4. Quest'ultimo lemma in realtà ci dice 2 cose interessanti. La prima è appunto che considerate due soluzioni del problema (1.1), (e quindi aventi lo stesso dato iniziale) necessariamente dovranno coincidere. La seconda invece è che prese soluzioni dello stesso problema, aventi dati iniziali "vicini" si avrà che le soluzioni (almeno per tempi brevi) saranno vicine tra loro.

Capitolo 2

Domini invarianti

2.1 Motivazioni

Come preannunciato diamo la definizione di dominio invariante e mostriamo che l'esistenza di tale regione per il sistema di reazione-diffusione al quale ci riferiamo, ci permette di estendere l'esistenza della soluzione globalmente nel tempo.

A questo punto risulta chiara l'importanza del dominio invariante.

Definizione 2.1. Una regione $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ è detta **(Positivamente) invariante** per l'equazione di reazione-diffusione $u_t = D\Delta u + f(u)$, con condizioni di Neumann al bordo nulle, se ogni soluzione del sistema avente dato iniziale u_0 in Σ giace in Σ per ogni (x, t) per i quali ha senso la soluzione.

Nel nostro caso ci interesseremo a domini invarianti limitati.

Verifichiamo prima di tutto che l'estensione nel tempo è permessa qualora si possa limitare *a priori* la soluzione, e in tutta generalità possiamo considerare il termine di reazione dipendente anche dal tempo.

Proposizione 2.1.1. Sia $u_0 \in (C^0(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$, se dato il sistema

$$\begin{cases} u_t(x, t) = D\Delta u + f(u, t), & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

si ha che la soluzione è a priori limitata ($\|u(\cdot, t)\|_\infty < C, \forall t \geq 0$), allora la soluzione di (2.1) esiste per ogni $t > 0$.

Dimostrazione. Sia $\|u(\cdot, t)\|_\infty < C \forall t \geq 0 \implies \|u_0\|_\infty < C$, allora per il teorema di esistenza e unicità *Locale* abbiamo che esiste unica $u(x, t)$ soluzione per (2.1) per $t \in [0, t_0]$, con $t_0 = t_0(C)$. Consideriamo ora come nuovo dato iniziale $\bar{u}_0(x) = u(x, t_0)$, e poichè per ipotesi vale $\|u(\cdot, t_0)\| < C$

possiamo riapplicare il teorema di esistenza e unicità locale e estendere la soluzione fino a un tempo $t_1 > t_0$ il cui valore è (segue dalla dimostrazione del teorema di esistenza e unicità) pari a $2t_0$; in generale si ha che il passo tra due tempi t_k, t_{k+1} è sempre lo stesso (ovvero t_0). Iterando il processo quindi si può prolungare la soluzione per $t \in [0, T] \forall T > 0$. \square

Corollario 2.1.2. *Dato il sistema (2.1) se esso ammette un dominio (positivamente) invariante limitato Σ , e $u_0(x) \in \Sigma \forall x \in \mathbb{R}^n$, allora la soluzione per (2.1) esiste globalmente nel tempo.*

Dimostrazione. sia $u(x, t)$ la soluzione locale del sistema con dato iniziale $u_0 \in \Sigma \forall x$, allora per definizione di dominio invariante si ha che $u(x, t)$ a priori sarà limitata (rimanendo interamente localizzata in una regione limitata).

Allora per la proposizione precedente si ha la tesi. \square

Il nostro obiettivo quindi è ora quello di determinare condizioni necessarie (ma soprattutto sufficienti), affinché una certa regione sia invariante per un sistema di reazione-diffusione. Questo infatti come visto ci garantisce un certo “controllo” della soluzione nel tempo.

Nella prossima sezione quindi analizzeremo prima la teoria generale che definisce tali condizioni, poi successivamente ci focalizzeremo sulla ricerca di particolari domini: i rettangoli.

2.2 Domini invarianti

Definizione 2.2. Una funzione regolare $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *Quasi convessa* in $v \in \mathbb{R}^n$ se ogniqualvolta $\nabla G(v) \cdot \vec{\eta} = 0$ si ha che $[H(G(v)) \cdot \vec{\eta}] \cdot \vec{\eta} \geq 0$. Dove con $H(G)$ si intende la matrice Hessiana di G e con $\vec{\eta}$ si intende il vettore infinitesimo di incremento.

Osservazione 5. Il livello di regolarità di G è considerato tale da poter dar senso a tutti i passaggi che seguiranno (che coinvolgono G).

Osservazione 6. Nel caso unidimensionale, $v \in \mathbb{R}$, si ritrova la caratterizzazione di convessità per funzioni derivabili 2 volte.

Consideriamo il seguente insieme:

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^m \{v \in U \subset \mathbb{R}^n : G_i(v) \leq 0\} \quad (2.2)$$

e facciamo un'importante osservazione:

Se consideriamo una soluzione v di (2.1) con $v(x, 0) \in \dot{\Sigma}$ (parte interna di Σ) $\forall x \in \Omega$ tale che **non** sia in Σ per ogni $t > 0$, allora esisterebbe un G_i , e un tempo t_0 tale che per $0 < t \leq t_0$ e $x \in \Omega$ si avrebbe $G_i(v(x, t)) \leq 0$ e $\forall \varepsilon$ esisterebbe una coppia (x^o, t^o) con $t_0 < t^o < t_0 + \varepsilon$ tale che $G_i(v(x^o, t^o)) > 0$.

Quindi se ponendo come ipotesi

- $G_i(v(x_0, t)) < 0, \quad 0 \leq t < t_0$
 - $G_i(v(x_0, t_0)) = 0$
- (2.3)

ottenessimo come conclusione che

$$\frac{\partial G_i(v)}{\partial t} < 0 \text{ in } (x_0, t_0), \quad (2.4)$$

avremmo un assurdo (perchè le ipotesi (2.3) implicano necessariamente $\frac{\partial G_i(v)}{\partial t} \geq 0$), e quindi non può esistere alcun t_0 che soddisfi la seconda assunzione, ovvero Σ risulta invariante. Useremo questa osservazione nel prossimo teorema dove, in tutta generalità possiamo considerare la matrice $D = D(v, x)$ ovvero non necessariamente costante, da cui il teorema varrà anche nel caso a cui noi ci interessiamo (ovvero D costante). Osserviamo che le ipotesi (2.3) sono verificate solo se si considera un dato iniziale preso internamente al dominio Σ , in realtà la dimostrazione che segue (che usa tale fatto) può essere resa valida anche considerando un dato iniziale preso sul bordo di Σ (cfr.[1]).

Teorema 2.2.1 (Condizione sufficiente). *Sia Σ come in (2.2) e supponiamo che $\forall t \in \mathbb{R}^+$ e $\forall v_0 \in \partial\Sigma$ (da non confondersi con il dato iniziale) valgano le seguenti ipotesi:*

1. $\nabla G_i(v_0)$ e' autovettore sinistro per $D(v_0, x)$
2. se $\nabla G_i(v) \cdot D(v_0, x) = \mu \nabla G_i(v)$, $\mu \neq 0$ allora G_i e' quasi convessa in v_0
3. $\nabla G_i(v_0) \cdot f(v_0) < 0 \forall t > 0$

Allora Σ è invariante per il sistema (2.1).

Dimostrazione. Per semplicità notazionale sia $G \doteq G_i$ e consideriamo $x \in \mathbb{R}$. Per mostrare l'invarianza di Σ agiremo così:

Assumeremo valga la (2.3) per un certo $x_0 \in \Omega$ e mostreremo che si deriva la (2.4), quindi avremo un assurdo e così dall'osservazione precedente avremo concluso.

Sia $v_0 = v(x_0, t_0)$, allora calcolando in (x_0, t_0) vale

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(v_0)}{\partial t} &= \nabla G(v_0) \cdot v_t(x_0, t_0) = \nabla G(v_0) \cdot (D(v_0, x_0) \cdot v_{xx}(x_0, t_0) + f(v_0)) = \\ &\quad \mu \nabla G(v_0) \cdot v_{xx}(x_0, t_0) + \nabla G(v_0) \cdot f(v_0) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dove la terza uguaglianza segue dalla prima ipotesi. Definiamo $h(x) \doteq G(v(x, t_0))$ (da cui $h(x_0) = G(v_0) = 0$).

Ora verifichiamo che **1)** $h'(x_0) = 0$ e **2)** $h''(x_0) \leq 0$, da cui seguirà facilmente la tesi.

1) se $h'(x_0) > 0$ allora poichè $h(x_0) = 0$ si ha $h(x) > 0$ se $|x - x_0| < \delta$ per un certo δ con $x > x_0$ $\implies G(v(x, t_0)) > 0$ se $|x - x_0| < \delta \implies G(v(x, t)) > 0$ se $|x - x_0| < \delta$ e $|t - t_0| < \varepsilon$ per un certo ε . Ma allora si ha che esiste $x' < x_0$ e un $t' < t_0$ tale che $G(v(x', t')) > 0$, il che è assurdo avendo assunto come ipotesi la (2.3). Allo stesso modo si verifica che $h'(x_0)$ non può essere strettamente negativo. Quindi $h'(x_0) = 0$.

2) se $h''(x_0) > 0$ allora poichè $h'(x_0) = 0$ si ha $h'(x) > 0$ se $|x - x_0| < \delta_2$ per un certo δ_2 con $x > x_0$, allora nuovamente poichè $h'(x_0) = 0$ si deduce che $h(x) > 0$ se $|x - x_0| < \delta_2$, il che come già visto è assurdo. Quindi $h''(x_0) \leq 0$. In finale abbiamo quindi

$$0 \geq h''(x_0) = H(G(v_0) \cdot v_x) \cdot v_x + \nabla G \cdot v_{xx}$$

Ora da ipotesi 2) si ha poichè $\mu > 0$ (essendo D definita positiva) si ha $H(G(v_0) \cdot v_x) \cdot v_x \geq 0$ e quindi $\nabla G \cdot v_{xx} \leq 0$.

Quindi si ha considerando la (2.5) e ricordando l'ipotesi 3) che $\frac{\partial G(v_0)}{\partial t} < 0$, e quindi l'assurdo che cercavamo. \square

2.2.1 Una spiegazione “fisica”

Nel seguito quando considereremo domini dati da rettangoli avremo che le prime 2 ipotesi del teorema (2.2.1) saranno automaticamente soddisfatte (lo verificheremo tra breve) mentre bisognerà di volta in volta provare la 3).

Per questo motivo cerchiamo di capire *fisicamente* cosa l'ipotesi 3) sta richiedendo al sistema (almeno nel caso dei rettangoli).

Per semplicità sia $\Sigma = \bigcap_{i=1}^4 \{v : G_i(v) \leq 0\}$ con

- $G_1(v) = v_1 - a_1 \implies \nabla G_1(v_0) = (1, 0)$ su Σ_1
- $G_2(v) = v_2 - b_2 \implies \nabla G_2(v_0) = (0, 1)$ su Σ_2
- $G_3(v) = -v_1 + a_2 \implies \nabla G_3(v_0) = (-1, 0)$ su Σ_3
- $G_4(v) = -v_2 - b_1 \implies \nabla G_4(v_0) = (0, -1)$ su Σ_4 .

Ora dire $\nabla G_i(v_0) \cdot f(v_0) < 0$ geometricamente significa che i due vettori formano un angolo ottuso; quindi quello che il teorema ci pone come ipotesi *sufficiente* (ma che poi si verificherà essere necessaria (o quasi)) affinché un dominio Σ sia invariante, è che il termine di reazione f sia tale da “spingere” lo soluzione del sistema all'interno della regione non appena essa si avvicini al bordo, ovvero graficamente calcolando in $v_0 \in \Sigma_i$ si ha:

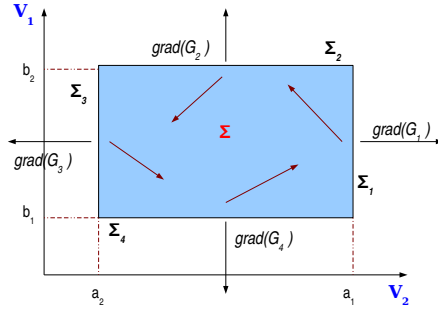


Figura 2.1: Ruolo del termine di reazione (evidenziato in rosso)

2.2.2 Il caso dei rettangoli

Giustificiamo quindi in modo rigoroso che sotto un'opportuna ipotesi sul termine f si ha che dato il sistema (2.1) la regione

$$\Sigma = \{v = (v_1, \dots, v_n) : G_i(v) \leq 0\} = \{v : v_i - c_i \leq 0\} \text{ è invariante.}$$

Infatti per come è definito G_i si ha che è *quasi convesso* ovunque in quanto la sua matrice hessiana è nulla e quindi è verificata la prima ipotesi.

Inoltre considerando $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ con $d_1 \in \mathbb{R}^+$, poichè $\nabla G_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ con 1 nella i -esima coordinata si ha che $\nabla G_i \cdot D = (0, \dots, d_i, 0, \dots, 0) = d_i \nabla G_i$, e quindi il gradiente di G è autovettore sinistro anche in $v_0 \in \Sigma$.

A questo punto affermiamo che l'unica cosa da verificare del sistema (2.1) nel caso si cerchino domini sotto forma di rettangoli è che

$$f_i(u_1, \dots, u_{i-1}, c_i, u_{i+1}, \dots, u_m) < 0 \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Se questo fosse vero infatti si avrebbe in $u_i = c_i$

$$\nabla G_i \cdot f = (0, \dots, 1, \dots, 0) \cdot (f_1, \dots, f_i, \dots, f_m) = f_i(\dots, u_i = c_i, \dots) < 0$$

e quindi anche la terza ipotesi del teorema risulta verificata.

Osservazione 7. È facile da verificare (ma soprattutto molto intuitivo) che *intersezione di regioni invarianti e ancora una regione invariante per il sistema*. Questo, insieme all'argomentazione precedentemente fatta ci porta a un comodo risultato:

Corollario 2.2.2. Sia $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_m)$

e sia

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^m \{u : a_i \leq u_i \leq b_i\} = \Sigma^- \bigcap \Sigma^+ \doteq$$

$$\doteq \left\{ \bigcap_{i=1}^m \{u : u_i - b_i \leq 0\} \right\} \cap \left\{ \bigcap_{i=1}^m \{u : -u_i + a_i \leq 0\} \right\}$$

esso risulta invariante per (2.1) purchè

$$f_i(\dots, b_i, \dots) < 0$$

$$f_i(\dots, a_i, \dots) > 0$$

□

Quest'ultimo corollario è di importanza fondamentale in quanto in sostanza la ricerca di domini invarianti è indirizzata proprio sui rettangoli.

In realtà nella gran parte delle applicazioni l'ipotesi 3) del teorema (2.2.1) è un po' restrittiva. Quello che in genere si verifica è che preso v_0 nel bordo vale $\nabla G_i(v_0) \cdot f(v_0) \leq 0$ (notare che non è una maggiorazione *stretta*). Per poter estendere il teorema a questi casi bisogna introdurre il concetto di f -stabilità del sistema.

Definizione 2.3 (f -stabilità). Il sistema (2.1) è detto f -stabile se ogniqualvolta f è t.c. esista $\{f_n\}$ per cui $\|f_n(u) - f(u)\|_\infty \rightarrow 0$ sui compatti, allora considerata $v(x, t)$ soluzione di (2.1), si ha che $v(x, t)$ è il limite di $v_n(x, t)$ con $v_n(x, t)$ soluzione di

$$\begin{cases} u_t(t) = D\Delta u + f_n(u), & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2.6)$$

Ovvero sto richiedendo che il sistema sia (uniformemente) continuo rispetto a f , cioè variando poco la f si chiede che vari di poco la soluzione v .

Teorema 2.2.3 (estensione). *Se il sistema (2.1) è f -stabile, allora con le ipotesi del teorema (2.2.1) ma sostituendo la 3) con $\nabla G_i(v_0) \cdot f(v_0) \leq 0$, si ha che Σ , definito nel teorema, risulta invariante.*

Dimostrazione. Consideriamo \bar{f} t.c. $\nabla G_i(v_0) \cdot \bar{f}(v_0) < 0$, allora preso

$$\begin{cases} u_t(t) = D\Delta u + f(u) + \delta \bar{f} & \delta > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

ho come termine di reazione $F = f + \delta \bar{f}$, per cui $\nabla G_i(v_0) \cdot F(v_0) = \nabla G_i(v_0) \cdot f(v_0) + \nabla G_i(v_0) \cdot \delta \bar{f}(v_0) < 0$, ma allora per il teorema (2.2.1) esiste v_δ t.c. $v_\delta \in \Sigma \forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall t$. Ora poichè il sistema è f -stabile e $f_\delta \rightarrow f$, si ha $v_\delta \rightarrow v \forall(x, t)$ e quindi poichè la convergenza è uniforme $v(x, t) \in \Sigma \forall(x, t)$ ovvero Σ è invariante. \square

Osservazione 8. In realtà la definizione di f -stabilità si da per equazioni un po' piu generali di cui quelle delle quali ci occupiamo noi sono solo un caso particolare. Verifichiamo allora che considerando il termine di reazione f globalmente lipschitziano la f -stabilità è sempre garantita. Consideriamo quindi u soluzione del nostro problema avente come termine di reazione f , u_δ soluzioni del problema approssimante con termine di reazione $f_\delta = f + \delta h$ (con h della stessa regolarità usata dal teorema) tendente a f . Dal teorema di esistenza e unicità dimostrato nel primo capitolo si ha che esiste un t_0 tale che u_δ é definita in $[0, t_0]$ per ogni δ . Abbiamo quindi fissato $t \in [0, t_0]$:

$$\begin{aligned} \|u_\delta - u\|_\infty &= \left\| \int_0^\pi G \cdot u_0 + \int_0^t \int_0^\pi G \cdot f_\delta(u_\delta) - \int_0^\pi G \cdot u_0 + \int_0^t \int_0^\pi G \cdot f(u) \right\|_\infty = \\ & \left\| \int_0^t \int_0^\pi G \cdot f_\delta(u_\delta) - \int_0^t \int_0^\pi G \cdot f(u) \right\|_\infty = \left\| \int_0^t \int_0^\pi G \cdot (f_\delta(u_\delta) - f(u)) \right\|_\infty \\ & \leq \int_0^t \left\| \int_0^\pi G \cdot (f_\delta(u_\delta) - f(u)) \right\|_\infty \leq \int_0^t \|f_\delta(u_\delta) - f(u)\|_\infty \end{aligned}$$

ora,

$$\begin{aligned} \|f_\delta(u_\delta) - f(u)\|_\infty &\leq \|f_\delta(u_\delta) - f_\delta(u)\|_\infty + \|f_\delta(u) - f(u)\|_\infty \\ &= \|f(u_\delta) + \delta h(u_\delta) - f(u) - \delta h(u)\|_\infty + \|f_\delta(u) - f(u)\|_\infty \\ &\leq k \|u_\delta - u\|_\infty + \delta \|h(u_\delta) - h(u)\|_\infty + \|f_\delta(u) - f(u)\|_\infty \leq \\ & k \|u_\delta - u\|_\infty + \bar{k}\delta \|u_\delta - u\|_\infty + \|f_\delta(u) - f(u)\|_\infty \end{aligned}$$

Ma allora

$$\|u_\delta - u\|_\infty \leq (k + \delta \bar{k}) \int_0^t \|u_\delta - u\|_\infty + t \|f_\delta(u) - f(u)\|_\infty$$

quindi per il lemma di Gronwall si ha

$$\|u_\delta - u\|_\infty \leq t \|f_\delta(u) - f(u)\|_\infty e^{k + \bar{k}\delta}$$

E quindi per la convergenza a zero di $\|f_\delta(u) - f(u)\|_\infty$ (per ipotesi!) si ottiene la convergenza a zero di $\|u_\delta - u\|_\infty$.

La globale lipschitzianità ci è servita per poter dar senso a tutte le disuguaglianze sopra effettuate; qualora f fosse solo localmente lipschitziana le disuguaglianze continuano a valere osservando che dalla dimostrazione del teorema di esistenza e unicità si vede che le u_δ sono tutte limitate dalla stessa costante dipendente da u_0 , per cui valgono ancora i passaggi sopra effettuati.

Quindi nel nostro caso il corollario (2.2.2) può essere modificato. Ovvero con le stesse assunzioni il rettangolo sarà invariante purchè

$$\begin{aligned} f_i(\dots, b_i, \dots) &\leq 0 \\ f_i(\dots, a_i, \dots) &\geq 0 \end{aligned}$$

In realtà possiamo considerare valida la sostituzione delle due condizioni del teorema di sufficienza con queste ultime due anche seguendo un'altra argomentazione (che ci limiteremo ad accennare), quella che si basa sulla quasimonotonia del termine di reazione. Nel caso si consideri il termine di reazione $f = (f_1(u_1, u_2), f_2(u_1, u_2))$ continuo con derivata continua (ci mettiamo nel caso di due equazioni per semplicità), esso risulta essere quasimonotono non-decrescente (non-crescente) se $\frac{\partial f_1}{\partial u_2} \geq 0, \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \geq 0$ ($\frac{\partial f_1}{\partial u_2} \leq 0, \frac{\partial f_2}{\partial u_1} \leq 0$). Se il termine di reazione soddisfa queste condizioni allora si può dimostrare (cfr.[7], cap.8) che nuovamente siamo autorizzati a utilizzare come condizione sufficiente per l'invarianza di un dominio le due disuguaglianze $f_i(\dots, b_i, \dots) \leq 0$ $f_i(\dots, a_i, \dots) \geq 0$. Nei due esempi che faremo a fine trattazione si può verificare valgono anche questo tipo di condizioni.

A questo punto nonostante ciò che utilizzeremo sarà il teorema di *sufficienza* diamo per completezza l'enunciato di un teorema che da una condizione necessaria affinché una regione sia invariante per il nostro sistema.

Teorema 2.2.4 (Condizione necessaria). *Sia Σ definita come in (2.2) e si supponga sia invariante per il sistema (2.1), allora $\forall v_0 \in \partial\Sigma$ valgono le seguenti condizioni:*

1. $\nabla G_i(v_0)$ è un autovettore sinistro per $D(v_0, x) \forall x \in \Omega$.
2. G_i è quasi convesso in v_0 .
3. $G_i(v_0) \cdot f(v_0) \leq 0$.

A questo punto non ci resta che enunciare un teorema che porta una caratterizzazione per domini invarianti, unendo i teoremi (2.2.1) e (2.2.4).

Teorema 2.2.5 (Condizione necessaria e sufficiente). *Sia Σ definita come in (2.2) e si supponga che il sistema (2.1) sia f -stabile., allora Σ è una regione invariante per il sistema se e solo se $\forall v_0 \in \partial\Sigma$ valgono le seguenti condizioni:*

1. $\nabla G_i(v_0)$ è un autovettore sinistro per $D(v_0, x) \forall x \in \Omega$
2. G_i è quasi convesso in v_0 .
3. $G_i(v_0) \cdot f(v_0) \leq 0$.

Dimostrazione. Un'implicazione è data dal teorema (2.2.1), l'altra dal teorema (2.2.4). □

Capitolo 3

Un teorema di confronto

Come anticipato nell'introduzione, in questo capitolo ci occuperemo di definire degli strumenti che ci permetteranno, dato un sistema di reazione-diffusione (con condizioni di Neumann al bordo, e dati iniziali fissati), di stimare il comportamento di tale sistema per tempi lunghi. Quello che faremo sarà costruire a partire dal nostro problema di Cauchy un' altro problema di Cauchy associato definito da *equazioni differenziali ordinarie* che limitino dal basso e dall'alto il nostro sistema per ogni $t \in \mathbb{R}^+$.

3.1 Problemi associati

Consideriamo il problema vettoriale

$$\begin{cases} u_t(x, t) = D\Delta u + f(u), & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & x \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad (3.1)$$

dove come al solito consideriamo f lipschitziana, Ω una regione limitata di \mathbb{R}^n con frontiera regolare e $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_m)$, $d_i \geq 0$. Poniamoci inoltre nel caso in cui il problema (3.1) ammetta un regione invariante della forma

$$\Sigma = \prod_i^m [a_i, b_i] \quad (3.2)$$

e sia $u_0(x) = (u_1^0(x), u_2^0(x), \dots, u_m^0(x))$ giacente in Σ per ogni $x \in \Omega$. A questo punto partizioniamo, in due insiemi arbitrari disgiunti, l'insieme $\mathbb{Z}_m = \{1, 2, \dots, m\} = \sigma_1 \cup \sigma_2$ e per ciascuna partizione definiamo per $i = 1, \dots, m$

$$f_i^+(u) = \sup\{f_i(s_1, \dots, s_{i-1}, u_i, s_{i+1}, \dots, s_m)\}$$

$$f_i^-(u) = \inf\{f_i(s_1, \dots, s_{i-1}, u_i, s_{i+1}, \dots, s_m)\}$$

$$a_j \leq s_j \leq u_j, \text{ se } j \in \sigma_2, j \neq i$$

$$u_j \leq s_j \leq b_j, \text{ se } j \in \sigma_1, j \neq i$$

Osservazione 9. : $f_i^+(u_1, \dots, u_m)$ è non decrescente (non crescente) nel j -esimo posto se $j \in \sigma_2$ ($j \in \sigma_1$), mentre $f_i^-(u_1, \dots, u_m)$ è non crescente (non decrescente) nel j -esimo posto se $j \in \sigma_2$ ($j \in \sigma_1$).

Definiamo ora quello che chiameremo il *vettore associato* al problema (3.1):

$$H_{\sigma_2} = (h_1(u), h_2(u), \dots, h_m(u)) \text{ con}$$

$$h_i(u) = \begin{cases} f_i^+(u) & i \in \sigma_2 \\ f_i^-(u) & i \in \sigma_1 \end{cases} \quad (3.3)$$

Analizziamo brevemente il caso $m = 2$ per avere un'idea concreta di ciò che stiamo facendo. Sia quindi $\mathbb{Z}_2 = \{1, 2\}$ e consideriamo σ_1, σ_2 arbitrari. Avremo graficamente

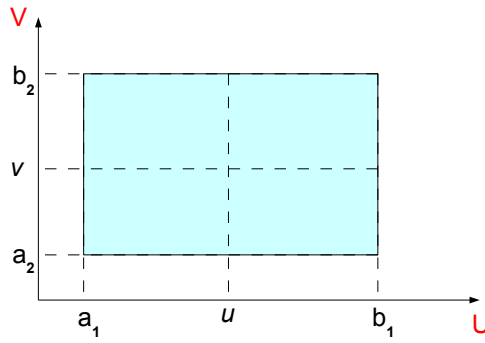


Figura 3.1: regione invariante con $m=2$

da cui

$$f_1^+(u, v) = \sup f_1(u, s)$$

$$f_1^-(u, v) = \inf f_1(u, s)$$

con $s \in [a_2, v]$ se $2 \in \sigma_2$, oppure $s \in [v, b_2]$ se $2 \in \sigma_1$,

$$f_2^+(u, v) = \sup f_2(s, v)$$

$$f_2^-(u, v) = \inf f_2(s, v)$$

con $s \in [a_1, v]$ se $1 \in \sigma_2$, oppure $s \in [v, b_1]$ se $1 \in \sigma_1$,

Prima di enunciare il teorema di confronto cerchiamo di capire a partire dalla definizione di H_{σ_2} e con l'aiuto di grafici, come tale vettore suddivida il dominio invariante in parti disgiunte.

Consideriamo la partizione $\sigma_2 = 1, \sigma_1 = 2$, avremo quindi $H_1 = (f_1^+, f_2^-)$. Se evidenziamo di rosso il tratto di piano in cui si determinano f_1^+ e f_2^- si ottiene

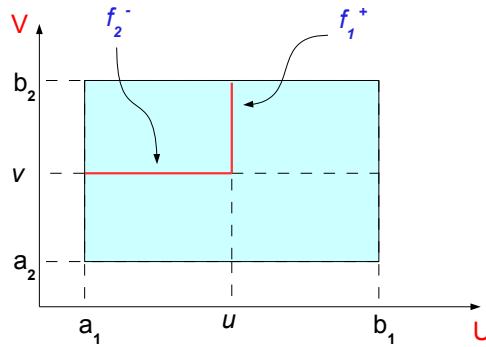


Figura 3.2: Partizione $\sigma_2 = 1, \sigma_1 = 2$

Analogamente presa come partizione $\sigma_2 = 2$ e $\sigma_1 = 1$ si ottiene $H_2 = (f_1^-, f_2^+)$, la cui definizione avviene lungo le linee evidenziate del seguente grafico

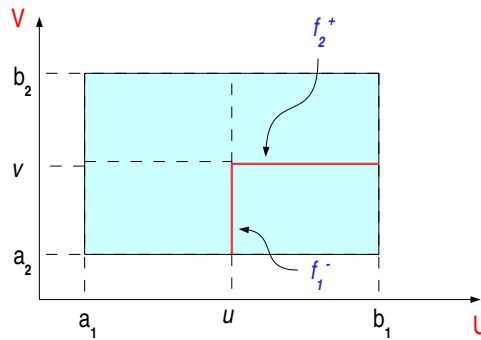


Figura 3.3: Partizione $\sigma_2 = 2$ e $\sigma_1 = 1$

Preso invece $\sigma_2 = \{1, 2\}$ e $\sigma_1 = \{\emptyset\}$ si ha $H_{\{1,2\}} = (f_1^+, f_2^+)$, dove l'insieme dove f_1^+ e f_2^+ si definiscono è diverso dai precedenti, ovvero graficamente

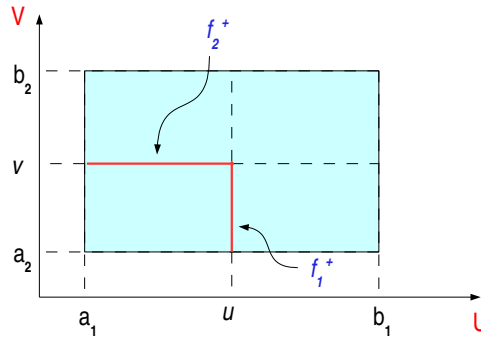


Figura 3.4: Partizione $\sigma_2 = \{1, 2\}$ e $\sigma_1 = \{\emptyset\}$

Notiamo che per come è definito $H_{\{1,2\}}(u, v)$ esso risulta essere crescente sia lungo u , sia lungo v , pertanto tale vettore prende il nome di *vettore massimo* associato al problema.

Infine presa la partizione $\sigma_2 = \{\emptyset\}$ e $\sigma_1 = \{1, 2\}$, si ottiene $H_{\{\emptyset\}} = (f_1^-, f_2^-)$ e graficamente si ha

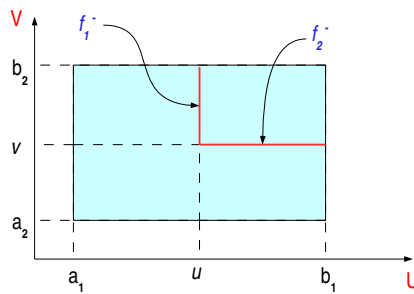


Figura 3.5: Partizione $\sigma_2 = \{\emptyset\}$ e $\sigma_1 = \{1, 2\}$

In questo invece per come è definito $H_{\{\emptyset\}}(u, v)$ esso risulta essere decrescente su entrambe le coordinate e quindi verrà denominato come *vettore minimo* associato al problema.

Lemma 3.1.1. Sia $\Sigma = \prod_{i=1}^m [a_i, b_i]$ invariante e sia $p = p(u)$ lipschitziana in Σ .

Definita

$$p^+(u) = \sup\{p(u_1, s_2, \dots, s_m) : a_i \leq s_i \leq u_i, i = 2, \dots, m\}$$

si ha che $p^+(u)$ è anch'essa lipschitziana (con la stessa costante di lipschitzianità di $p(u)$).

Dimostrazione. A meno di traslazioni possiamo considerare $a_i = 0, i = 2, \dots, m$. Sia ora $u \in \Sigma$ e consideriamo l'insieme

$$A_u = \{s \in \mathbb{R}^m : 0 \leq s_j \leq u_j \text{ se } j > 1, \text{ e } u_1 = s_1\}$$

quindi si ha che $p^+(u) = \sup\{p(s), s \in A_u\}$. Ora poichè $p(u)$ è continua (essendo lipschitz.) e poichè A_u è compatto si ha che $p(u)$ ammette massimo in A_u , ovvero $\exists s' \in A_u$ t.c. $p^+(u) = p(s')$.

Sia $s'_0 = \max(0, s' + v - u)$ con $v \in \Sigma$, ovvero $(s'_0)_j = \max(0, (s')_j + v_j - u_j)$ con $j = 1, 2, \dots, m$. Osserviamo che $s'_0 \in A_v$, infatti sicuramente è positivo e d'altra parte vale $s'_j + v_j - u_j \leq u_j + v_j - u_j = v_j$, inoltre $(s'_0)_1 = \max(0, s'_1 + v_1 - u_1) = \max(0, u_1 + v_1 - u_1) = \max(0, v_1) = v_1$. Verifichiamo ora (ci servirà tra breve) che

$$|s'_0 - s'| \leq |u - v|$$

Per definizione di s'_0 vale

$$|s'_0 - s'|^2 = \sum_{j=1}^m [s'_j - \max(0, s'_j + v_j - u_j)]^2, \quad (3.4)$$

quindi se $s'_j + v_j - u_j \geq 0$ si ha $s'_j - \max(0, s'_j + v_j - u_j) = u_j - v_j$, mentre se $s'_j + v_j - u_j < 0$ si ha $s'_j - \max(0, s'_j + v_j - u_j) = s'_j < u_j - v_j$, e quindi sostituendo le componenti in (3.4) si ottiene

$$|s'_0 - s'|^2 \leq |u - v|^2,$$

da cui l'asserto. A questo punto possiamo concludere, infatti

$$p^+(u) - p^+(v) = \sup_{s \in A_u} p(s) - \sup_{s \in A_v} p(s) \leq p(s') - p(s'_0) \leq k|s' - s'_0| \leq k|u - v|,$$

e scambiando il ruolo di u e v in quest'ultima espressione si ha la tesi. \square

Osservazione 10. Ovviamente il lemma precedente è valido considerando $p^+(u)$ avente fissato non u_1 ma un qualunque u_j , inoltre gli stessi conti possono essere eseguiti per dimostrare il teorema nel caso si consideri $p^-(u) = \inf\{p(u_1, s_2, \dots, s_m) : a_i \leq s_i \leq u_i, i = 1, 2, \dots, m\}$, e anche in questo caso vale la scelta arbitraria di fissare u_j invece di u_1 .

3.2 Teorema di confronto

Consideriamo ora il seguente problema di Cauchy (vettoriale)

$$\begin{cases} \dot{v} = H_{\sigma_2}(v) = (h_1(v), h_2(v), \dots, h_m(v)) \\ v(0) = v^0 = (v_1^0, \dots, v_m^0) \end{cases} \quad (3.5)$$

con

$$h_i(v) = \begin{cases} f_i^+ & i \in \sigma_2 \\ f_i^- & i \in \sigma_1 \end{cases} \quad (3.6)$$

e

$$v_i^0 = \begin{cases} \sup u_i^0(x) & x \in \bar{\Omega}, i \in \sigma_2 \\ \inf (u_i^0(x) & x \in \bar{\Omega}, i \in \sigma_1 \end{cases} \quad (3.7)$$

Per il lemma (3.1.1) si ha che $\forall i$ $h_i(v)$ e' lipschitziana in Σ , ma allora per il teorema di esistenza e unicit  per *equazioni differenziali ordinarie* si ha che il problema (3.5) ammette soluzione unica in quanto $H_{\sigma_2}(v)$ risulta lipschitziana nel dominio, infatti:

$$\|H_{\sigma_2}(u) - H_{\sigma_2}(v)\|_{\infty} = \max\{\|h_i(u) - h_i(v)\|_{\infty}, i = 1, \dots, m.\}$$

ma $\forall i = 1, \dots, m$ si ha per il lemma

$$\|h_i(u) - h_i(v)\|_{\infty} \leq k_i \|u - v\|_{\infty}$$

da cui considerando $k_{max} = \max\{k_i, i = 1, \dots, m\}$, vale

$$\|H_{\sigma_2}(u) - H_{\sigma_2}(v)\|_{\infty} \leq k_{max} \|u - v\|_{\infty}.$$

Facciamo ora un'osservazione **cruciale**. Poich  $v = v(t)$, soluzione di (3.5), non dipende da x (quindi $\Delta(v) = 0$, e $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$) si ha che tale $v(t)$ risulta essere soluzione unica per

$$\begin{cases} v_t = D\Delta v + H_{\sigma_2}(v) \\ v(x, 0) = v^0 \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (3.8)$$

Questa osservazione ci permette di dimostrare un importante risultato:

Teorema 3.2.1 (Teorema di confronto). Sia $u(x, t)$ soluzione del problema (3.1) con Σ (definito come in (3.2)) invariante, e sia $v(t)$ soluzione di (3.5) allora per ogni $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$ si ha:

$$\begin{cases} u_i(x, t) \leq v_i(t) & i \in \sigma_2 \\ u_i(x, t) \geq v_i(t) & i \in \sigma_1 \end{cases} \quad (3.9)$$

Dimostrazione. Mostriamo in primo luogo che Σ risulta essere invariante anche per il problema (3.5) ovvero per il problema (3.8). Poichè Σ è un rettangolo basta verificare (per l'osservazione (8) che $H_{\sigma_2}(\tilde{u}_0) \cdot \nu_i \leq 0$ con $\tilde{u}_0 \in \partial\Sigma$ e $\nu_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ con 1 all'i-esimo posto. Per semplicità sia $i=1$ e $u_1 = a_1$ (il ragionamento si ripete per ogni i).

$$\begin{aligned} H_{\sigma_2}(\tilde{u}_0) \cdot \nu_1 &= h_1(\tilde{u}_0) = h_1(a_1, u_2, \dots, u_m) = \\ &= f_1^+(a_1, u_2, \dots, u_m) \text{ se } 1 \in \sigma_2 \end{aligned}$$

Ma poichè Σ è invariante per (3.1) vale che $f_1(a_1, u_2, \dots, u_m) \leq 0 \forall u_i$ e quindi $f_1^+(a_1, u_2, \dots, u_m) \leq 0$. Analogamente si mostra che $H_{\sigma_2}(\tilde{u}_0) \cdot \nu_1 \leq 0$ se $1 \in \sigma_1$.

Definiamo ora $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ tale che

$$w_i = \begin{cases} u_i - v_i & \text{se } i \in \sigma_2 \\ v_i - u_i & \text{se } i \in \sigma_1 \end{cases} \quad (3.10)$$

e sia $G(w, t) = (g_1(w, t), \dots, g_m(w, t))$ con

$$g_i(w, t) = \begin{cases} f_i(u) - h_i(v) & \text{se } i \in \sigma_2 \\ h_i(v) - f_i(u) & \text{se } i \in \sigma_1 \end{cases} \quad (3.11)$$

da cui si ha

$$\dot{w}_i = \begin{cases} \dot{u}_i - \dot{v}_i = D\Delta u + f(u) - H_{\sigma_2} & \text{se } i \in \sigma_2 \\ \dot{v}_i - \dot{u}_i = H_{\sigma_2} - d\delta u + f(u) & \text{se } i \in \sigma_1 \end{cases} \quad (3.12)$$

e quindi vale (osservando che $D\Delta u = \Delta w$)

$$\dot{w} = D\Delta w + G(w, t) \quad (3.13)$$

Inoltre si ha $\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial v}{\partial n} = 0$ sul bordo e

$$w_i(x, 0) = \begin{cases} u_i^0(x) - \sup u_i^0(x) & \text{se } i \in \sigma_2 \\ \inf u_i^0(x) - u_i^0(x) & \text{se } i \in \sigma_1 \end{cases} \quad (3.14)$$

e quindi in ogni caso $w_i(x, 0) \leq 0$.

Osserviamo ora dalla (3.10) che se $w(x, t) \leq 0$ per ogni t , si ha

$$\begin{cases} u_i \leq v_i & \text{se } i \in \sigma_2 \\ v_i \leq u_i & \text{se } i \in \sigma_1 \end{cases} \quad (3.15)$$

ovvero la tesi. Per verificare ciò basta mostrare che la (3.13) ammette dominio invariante definito da $\Sigma = \{w : w_i \leq 0\}$, in tal caso essendo il dato iniziale in Σ la soluzione vi resterà per ogni $t \in \mathbb{R}^+$. Avendo considerato Σ un rettangolo basterà mostrare che $G(w, t) \cdot \nu_i = g_i(w, t) \leq 0$ se $w \in \partial\Sigma$ e $\nu_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$.

Poichè $w \in \partial\Sigma$ si avrà $w_i = 0$ per un certo i e $w_j \leq 0$ se $i \neq j$, per cui $u_i = v_i$. Consideriamo $i \in \sigma_2$ (se $i \in \sigma_1$ la dimostrazione è analoga), quindi

$$g_i(w, t) = f_i(u) - h_i(v) = f_i(u) - f_i^+(v) \leq f_i^+(u_1, \dots, u_i, \dots, u_m) - f_i^+(v_1, \dots, v_i = u_i, \dots, v_m),$$

Sia ora $k \in \sigma_2$ $k \neq i$, per semplicità sia $k=1$, allora per definizione di f_i^+

$$f_i^+(u_1, \dots, u_m) \leq f_i^+(v_1, u_2, \dots, u_m) \quad (3.16)$$

poichè $u_1 \leq v_1$ e f_i^+ è crescente se $1 \in \sigma_2$.

Se invece $k \in \sigma_1$ $k \neq i$ si ha $u_1 \geq v_1$ e f_i^+ è decrescente, per cui continua a valere la (3.16), e facendo tale ragionamento per ogni k si ottiene

$$f_i^+(u_1, \dots, u_{j-1}, u_j, \dots, u_i, \dots, u_m) \leq f_i^+(u_1, \dots, u_{j-1}, v_j, \dots, u_i, \dots, u_m) \quad (3.17)$$

ma allora se $i \in \sigma_2$ $g_i(w, t) = f_i(u_1, \dots, u_m) - f_i^+(u_1, \dots, v_j, \dots, u_m) \leq 0$ in quanto f_i^+ è crescente nel j -esimo argomento e $v_j > u_j$.

Analogamente se $i \in \sigma_1$ si ha comunque $g_i(w) \leq 0$. □

Osservazione 11. Il teorema precedente ci dice che a seconda di come scelgo la partizione di \mathbb{Z}_m ottengo delle limitazioni dal basso e dall'alto per ogni componente del sistema per ogni $t \in \mathbb{R}^+$ infatti considerando la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{v} = H_{\sigma_2}(v) \\ v(0) = v^0 \end{cases} \quad (3.18)$$

relativamente alla partizione $\sigma_2 = \{1, 2, \dots, m\}$ si ha $H_{\sigma_2} = (f_1^+, \dots, f_m^+)$ (vettore massimo associato) e quindi

$$u_i(x, t) \leq v_i(t) \equiv v_i^+(t), \forall i, \forall t$$

mentre considerando la partizione $\sigma_2 = \{\emptyset\}$ si ha $H_{\sigma_2} = (f_1^-, \dots, f_m^-)$ (vettore minimo associato) e quindi

$$u_i(x, t) \geq v_i(t) \equiv v_i^-(t), \forall i, \forall t$$

Capitolo 4

Due esempi fisicamente interessanti

In ogni situazione che studieremo considereremo le soluzioni $u_i(x, t)$ tali se non negative (in effetti non ha senso una popolazione la cui densità sia negativa!). Inoltre per mostrare l'invarianza del dominio si useranno le condizioni del corollario (2.2.2) in forma estesa (grazie all'osservazione (9), essendo i termini di reazione considerati, localmente lipschitziani); in ogni caso di potrebbe inoltre verificare (facilmente) anche la quasi-monotonia dei termini di reazione su cui lavoreremo.

4.1 Modello Preda-Predatore

Il primo modello sul quale ci occupiamo di utilizzare i risultati svolti è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{u} = D_1 \Delta u + Au(1 - \frac{u}{k}) - Buv \\ \dot{v} = D_2 \Delta v + cu - Dv \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ v(x, 0) = v_0(x) \end{cases} \quad (4.1)$$

Questo sistema è un modello di tipo *Preda-Predatore*, dove u rappresenta la densità delle prede nella nostra regione Ω , v quella dei predatori nella stessa regione, A, B, C, D costanti positive relative a proprietà intrinseche delle due popolazioni, e k la capacità che l'ambiente ha di sostenerle. Osserviamo attentamente la situazione che stiamo modellizzando:

La prima equazione ci dice, ad esempio, che la crescita delle prede tende a essere rallentata, frenata o anche invertita dall'incontro con i predatori (il termine $-Bv$). D'altra parte in assenza di predatori si osserva che asintoticamente (assumiamo che la diffusione sia trascurabile), l'evoluzione è data da $\dot{u} = Au(1 - \frac{u}{k})$, la cui semplice risoluzione (con i metodi standard) porta per $t \rightarrow \infty$ al valore $u = k$, ovvero in assenza di predatori, le prede non possono crescere indefinitamente. La seconda equazione invece, ci dice ad esempio che la crescita dei predatori v , è proporzionale

alla densità di prede (Il termine cu), ma d'altra parte è frenata dalla stessa quantità di predatori (il termine $-Dv$), la qual cosa è ragionevole in quanto indica che più predatori ci sono, minore saranno le prede a disposizione, e quindi minore potrà essere la crescita di v . Il fatto che il sistema soddisfi le condizioni di Neumann indica che le due popolazioni sono vincolate a rimanere su una regione limitata (il loro flusso sul bordo è nullo), per esempio stiamo analizzando un modello di prede e predatori localizzate su un'isola, oppure su un'riserva naturale. Per semplicità riscriviamo il sistema, definendo

$$\bar{u} = \frac{u}{k}, \quad \bar{v} = \frac{Bv}{A}, \quad t^* = At, \quad x^* = x \left(\frac{A}{D_2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad D^* = \frac{D_1}{D_2}, \quad a = \frac{Ck}{A}, \quad b = \frac{D}{ck}$$

e continuando a chiamare $u \doteq \bar{u}$, $v \doteq \bar{v}$, $t^* = t$, si ottiene il problema

$$\begin{cases} \dot{u} = uM(u, v) + D\Delta u \\ \dot{v} = vN(u, v) + \Delta v \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ v(x, 0) = v_0(x) \end{cases} \quad (4.2)$$

con $M(u, v) = 1 - u - v$, $N(u, v) = au - ab$ e poniamoci nel caso $b > 1$.

4.1.1 Alla ricerca di un dominio invariante

Per aiutarci nella ricerca disegniamo le rette in cui le componenti $M(u, v)$ e $N(u, v)$ si annullano. Infatti dal segno di $M(u, v)$ possiamo intuire se la componente $f_1(u, v)$ "spinge" il sistema a destra o sinistra, mentre da quello di $N(u, v)$ possiamo intuire se $f_2(u, v)$ "spinge" in alto o in basso. Considerando un rettangolo della forma $[0, h] \times [0, k]$ con $h \in (1, b)$ $k > 1$ abbiamo

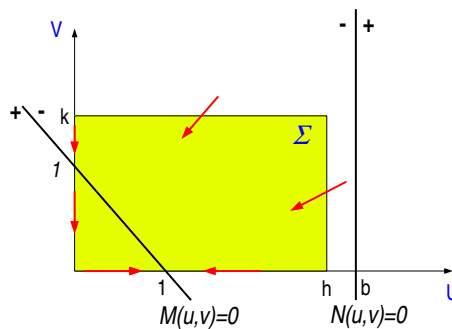


Figura 4.1: Le frecce indicano la "spinta" che il sistema riceve

Verifichiamo quindi il segno delle componenti di $F(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v))$ sul bordo:

$$\begin{aligned}
 F(0, v) &= (0, -abv) \implies f_1(0, v) = 0 \\
 F(u, 0) &= (u - u^2, 0) \implies f_2(u, 0) = 0 \\
 F(h, v) &= (h(1 - h - v), (v(ah - ab))) \implies f_1(h, v) < 0 \text{ se } h > 1 \\
 F(u, k) &= (u(1 - u - k), k(au - ab)) \implies f_2(u, k) < 0 \text{ se } u < b
 \end{aligned}$$

Quindi per l'osservazione (8) il rettangolo è invariante. A questo punto non ci resta che applicare il metodo di confronto per trovare proprietà asintotiche del sistema. In realtà se lo applicassimo esattamente a questo sistema non otterremmo informazioni rilevanti, per questo motivo consideriamo un sistema leggermente diverso di modello preda-predatore (già riscaldato) su cui continuare la nostra analisi, ovvero:

$$\begin{cases}
 \dot{u} = uM(u, v) + \alpha\Delta u \\
 \dot{v} = vN(u, v) + \Delta v \\
 u(x, 0) = u_0(x) \\
 v(x, 0) = v_0(x)
 \end{cases} \tag{4.3}$$

con $M(u, v) = (1 - u)(u - d) - cv$, $N(u, v) = cu - \alpha v - \eta$, $d \in (0, 1)$, c, α, η positive e $d < \frac{\eta}{c} < 1$ e $\alpha/c > 1$. In questo caso la situazione è più interessante in quanto il termine $M(u, v)$ presenta due zeri positivi nel piano delle fasi. Con lo stesso ragionamento di prima si ottiene che ogni dominio della forma $[0, a] \times [0, b]$ con $1 < a < \alpha/c$ e $b > 1$ è invariante, infatti nuovamente

$$\begin{aligned}
 F(0, v) &= (0, v(-v\alpha - \eta)) \implies f_1(0, v) = 0 \\
 F(u, 0) &= (u(1 - u)(u - d), 0) \implies f_2(u, 0) = 0 \\
 F(a, v) &= (a(1 - a)(a - d) - cv, v(ca - \alpha v - \eta)) \implies f_1(a, v) \leq 0 \Leftrightarrow a(1 - a)(a - d) \leq cv \\
 F(u, b) &= (u(1 - u)(u - d) - cb, b(cu - \alpha b - \eta)) \implies f_2(u, b) \leq 0 \Leftrightarrow u \leq \frac{\alpha b}{c} + \frac{\eta}{c}
 \end{aligned}$$

per cui graficamente si ha

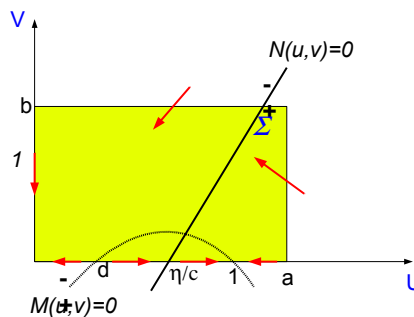


Figura 4.2: Le frecce indicano la “spinta” che il sistema riceve

4.1.2 Appliciamo il confronto

Applichiamo quindi a questo nuovo sistema le considerazioni del capitolo precedente.

Considerando la partizione $\sigma_2 = \{1, 2\}$ avremo il sistema associato

$$\begin{cases} \dot{u} = uM^+(u, v) = u \sup_{s \in [0, v]} M(u, s) = u(1-u)(u-d) \\ \dot{v} = vN^+(u, v) = v \sup_{s \in [0, u]} N(s, v) = v(cu - \alpha v - \eta) \\ \bar{v}_0 = \sup_x v_0(x) \\ \bar{u}_0 = \sup_x u_0(x) \end{cases} \quad (4.4)$$

Considerate quindi le soluzioni $u(t), v(t)$ di (4.4) si ha per il teorema di confronto che

$$0 \leq u(x, t) \leq u(t) \quad \forall t$$

$$0 \leq v(x, t) \leq v(t) \quad \forall t$$

Riguardo la risoluzione della prima possiamo osservare che essa ha come soluzioni stazionarie $u_1 \equiv 1, u_1 \equiv d, u_1 \equiv 0$, quindi preso sempre $0 < u_0(x) < d$ si ha per la stretta decrescenza della soluzione (la derivata è negativa!) che necessariamente $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$. Per il confronto quindi anche $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$.

Per risolvere la seconda, poichè ci interessa il comportamento del sistema per tempi grandi, e avendo osservato che la soluzione u è infinitesima per $t \rightarrow \infty$, avremo che $\forall \varepsilon > 0$ esiste \bar{t} tale che $\forall t > \bar{t} \ u(x, t) < \varepsilon$. Quindi considerata l'equazione $\dot{w} = w(c\varepsilon - \alpha w - \eta)$ con dato iniziale $w(0) = \bar{v}_0$, si ottiene $v(t) \leq w(t)$ e quindi poichè la soluzione dell'equazione relativa a w si calcola facilmente e vale

$$w(t) = \frac{(c\varepsilon - \eta)\bar{v}_0}{((c\varepsilon - \eta) - \alpha\bar{v}_0)e^{-(c\varepsilon - \eta)t} + \alpha\bar{v}_0}$$

Tale soluzione per $t \rightarrow \infty$ tende a zero se $(c\varepsilon - \eta)$ è negativo. Per come abbiamo scelto i coefficienti si ha che ciò è verificato qualora $\varepsilon < d$, per cui anche $v(t)$ tenderà a zero qualora $u_0(x) < d$, quindi scegliendo $u_0(x)$ minore di d si ottiene (per il confronto) $\lim_{t \rightarrow \infty} v(x, t) = 0$.

L'interpretazione fisica è interessante: in una situazione in cui vi sono prede e predatori si ha che se il numero di prede a disposizione inizialmente è troppo basso prede e predatori saranno destinati entrambi all'estinzione, infatti concettualmente si avrà un'estinzione di prede dovuta ai predatori ($u(x, t) \rightarrow 0$), i quali tenderanno poi a estinguersi per mancanza di prede necessarie al loro sostentamento.

4.2 Un Modello di Competizione (scoiattoli rossi vs scoiattoli grigi)

All'inizio del XX secolo parte della specie degli *Sciurus carolinensis*, noti come **scoiattoli grigi** fu trasferita dalle regioni del nord America fino alla Gran Bretagna, dove vi erano già scoiattoli della specie *Sciurus vulgaris* noti anche come **scoiattoli rossi**. Quello che nel tempo si osservò fu una lenta estinzione della specie indigena a favore di quella colonizzante.

Il modello che ora qui studiamo è proprio quello inerente a questa situazione, dove, se vogliamo, le condizioni di Neumann si riflettono nel dire che non vi era flusso uscente dall'isola, o più realisticamente dalle foreste nelle quali le specie convivevano. Il sistema (già riscaldato per semplicità) che modella la situazione è

$$\begin{cases} \dot{u} = uM(u, v) + \Delta u \\ \dot{v} = vN(u, v) + k\Delta v \\ u(x, 0) = u_0(x)v(x, 0) = v_0(x) \end{cases} \quad (4.5)$$

con $M(u, v) = 1 - u - av$, $N(u, v) = 1 - v - cu$ e $0 < a < 1, c > 1, k > 0, (1-a)c > 1$. Il termine v si riferisce agli scoiattoli indigeni (rossi) mentre il termine u a quelli colonizzanti (grigi).

4.2.1 Alla ricerca di un dominio invariante

Anche in questo caso ci aiutiamo graficamente e proviamo a considerare un dominio della forma $[0, 1] \times [0, b]$ con $b \geq 1$ arbitrario, avremo quindi (nel disegno abbiamo posto $b = a^{-1}$)

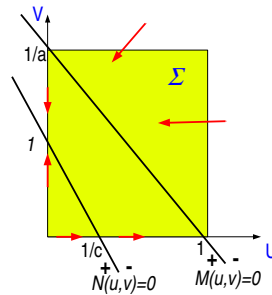


Figura 4.3:

Anche in questo caso la regione risulta invariante, infatti:

$$F(u, 0) = (u - u^2, 0) \implies f_2(u, 0) = 0$$

$$F(0, v) = (0, v(1 - v)) \implies f_1(0, v) = 0$$

$$F(1, v) = (-av, v - v^2 - cv) \implies f_1(1, v) < 0$$

$$F(u, b) = (u(1 - u - ab), b - b^2 - bcu) \implies f_2(u, b) < 0$$

4.2.2 Applichiamo il confronto

Consideriamo in primo luogo la partizione $\sigma_2 = \{1, 2\}$, il sistema associato è quindi

$$\begin{cases} \dot{u} = u \sup_{s \in [0, v]} (1 - u - as) = u(1 - u) \\ \dot{v} = v \sup_{s \in [0, u]} (1 - v - cs) = (1 - v)v \\ \bar{u}_0 = \sup_x u_0(x) \\ \bar{v}_0 = \sup_x v_0(x) \end{cases} \quad (4.6)$$

Studiamo quindi l'andamento asintotico di una delle due equazioni (sono uguali!). Anche in questo caso l'equazione differenziale ordinaria è piuttosto semplice e da come soluzione

$$u(t) = \frac{\bar{u}_0}{(1 - \bar{u}_0)e^{-t} + \bar{u}_0} \longrightarrow 1 \text{ se } t \longrightarrow \infty$$

Pertanto dal teorema di confronto abbiamo che qualunque siano i dati iniziali scelti, si ha che per tempi grandi il sistema tende a portarsi nel rettangolo (invariante!) $[0, 1] \times [0, 1 + \varepsilon]$ con ε piccolo a piacere. Cerchiamo ora confrontando con altre equazioni relative ad altre partizioni di migliorare tale stima. Sia quindi $\sigma_2 = \{\emptyset\}$, e delle due equazioni occupiamoci di fare il confronto solo sulla prima (sulla seconda vedremo infatti che un'altra partizione ancora risulta sufficiente a localizzare $v(x, t)$ per tempi grandi). Il problema associato e' quindi

$$\begin{cases} \dot{u} = u \inf_{s \in [v, 1 + \varepsilon]} (1 - u - as) = u(1 - u - a(1 + \varepsilon)) = u((1 - a - \varepsilon) - u) \\ \bar{u}_0 = \sup_x u_0(x) \end{cases} \quad (4.7)$$

Risolvendo l'equazione differenziale si ottiene una soluzione $u(t)$ tale che $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 1 - a - \varepsilon$. Per cui per il teorema di confronto abbiamo ora una stima dal basso per $u(x, t)$ ovvero vale $u(x, t) \geq (1 - a - \varepsilon)$ per tempi sufficientemente grandi. Quindi per ora sappiamo che asintoticamente il sistema sarà confinato nella regione P della seguente figura

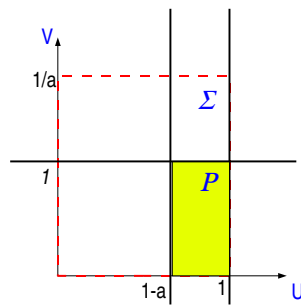


Figura 4.4:

Infine con un'ultima partizione arriviamo ad un'approssimazione ancora più precisa. Prendiamo $\sigma_2 = 2$ e consideriamo solo la seconda equazione del sistema. In questo caso abbiamo

$$\begin{cases} \dot{v} = v \sup_{s \in [u, 1]} (1 - v - cs) = v(1 - v - cu) \\ \bar{v}_0 = \sup_x v_0(x) \end{cases} \quad (4.8)$$

L'equazione è della stessa forma della precedente anche se in questo caso risulta dipendere anche dalla soluzione u . Con un ragionamento analogo a quanto fatto per la seconda equazione del secondo modello preda-predatore si può considerare un'equazione differenziale $\dot{w} = w(1 - v(1 - a) - c(1 - a))$, risolvere questa (con dato iniziale \bar{v}_0), e osservare che in questo caso si ha che se $b(1 - c(1 - a)) < 0$ allora la soluzione $w(t)$ tende a zero per tempi grandi, per cui (poiché anche qui $v(t) \leq w(t)$) si avrà convergenza a zero della $v(t)$. Nel nostro caso ciò vale perché dalle stime precedenti si aveva $u(x, t) \geq 1 - a > \frac{1}{c}$ asintoticamente. Quindi in conclusione la situazione finale sarà

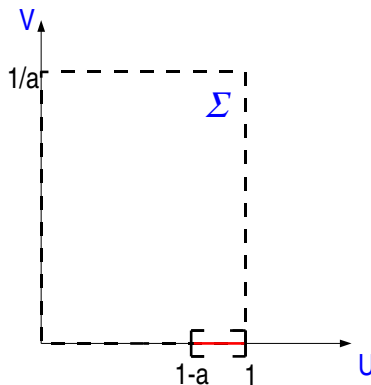


Figura 4.5:

Ovvero assistiamo alla scomparsa della specie **scoiattoli rossi**, mentre la specie degli **scoiattoli grigi** sarà localizzata in un intervallo di densità tra $(1-a)$ e 1 . Questo è proprio ciò che nel tempo si è verificato in Gran Bretagna.

Osservazioni finali.

Nei due sistemi che abbiamo analizzato abbiamo sempre ottenuto una situazione limite, ovvero una situazione che ha sempre portato all'estinzione almeno di una delle due popolazioni. Ciò è dovuto ovviamente alla natura dei coefficienti scelti. In alcuni casi infatti si possono studiare casi (tramite metodi che vanno oltre quello di confronto) nei quali si ottiene una certa ciclicità degli eventi.

Ovvero per esempio prendendo il modello preda-predatore si può in determinate condizioni presentarsi la seguente situazione:

se le prede iniziali non sono abbondanti può verificarsi una diminuzione di predatori (in quanto le prede non riescono a soddisfare le necessità di tutti), la qual cosa porta quindi a un aumento di prede (essendo minacciate da meno predatori), e ciò porta quindi a un aumento di predatori (in quanto ci sono più prede a disposizione) che porta quindi a una diminuzione di prede, e il ciclo si ripete.

Un altro tipo di analisi che si può effettuare su modelli di sistemi di reazione diffusione e quello riguardanti le *onde viaggianti*, ovvero si tratta di un'analisi che descrive il modo con cui un sistema passa da uno stato di equilibrio all'altro a causa di una perturbazione.

Ma questa è un'altra storia...

Bibliografia

- [1] Joel Smoller. *Shock waves and reaction-diffusion equations*. Springer, 1994.
- [2] Murray, Dickson. *Mathematical biology*. Springer, 1989.
- [3] Keener, James. *Mathematical physiology*. Springer, 1998.
- [4] Dym, McKean. *Fourier series and integrals*. Academic Press, 1972.
- [5] Friedman. *Partial differential equations of parabolic types*. Prentice-Hall, 1964.
- [6] Duffy. *Green's functions with application*. Chapman & Hall, 2001.
- [7] C.V.Pao *Nonlinear parabolic and elliptic equations*. Plenum Press, 1992.
- [8] Mascia. *Note del corso: Modelli analitici per le Applicazioni II*.