LICEO – GINNASIO STATALE

"GIUSEPPE PALMIERI"

LECCE

TESINA ESAMI DI STATO

LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

CANDIDATA: SARA MANNI

CLASSE III LICEALE – SEZ. A

A.S. 2008/09

PREFAZIONE

«Alla base di ogni grande scoperta, di ogni rivoluzione nel campo della scienza, c'è una conquista morale: l'abbattimento di un idolo saldamente insediato e abbarbicato fra le pieghe della nostra anima.»

Eugenio Colorni

Un pomeriggio di maggio, sorseggiando una tazzina di caffè e sfogliando le pagine del Corriere della Sera, mi sono imbattuta in un articolo di Giulio Giorello sulla figura di Eugenio Colorni, filosofo antifascista vissuto nella prima metà del '900.

Nel panorama italiano, Colorni è uno dei primi ad interessarsi al problema della scienza e in particolare all'idea di progresso scientifico: per il filosofo, l'avanzamento nel campo del sapere è possibile solo se si possiede la capacità di attaccare qualunque «idolo» blocchi la crescita intellettuale del singolo e il miglioramento della società. Gli idoli, per Colorni, sono rappresentati dal geocentrismo prima della rivoluzione copernicana, dal finalismo della natura prima del pensiero evoluzionistico darwiniano, dalla concezione assoluta di spazio e tempo di Newton prima della teoria della relatività di Einstein; in sostanza, idoli sono tutti quei sistemi protetti dall'autorità della tradizione, dall' «ipse dixit» di aristotelica memoria, i quali appaiono verità immodificabili e necessarie da accettare.

La storia della matematica ci offre più di un esempio di questa tendenza: si racconta che Pitagora, di fronte alla dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ sottopostagli da Ippaso, pur di non mettere in discussione le proprie teorie sui numeri, preferì ricorrere alla forza e far condannare a morte il suo discepolo per annegamento.

Meno cruenta, ma ugualmente interessante, è la storia che riguarda il quinto postulato di Euclide: nonostante la sua non evidenza, esso è stato ritenuto valido e necessario per secoli e secoli dalle più brillanti menti matematiche, fino a che nel XIX secolo qualcuno ha osato mettere in dubbio questa verità, apparentemente ineludibile.

Il mio percorso parte dall'«idolo», dal*la verità*, da Euclide e giunge, attraverso un essenziale *excursus* storico, alla nascita di nuovi modelli, del*le verità*, delle geometrie non euclidee di Riemann e Lobačevskij, che qui vengono analizzate nei loro aspetti basilari.

«Un giorno, il re Tolomeo stava visitando la Biblioteca e, nel passare in rassegna le opere che vi erano conservate, si fermò a lungo davanti agli scaffali che accoglievano i numerosi rotoli degli *Elementi*, ordinatamente riposti negli astucci. Voltandosi di colpo verso Euclide, gli domandò se non esisteva una via più breve per accostarsi ai segreti della matematica. "Non esiste nessuna strada regale che porti alla geometria", rispose Euclide, dimostrando un notevole coraggio.»

da *Il teorema del pappagallo*, D. Guedj

La morte di Alessandro Magno (323 a.C.) aveva dato il via ad una serie di lotte intestine fra i suoi generali per decidere chi avesse più diritto ad ambire al titolo di successore. Ma, nel 306 a.C., il controllo della parte egiziana dell'impero era ormai saldamente nelle mani di Tolomeo I, detto Σωτήρ (*il salvatore*). Compagno d'armi di Alessandro e uomo sensibile alla cultura, Tolomeo fu uno dei primi sovrani ad invitare ed accogliere nel suo regno letterati, filosofi e scienziati provenienti da ogni parte del mondo antico. Fra questi, anche l'esule Demetrio Falereo, amico del noto commediografo Menandro. Arconte di Atene per dieci anni, ma costretto alla fuga in seguito al cambiamento di regime politico da parte di Demetrio Poliorcete, il Falereo aveva un ambizioso piano: mettere in atto il progetto aristotelico di sapere universale, riunendo nello stesso luogo tutto lo scibile umano. Tolomeo accolse subito con favore questo grandioso disegno e gli accordò il permesso di fondare due istituzioni destinate a divenire celeberrime: il Museo, in cui i più eminenti uomini del tempo si riunivano a discutere e studiare, e la Biblioteca, dove erano raccolti e catalogati papiri provenienti da ogni parte del mondo.

Mentre l'Accademia platonica e il Liceo aristotelico erano istituzioni private, finanziate tramite donazioni dei discepoli, il Museo era un'istituzione pubblica, che viveva dei sussidi elargiti dal re ed era perciò da questi sottoposta ad uno stretto controllo.

L'edificio sorgeva nel Bruchion, nel cuore del centro cittadino, non lontano dal porto privato di Tolomeo, e comprendeva alcune costruzioni circondate da giardini e dotate di vari cortili interni. Strabone (secolo I a.C.), nella sua *Geografia*, ci fornisce questa descrizione:

«Della reggia fa parte il Museo. Esso comprende un peripato, un'esedra e una grande sala dove i dotti che appartengono al Museo consumano i pasti comuni; e in comune viene messo anche il denaro. Hanno un sacerdote che dirige il Museo e che un tempo era designato dai re e ora da Augusto».

Oltre alla gloria di farne parte, il Museo offriva dunque enormi vantaggi materiali: gli stipendiati, scelti dal re in persona, ricevevano vitto, alloggio e salario; inoltre, avevano la possibilità di consultare giorno e notte le migliaia di *volumina* presenti nella Biblioteca e di confrontare le proprie teorie con quelle degli studiosi più accreditati del tempo.

Fra i matematici che operarono ad Alessandria, degni di essere ricordati sono sicuramente Eratostene, Apollonio di Perge, Archimede; ma uno fra i primi stipendiati (e probabilmente il più celebre) fu **Euclide**.

Euclide rappresenta una delle personalità più interessanti dell'epoca ellenistica. La sua figura è avvolta nel mistero: non sappiamo da dove venisse, quando nacque, quando morì. Le uniche notizie a noi pervenute sono quelle di Proclo: egli ci informa che Euclide operò sotto il regno di Tolomeo I e visse qualche anno prima di Eratostene ed Archimede.
Le opere esistenti di Euclide sono fra i più antichi trattati matematici greci che ci siano rimasti. Tuttavia, più della metà di ciò che scrisse è andato perduto, comprese alcune delle sue opere più importanti. Cinque sono gli scritti pervenuti sino a noi: gli *Elementi*, i *Dati*, la *Divisione delle figure*, i *Fenomeni* e l'*Ottica*; fra questi, per la fortuna che ebbero tra contemporanei e successori, sicuramente i più importanti sono gli *Elementi* (Στοιχεῖα), in 13 volumi: dopo la *Bibbia*, sono, infatti, l'opera che ha avuto il maggior numero di edizioni.

Gli *Elementi* non erano, come si è talvolta pensato, un compendio di tutte le conoscenze geometriche del tempo; essi costituivano, invece, un manuale introduttivo che abbracciava tutta la matematica elementare, ossia l'aritmetica, la geometria sintetica e l'algebra.

Frammento degli Elementi di Euclide

Proclo descriveva gli *Elementi* come qualcosa che, rispetto al resto della matematica, aveva lo stesso tipo di rapporto che le lettere dell'alfabeto hanno rispetto al linguaggio. L'opera doveva presentarsi come un'imponente sintesi che metteva ordine, soprattutto dal punto di vista metodologico, in una serie di conoscenze accumulatesi nel corso dei secoli senza un criterio sistematico. In effetti, Euclide stesso non aveva pretese di originalità: il suo ruolo fu principalmente quello di ordinatore e sistematizzatore del sapere matematico conquistato sino a quel momento.

Gli *Elementi* sono suddivisi in 13 libri o capitoli: i primi sei riguardano la geometria piana, i tre successivi la teoria dei numeri, il libro X gli incommensurabili e gli ultimi tre la geometria solida, per un totale di 120 definizioni, 372 teoremi e 92 problemi.
All’inizio del libro I, troviamo enunciati tre gruppi di proposizioni: le definizioni (ὅροι), i postulati (αἰτήματα) e le nozioni comuni (κοιναὶ ἔννοιαι). Concentriamo, in particolare, la nostra attenzione sui 5 postulati, che riportiamo qui di seguito in lingua originale e in traduzione italiana:

α΄. Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
β΄. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ’ εὐθείας ἐκβαλεῖν.
γ΄. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.
δ΄. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.
ε΄. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ’ ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ’ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

1. Si postuli che da ogni punto si possa condurre una retta ad ogni altro punto.
2. E che ogni retta terminata si possa prolungare continuamente per diritto.
3. E che con ogni centro e distanza si possa disegnare una circonferenza.
4. E che tutti gli angoli retti siano uguali fra loro.
5. E che qualora una retta, avendone incontrate altre due, forma gli angoli interni e da una stessa parte minori di due retti, le due rette, prolungate all’infinito, si incontrino dalla parte in cui sono i due angoli minori di due retti.

È interessante rilevare il carattere “costruttivo” dei postulati: i primi tre, ad esempio, esplicitano la possibilità di eseguire determinate costruzioni (il primo e il secondo il tracciamento di rette, il terzo il tracciamento di cerchi). Anche il quinto postulato ha un intento costruttivo, in quanto stabilisce le condizioni affinché si possa costruire il punto di intersezione di due rette. L’unico postulato che non ha carattere costruttivo è il quarto; tuttavia esso funge da premessa indispensabile per il quinto.

In una qualunque teoria, i postulati non si dimostrano, essendo di per sé evidenti. Ma l’evidenza del quinto postulato non si realizza tanto facilmente.

Come possiamo vedere dalla figura 1, se $\alpha + \beta$ è molto più piccolo di 180°, il postulato è evidente, ma se lasciamo fisso α e facciamo aumentare β, risulta sempre più difficile pensare che *r* ed *s* di incontrino in un punto *P*, in quanto sperimentalmente ciò non si può verificare.

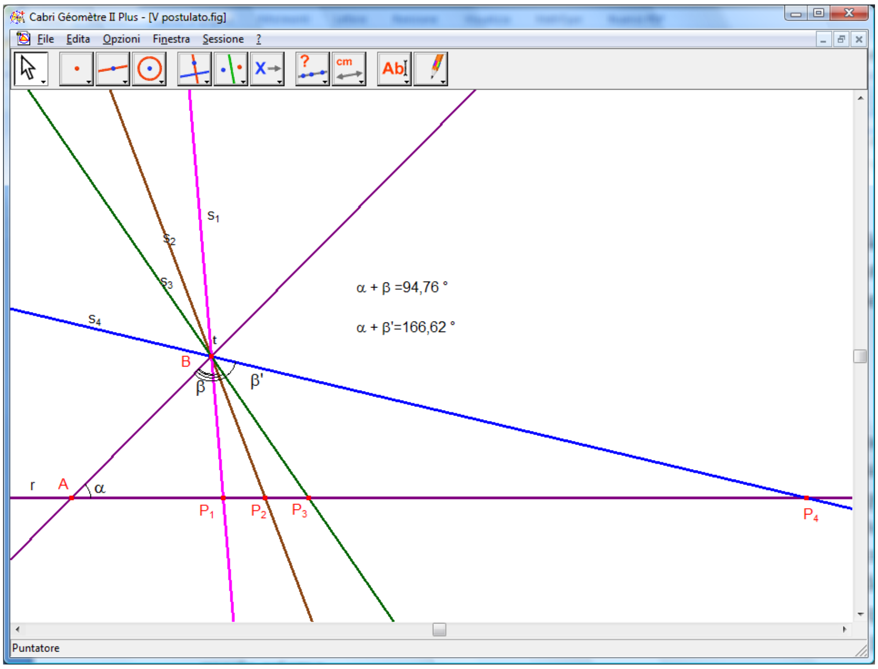


Figura 1.

Allora, dato che il quinto postulato non è evidente praticamente, ci si trova di fronte ad un bivio: o lo si accetta, o non lo si accetta. Lo stesso Euclide avanzava dei dubbi circa la sua validità, tant'è che nel primo libro egli dimostra le sue proposizioni prima non facendo uso del quinto postulato e poi facendone uso.

Euclide tentò anche di dimostrare, a partire dai primi quattro postulati, la veridicità del quinto, ma senza riuscirvi. Convinto però della sua legittimità, lo inserì allora come ultimo postulato, non potendone fare a meno.

Per gli stessi motivi che probabilmente spinsero Euclide a tentare una dimostrazione del quinto postulato, tutta la matematica occidentale, per più di venti secoli, cercherà di ottenere ciò che Euclide non era riuscito a trovare.


EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu.

Frontespizio originale dell'opera di Saccheri

Una svolta fondamentale sulla questione, si ebbe con il matematico e filosofo gesuita **Girolamo Saccheri** (1667-1733), autore di un'opera intitolata *Euclides ab omni naevo vindicatus, sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia* (1733). Questi, nel tentativo di far vedere che il quinto postulato discende necessariamente dai primi quattro, raggiunse (senza tuttavia accorgersene) lo scopo opposto, gettando le basi per teorie oggi note come **geometrie non euclidee**. I risultati di Saccheri rappresentano sì un punto di svolta, ma non perché con essi comincino a manifestarsi dei dubbi circa la validità del quinto postulato; anzi: egli era convintissimo di questa verità e cercò in ogni modo di fornirne una dimostrazione, senza rendersi conto di alcuni errori commessi nel procedimento.

Tra la fine del XVIII e l'inizio del XIX secolo si giunse alla convinzione che il quinto postulato, nonostante la sua non completa evidenza, fosse indispensabile per la fondazione della geometria: moltissime proposizioni geometriche fondamentali, infatti, dipendevano da esso o erano addirittura ad esso equivalenti. Ma dopo tanti tentativi di dimostrazione falliti, iniziò a farsi strada l'idea che fosse veramente indimostrabile a partire dagli altri postulati.

Da qui alla piena accettazione di modelli non euclidei, si dovrà attendere, però, ancora molti anni. Le ragioni principali di queste difficoltà furono non tanto di tipo logico-matematico, ma piuttosto legate a fattori culturali e psicologici: la geometria euclidea, che per secoli aveva dominato incontrastata, appariva ai matematici come l'unica possibile e veritiera.

I. Kant

Nel 1781, poi, la pubblicazione della *Critica della ragion pura* di **Immanuel Kant** costituì un ulteriore ostacolo all'accettazione di geometrie differenti da quella di Euclide. Secondo Kant, spazio e tempo sono forme pure a priori della sensibilità. In particolare, la geometria costruisce sinteticamente i suoi oggetti basando i suoi giudizi sull'intuizione pura dello spazio; poiché si basano sull'intuizione pura a priori dello spazio, le proposizioni geometriche estendono la conoscenza e sono, allo stesso tempo, universali e necessarie. Kant, in sintesi, afferma che: tutti i postulati di Euclide sono veri e dunque ogni proposizione contraddittoria ad essi è falsa; ogni postulato o teorema euclideo è tale che noi possiamo conoscere a priori che esso è vero; lo spazio è un'entità ideale, cioè appartiene puramente al modo in cui la mente umana reagisce alle cose; è possibile un'intuizione pura dello spazio, cioè la nostra conoscenza delle verità geometriche risulta dalla costruzione mentale che la facoltà dell'immaginazione pura esegue nel campo dell'intuizione pura.

K. F. Gauss

Il primo ad accorgersi consapevolmente della possibilità dell'esistenza di geometrie diverse da quella euclidea fu **Karl Friedrich Gauss** (1777-1885), che tuttavia non pubblicò mai nulla su questo argomento. Il 27 gennaio 1829, in una lettera al matematico Bessel, egli scrive:

«Nelle ore libere ho pensato anche a un altro tema, che per me è già vecchio di quasi quarant'anni, e cioè ai primi fondamenti della geometria: non so se Le ho mai parlato delle mie vedute in proposito. Anche qui ho consolidato ulteriormente molte cose, e la mia convinzione, che non possiamo fondare la geometria completamente a priori, è divenuta, se possibile, ancora più salda. Nel frattempo, non mi deciderò ancora per molto tempo a elaborare per una pubblicazione le mie molto estese ricerche sull'argomento, e ciò forse non avverrà mai durante la mia vita, perché temo gli strilli dei Beoti, qualora volessi completamente esprimere le mie vedute … ».

Il primo che affermò pubblicamente quanto Gauss aveva pensato fu il russo **Nikolaj Ivanovič Lobačevskij** (1793-1856), che nel 1826 pubblicò un articolo in cui espose i fondamenti di quella che chiamò "geometria immaginaria".

N. I. Lobačevskij

J. Bolyai

All'incirca nello stesso periodo, anche l'ungherese **János Bolyai** (1802-1860) espose le stesse tesi.

Con loro, nascevano a pieno titolo sistemi geometrici alternativi a quello euclideo.

Le geometrie non euclidee rappresentano un'importante estensione della geometria classica. Sostanzialmente, esse si basano sulla negazione del quinto postulato. Ma cosa significa negare il quinto postulato?

Per comprenderlo meglio, diamo una formulazione equivalente a quella proposta da Euclide negli *Elementi*: data una retta r e un punto P fuori di essa, per quel punto passa una ed una sola retta s parallela a quella data. Questa proposizione afferma non solo l'esistenza della retta s, ma anche la sua unicità; possiamo, quindi, negarla in due modi diversi e indipendenti:

1. postulando la non esistenza di rette parallele ad una retta data per un punto a questa esterno;

2. postulando l’esistenza di almeno due rette parallele ad una retta data passanti per un punto a questa esterno.

Sostituendo al quinto postulato una di queste negazioni, sono possibili rispettivamente due tipi di geometrie:

1. la **geometria di Riemann** o **geometria ellittica**
2. la **geometria di Lobačevskij** o **geometria iperbolica**

che analizziamo ora in maniera più approfondita.

RIEMANN E LA GEOMETRIA NON EUCLIDEA ELLITTICA: IL MODELLO DELLA SFERA

Immaginiamo che il nostro ambiente geometrico non sia più il piano euclideo (E^2), bensì la superficie di una sfera (S^2). (Il piano e la superficie di una sfera sono entrambi ambienti geometrici bidimensionali.)

Gli enti geometrici su cui si basa la geometria nel piano euclideo sono punti e rette; quali sono gli enti corrispondenti sulla superficie di una sfera? Ai punti del piano corrispondono naturalmente i punti di S^2. Ma cosa dobbiamo intendere per linea retta sulla superficie di una sfera?

Ogni piano che tagli una sfera determina per sezione un cerchio; questi cerchi hanno raggi diversi: si va dal raggio nullo (se il piano è tangente) alla situazione in cui il raggio è massimo ed è uguale al raggio della sfera.
Le circonferenze massime godono di due importanti proprietà:

- per ogni punto *P* sulla superficie di una sfera passano infinite circonferenze massime
- sulla superficie di una sfera, per ogni coppia *P*, *Q* di punti non antipodali (cioè non allineati col centro *O* della sfera) passa una e una sola circonferenza massima

Confrontiamo ora le proprietà delle circonferenze massime con quelle delle rette del piano euclideo. In E^2 una retta è individuata in modo univoco da due punti ed è l'unica linea a godere di questa proprietà. Similmente, sulla superficie di una sfera una circonferenza massima è individuata in modo univoco da due punti (purché non siano antipodali).
Ma possiamo osservare anche un'altra analogia fra rette e circonferenze massime.
Nel piano euclideo, un segmento di linea retta può essere definito come il percorso più breve fra due punti *A* e *B*. Sperimentalmente, se tendiamo un elastico tra due chiodini, vediamo che esso si dispone sul percorso minimo, cioè su un segmento di linea retta. Spostando l'elastico e lasciandolo andare, ci accorgiamo che dopo qualche oscillazione riassume lo stato di minima tensione.
Passiamo ora a considerare la superficie di una sfera. Se effettivamente le circonferenze massime sono equivalenti alle linee rette, dovremmo allora verificare che esse ci

forniscono il percorso più breve tra due punti di S^2. Procediamo ancora una volta sperimentalmente: prendiamo un pallone, tracciamo su di esso una circonferenza massima e fissiamo un elastico in modo che sia in leggera tensione tra due punti *A* e *B* di tale circonferenza. Vedremo che l'elastico si dispone esattamente su un arco della circonferenza massima; e se proveremo a spostarlo, vedremo che, una volta lasciato libero, si ridisporrà sulla circonferenza massima.

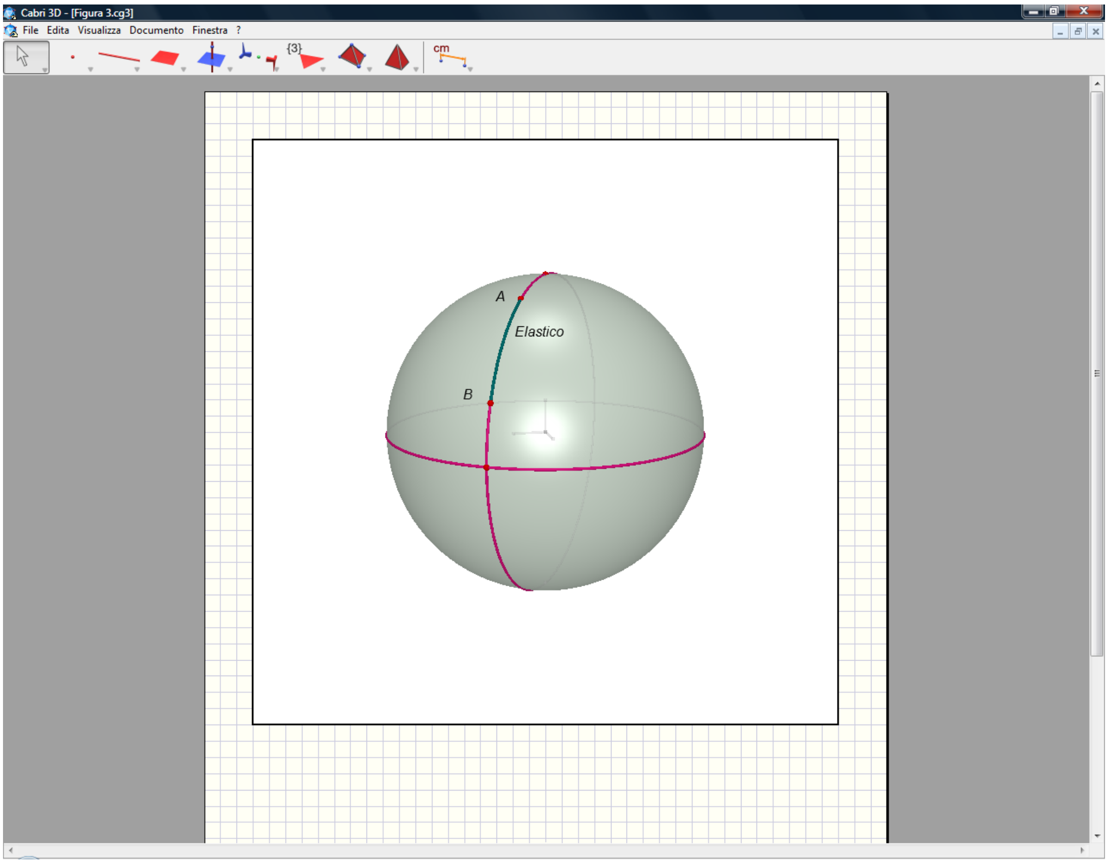
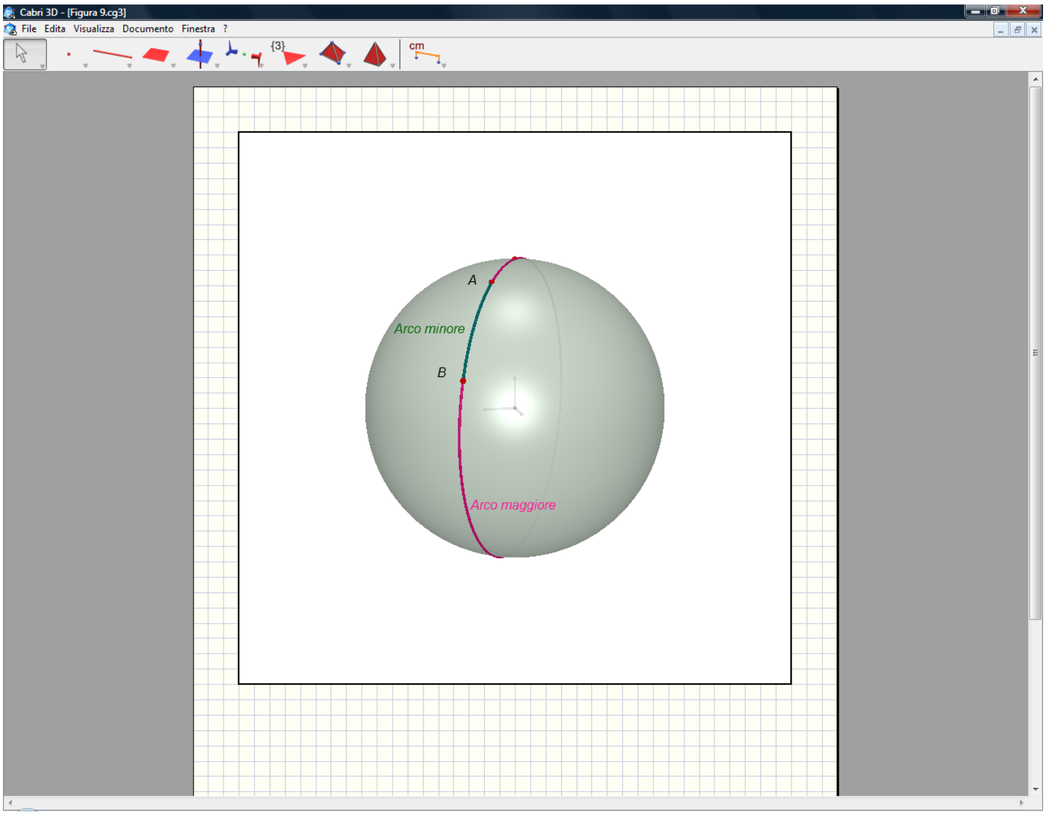


Figura 2.

Possiamo allora concludere che l'arco minore *AB* di circonferenza massima è il percorso più breve, sulla superficie sferica, tra i punti *A* e *B*. È necessario precisare che si tratta dell'arco minore poiché due punti *A* e *B* non antipodali individuano sulla circonferenza massima due archi, uno maggiore e uno minore: quello che, però, ci interessa è l'arco minore. Se i punti *A* e *B* fossero antipodali avremmo infiniti percorsi minimi, cioè tutte le semicirconferenze massime per *A* e *B*.



Dopo aver determinato il percorso minimo tra due punti sulla superficie sferica possiamo dare una definizione di distanza tra due punti: essa non è altro che la lunghezza dell'arco minore di circonferenza massima che collega *A* con *B*.

Le linee rette di E^2 e gli archi di circonferenza massima di S^2 si identificano nel concetto unificante di linea geodetica. Considerata una qualsiasi superficie Σ (la superficie di un cilindro, di una sfera, di un cono o anche un piano) e tracciata su di essa una linea *y*, quest'ultima si dice linea geodetica se ogni arco non troppo lungo di *y*, i cui estremi siano i punti *A* e *B*, è il percorso più breve da *A* a *B* tra tutti quelli tracciabili su Σ.

Nella figura 3, ad esempio, la linea blu non è una geodetica (è una circonferenza minore), quelle rosse sono geodetiche (sono circonferenze massime).

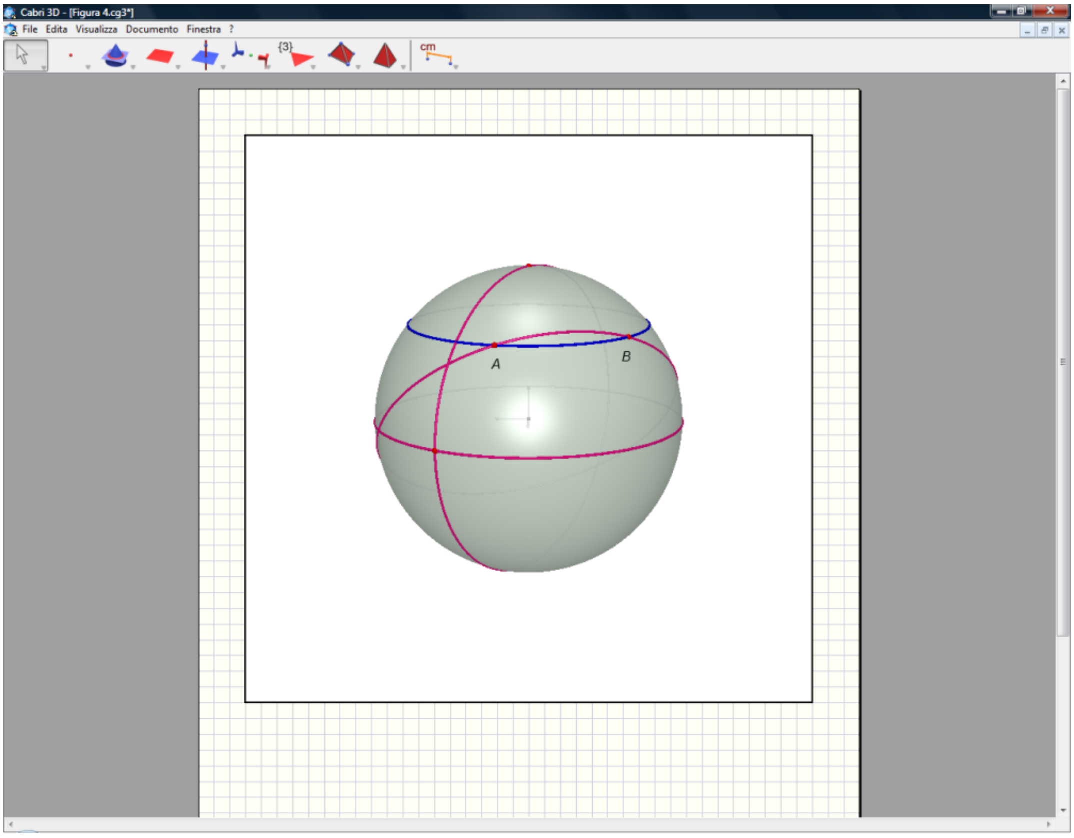


Figura 3.

In definitiva, per la geometria sviluppata sulla sfera, chiamiamo retta ogni linea geodetica e segmento ogni arco di geodetica.

A questo punto, possiamo definire l'angolo formato da due segmenti con un estremo in comune come quello formato dai due piani che contengono le due circonferenze massime su cui giacciono i segmenti.

Per esempio, nella figura 4 abbiamo i due segmenti AB e AC e le due circonferenze massime s e t su cui giacciono. Supponiamo che le due circonferenze massime dividano la superficie sferica di centro O in 4 regioni uguali.

L'angolo formato dai due segmenti sarà, allora, retto: i due piani ABO e ACO sono infatti perpendicolari. Inoltre, anche le due rette s e t si diranno perpendicolari.

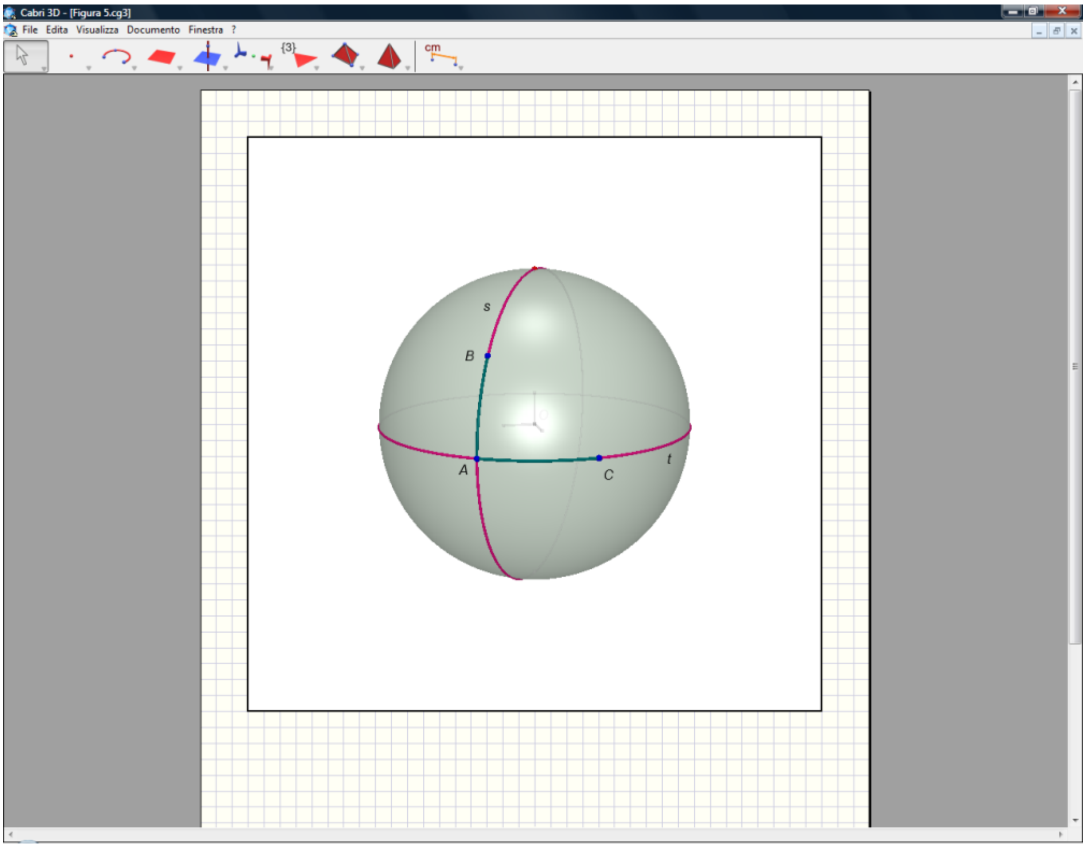


Figura 4.

Esaminiamo ora le principali caratteristiche non euclidee della geometria sferica:

- come per due punti del piano euclideo passa una e una sola retta, così accade per due punti non antipodali di S^2, ma per due punti antipodali passano infinite rette;
- mentre due rette euclidee hanno al più un punto in comune, due rette di S^2 hanno sempre due punti in comune;
- mentre nel piano euclideo esistono rette parallele, in S^2 non esistono rette parallele, cioè rette che non si intersecano. La figura 5 mostra due situazioni analoghe, l'una nel piano euclideo e l'altra in S^2. Si tratta di un fascio di rette perpendicolari alla retta *s*: nel piano euclideo queste rette non si incontrano (cioè sono tutte parallele), in S^2 si incontrano tutte nei due punti antipodali *P* e *P*'.

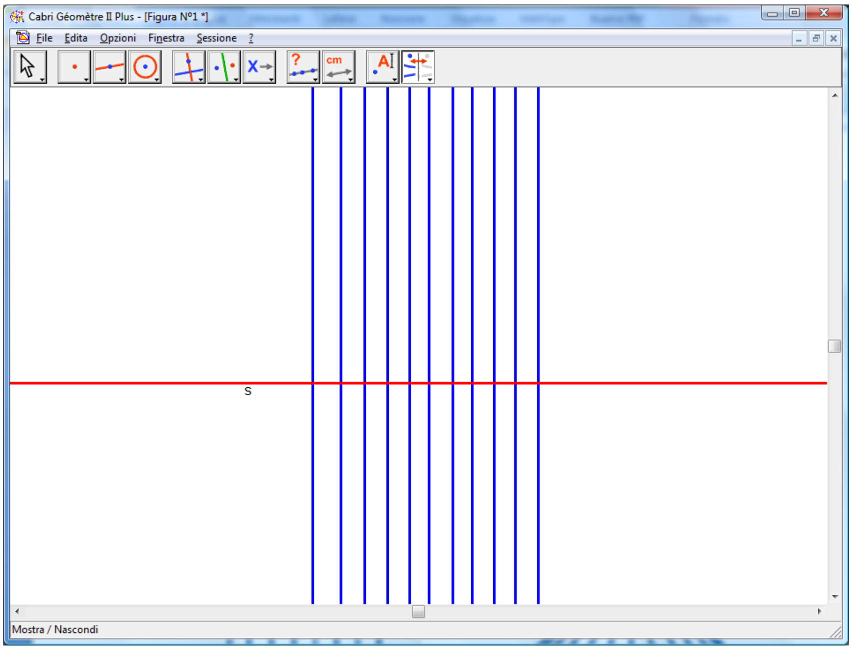
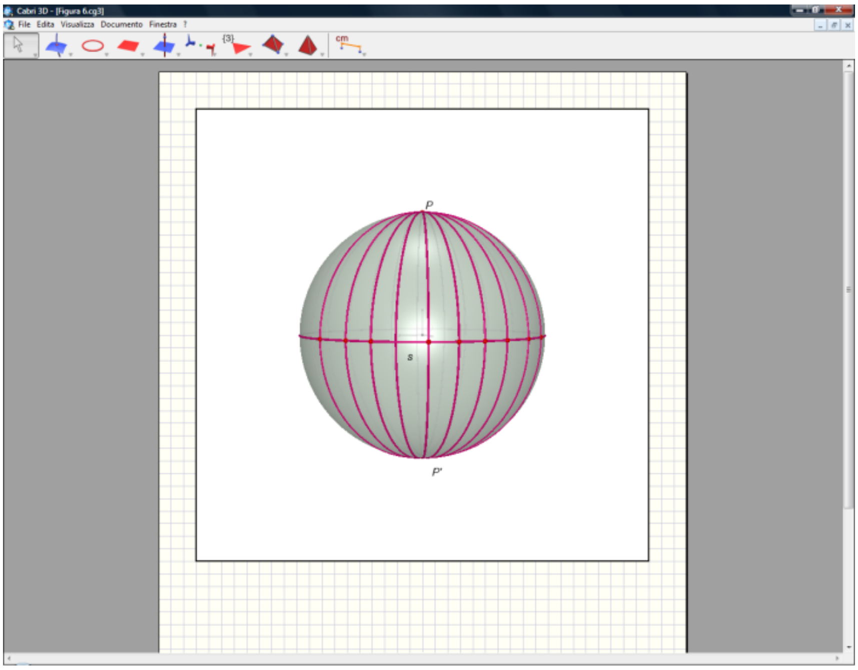


Figura 5.



I due punti *P* e *P’* prendono il nome di *poli* di *s* e la retta s prende il nome di *retta polare* dei punti *P* e *P’*. I due poli di *s* hanno la stessa distanza $\frac{\pi}{2}$ da ogni punto della retta *s*;

- nel piano euclideo esiste una e una sola retta passante per un dato punto *P* e perpendicolare a una data retta *s*; in S^2 ciò è vero se e solo se *P* non è un polo per *s*, come ci esplica la figura 6;

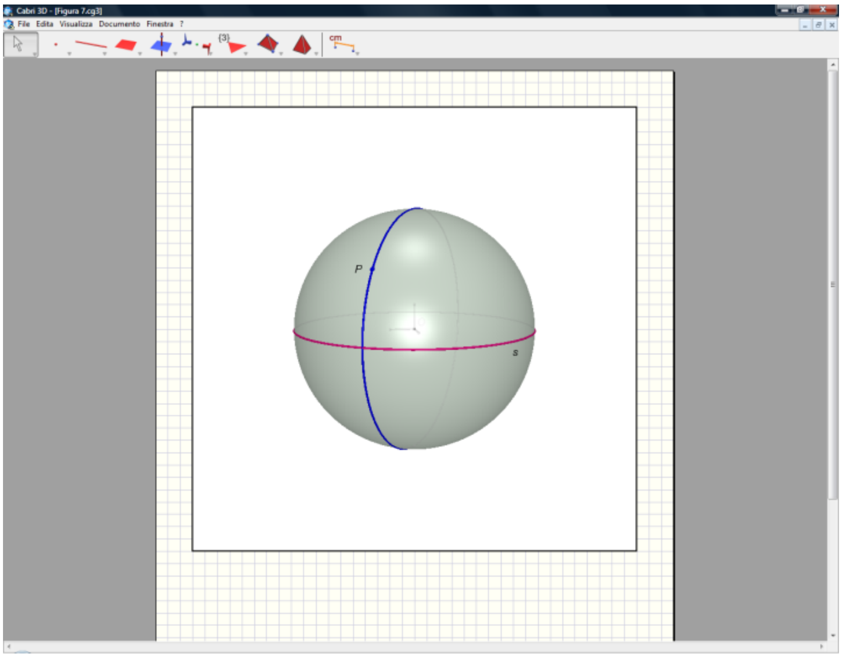
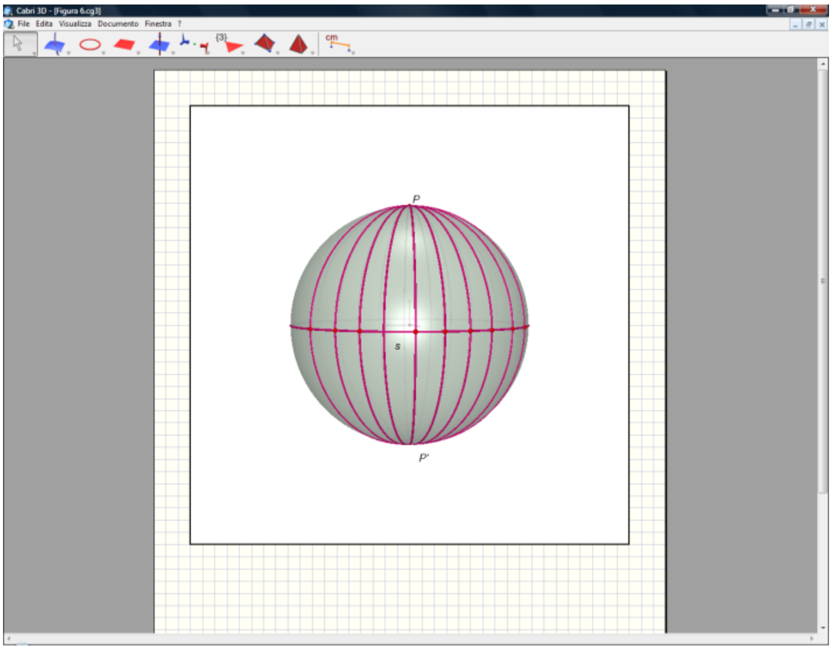


Figura 6.



- mentre le rette euclidee sono infinitamente estese, le rette di S^2 hanno tutte la stessa lunghezza finita 2π;
- mentre il piano euclideo è infinitamente esteso, S^2 ha area finita 4π;
- di tre punti qualsiasi di una retta euclidea, uno e uno solo sta fra gli altri due; ma la stessa cosa non si può dire per una retta di S^2, trattandosi di una linea chiusa. Dalla figura 7, notiamo che nel caso euclideo per andare da A a B è necessario passare per C (quindi C sta fra A e B), nel caso di S^2 è possibile andare da A a B

senza passare per *C*. Inoltre, nel piano euclideo due punti individuano uno ed un solo segmento, mentre in S^2 ne individuano due.

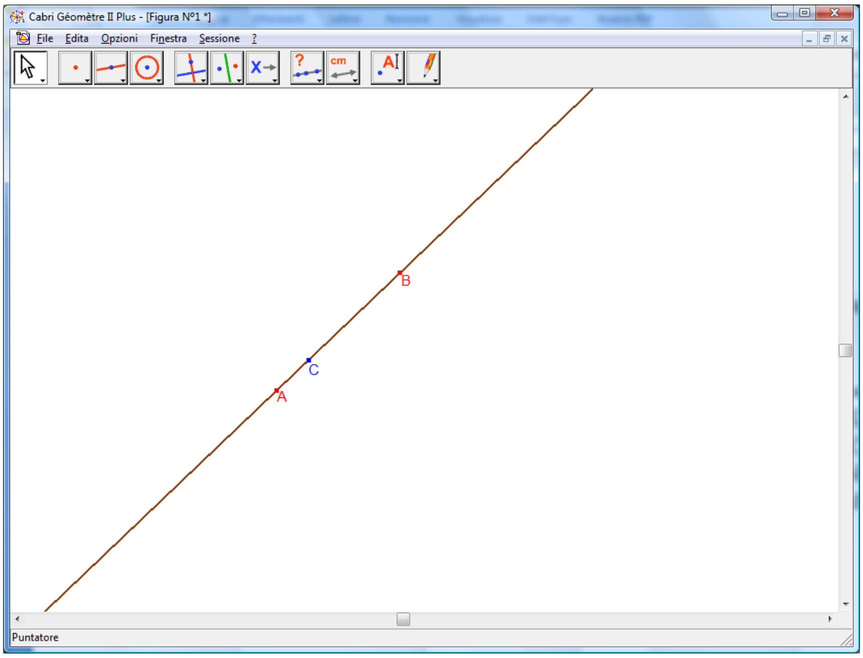
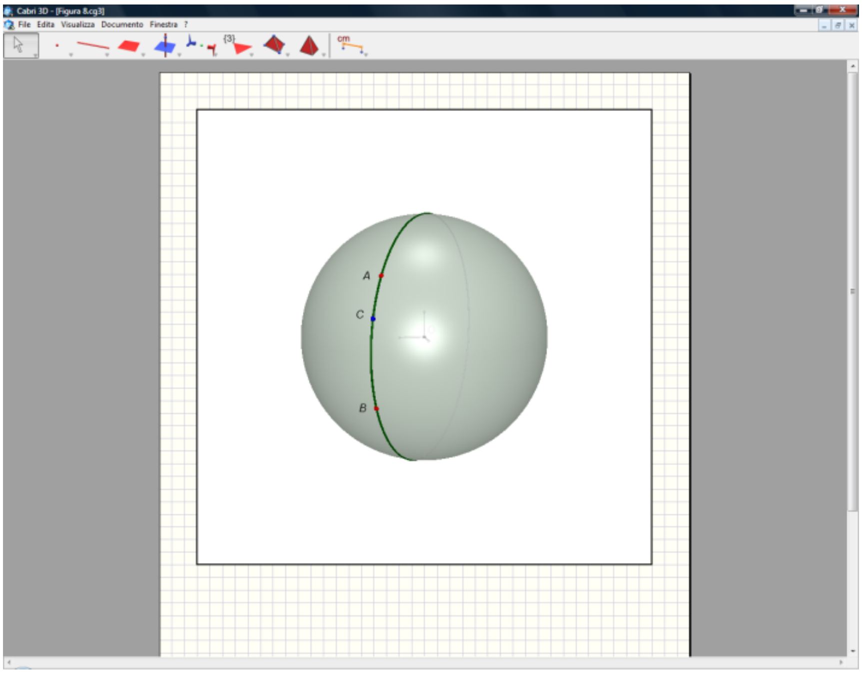


Figura 7.



Dall’analisi fin qui svolta, deduciamo che in questa geometria vale l’assioma ellittico: due rette si intersecano sempre. Pertanto, la geometria di S^2 è una geometria ellittica.

In questo modello, però, non viene negato solo il quinto postulato. È necessario anche modificare il primo postulato (poiché non è vero che per due punti distinti passa un’unica retta) e riflettere sulle conseguenze del secondo: ogni segmento di S^2 può effettivamente essere prolungato in una retta, ma le rette di S^2 sono linee chiuse per cui un punto *P* può muoversi indefinitamente su di esse, essendo tuttavia destinato a riassumere le stesse posizioni; le rette euclidee sono infinite mentre quelle ellittiche hanno lunghezza finita.

Analizziamo ora un'altra importante conseguenza di questa negazione del quinto postulato. Nella geometria euclidea, è proprio il quinto postulato a garantire che la somma degli angoli interni di un triangolo misuri sempre 180°; ma cosa accade, invece, nella geometria ellittica?
Nella figura 8 è rappresentato un triangolo sferico, i cui tre lati sono segmenti di S^2, cioè archi geodetici. Nel piano euclideo tre punti non allineati individuano uno ed un solo triangolo, ma su S^2 dobbiamo precisare a quale delle due regioni ci riferiamo. Chiamiamo allora triangolo sferico quella regione, delle due, che ha area minore.

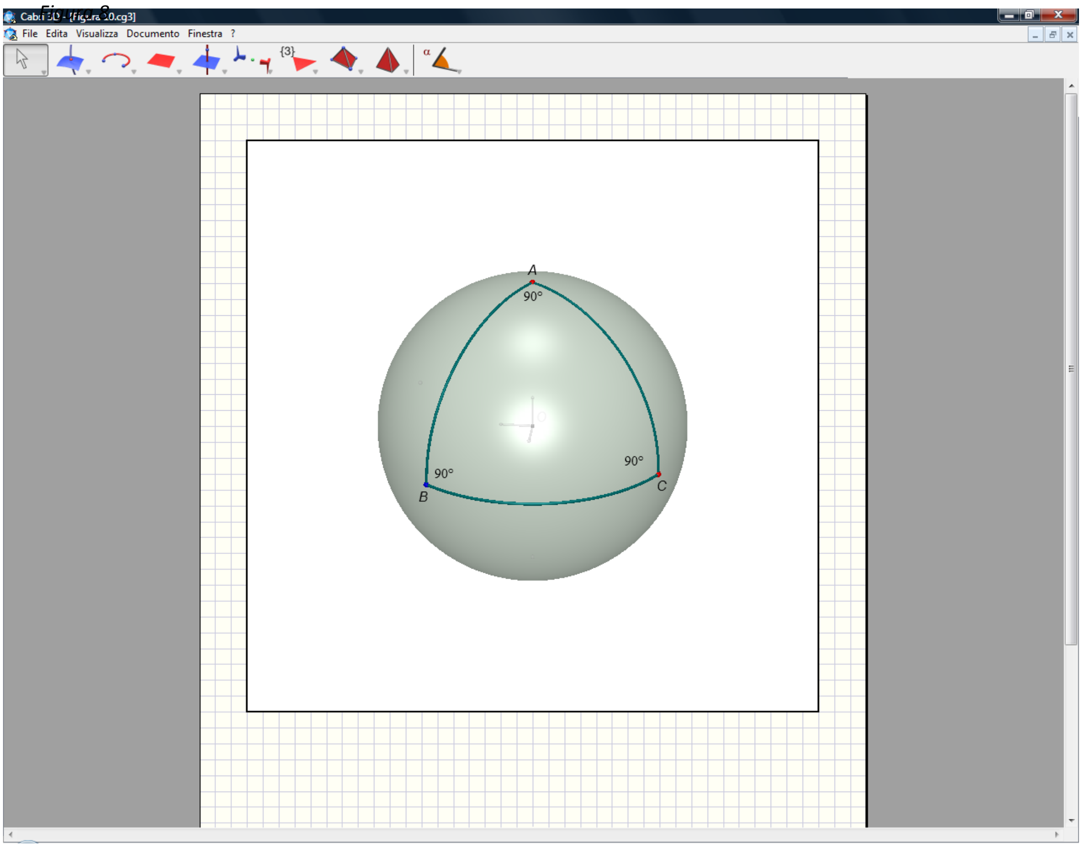


Figura 8.

La cosa più importante da osservare è la somma degli angoli che, nel caso in figura, è di 270°. Viene dunque a cadere il teorema euclideo sulla somma degli angoli interni di un triangolo.

Inoltre, mentre la somma degli angoli è costante per i triangoli euclidei, per i triangoli sferici tale somma varia al variare del triangolo.

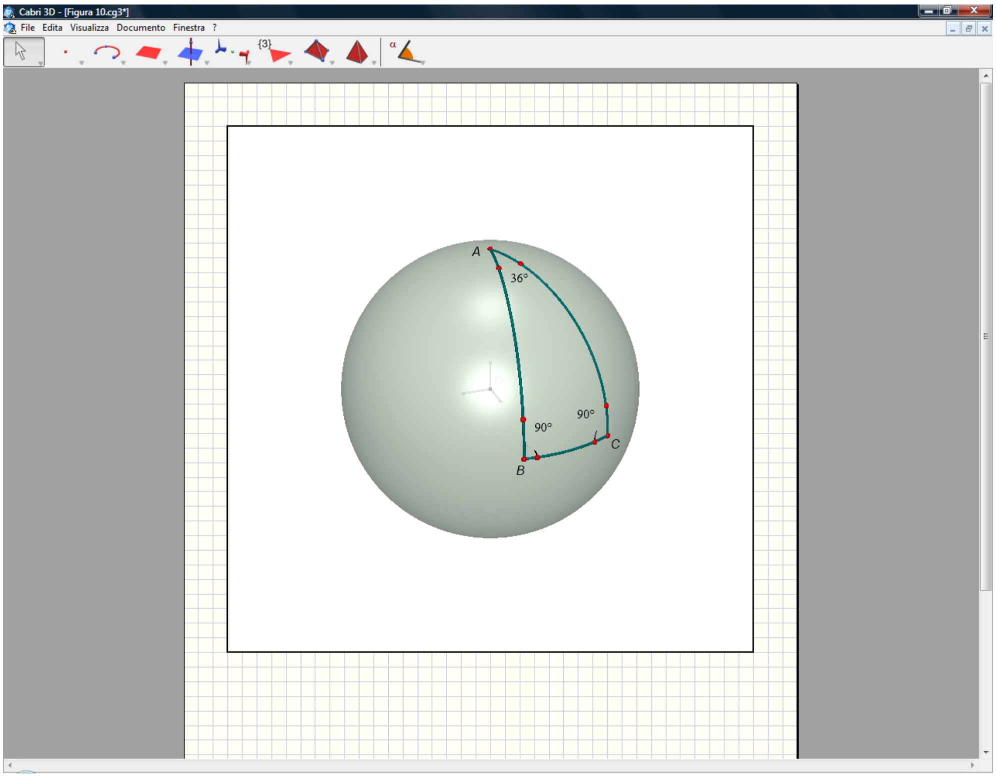


Figura 9.

→ LA GEOMETRIA DELLA SFERA NELLA CARTOGRAFIA

Uno tra gli aspetti più interessanti del passaggio dal modello sferico a quello euclideo è sicuramente il problema delle proiezioni geografiche, ossia i procedimenti escogitati dagli studiosi per riportare sul piano la superficie (quasi) sferica della Terra. Esse consistono nel trasportare il reticolato geografico dalla forma sferica a quella piana. In effetti, i meridiani terrestri possono essere considerati come le geodetiche della sfera di Riemann: come costruire allora un sistema di riferimento sufficientemente preciso e fedelmente corrispondente alla realtà nel piano?

Un metodo che permetta di riprodurre in maniera perfetta la superficie sferica non esiste, ma sono state elaborate proiezioni che consentono di ridurre al minimo le deformazioni e di calcolare anche gli errori che inevitabilmente si commettono nella rappresentazione grafica.

Sostanzialmente, le proiezioni geografiche si dividono in:

- proiezioni pure, in cui il reticolato geografico viene riportato su di una superficie ausiliaria (come un piano o un solido sviluppabile in piano), applicando i soli principi geometrici;
- proiezioni modificate, che si ottengono dalle precedenti, apportando alla costruzione geometrica delle correzioni necessarie a diminuire le deformazioni derivanti dal fatto che la superficie terrestre non è perfettamente sviluppabile in piano;
- proiezioni convenzionali, che sono basate sulle relazioni matematiche esistenti fra i punti del globo terrestre e quelli corrispondenti sulla carta; in questo modo, a seconda degli scopi che ci si propone, è possibile costruire carte che rispettino l'equidistanza (cioè la costanza del rapporto tra le lunghezze grafiche e le corrispettive reali), l'equivalenza (cioè la costanza del rapporto tra le aree grafiche e le corrispettive reali) o l'isogonia (cioè l'uguaglianza fra gli angoli grafici e i corrispettivi reali).

Tra le proiezioni modificate, la più nota e diffusa è quella di Mercatore, una proiezione cilindrica in cui sono apportate alcune modifiche per ovviare al notevole schiacciamento delle regioni prossime ai poli. I meridiani e i paralleli sono rappresentati da due fasci di rette parallele, fra loro perpendicolari; ma mentre i meridiani si mantengono equidistanti, i paralleli si distanziano sempre più uno dall'altro con l'aumento della latitudine. Di conseguenza, le aree molto distanti dall'equatore appaiono esageratamente ingrandite, mentre in compenso la forma delle terre si mantiene esatta. Questa proiezione, che è isogonica, viene adoperata anche per le carte nautiche, grazie alla sua proprietà di rappresentare mediante un segmento di retta ogni lossodromia, ossia ogni linea che sulla superficie terrestre taglia i meridiani sempre sotto lo stesso angolo. In effetti, nella navigazione non sempre si segue il percorso più breve che separa il punto di partenza da quello di arrivo, cioè la linea ortodromica (ορτός = *dritto*), che sulla superficie terrestre corrisponde all'arco di circonferenza massima congiungente i due punti; per poter fissare e mantenere una data rotta, molto spesso si preferisce seguire una linea che interseca tutti i meridiani sotto lo stesso angolo e quindi mantiene sempre la stessa direzione rispetto ai punti cardinali, cioè la linea lossodromica (λοξός = obliquo).

LOBAČEVSKIJ E LA GEOMETRIA IPERBOLICA: IL PIANO DI POINCARÉ

Nel descrivere la geometria di Lobačevskij, prendiamo in esame il modello elaborato da **Jules Henry Poincaré**. Egli presentò tale modello sotto forma di racconto di fantasia nel suo libro *La scienza e l'ipotesi* (1902).

Supponiamo che ci sia, da qualche parte del piano euclideo, un cerchio euclideo $\mathcal{C}$ di raggio R, sufficientemente grande da ospitare al suo interno una vasta popolazione di esseri bidimensionali. L'atmosfera di $\mathcal{C}$ è costituita da un particolare gas, che ha la singolare caratteristica di provocare la contrazione dei campioni di lunghezza man mano che si allontana dal centro. La formula che descrive quantitativamente il fenomeno è:

$$\text{lunghezza di un regolo campione a distanza } r \text{ dal centro di } \mathcal{C} = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \text{m}$$

Ipotizziamo che tutto ciò che si trova all'interno di $\mathcal{C}$ sia soggetto ad una variazione delle dimensioni lineari, in maniera tale che nessun abitante riesca a percepire il fenomeno.

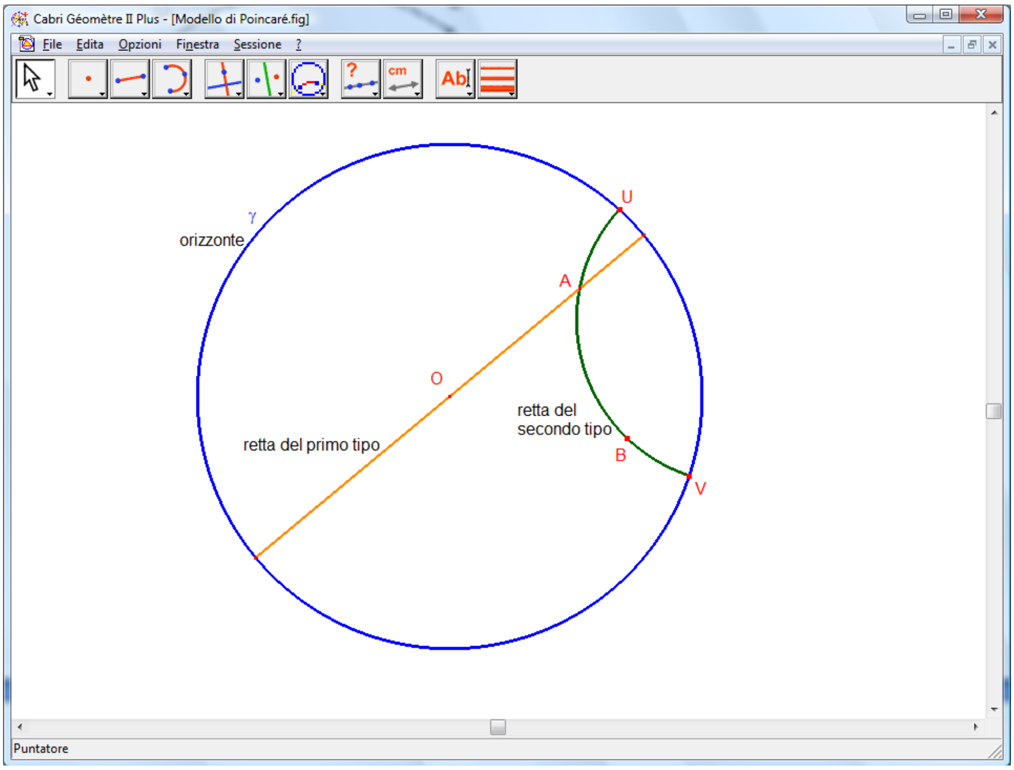
Supponiamo infine che lo strano gas che riempie $\mathcal{C}$ costringa i raggi di luce che si propagano tra due punti interni al cerchio a seguire sempre il cammino che, misurato nel sistema di misura degli abitanti di $\mathcal{C}$, appare più breve. Per noi osservatori esterni, un raggio di luce che unisce due punti sarà diritto solo se i due punti sono su un diametro di $\mathcal{C}$, altrimenti presenterà una convessità rivolta verso il centro. Tali percorsi curvi appartengono a circonferenze ortogonali a $\mathcal{C}$.

Che tipo di geometria metteranno a punto gli abitanti di $\mathcal{C}$?

In primo luogo, essi non si rendono conto di vivere all'interno di un cerchio, né raggiungono mai il bordo di esso, poiché il loro metro si accorcia troppo velocemente. Dunque, per gli abitanti il cerchio $\mathcal{C}$ si estende all'infinito in tutte le direzioni e costituisce il piano.

In secondo luogo, essi naturalmente intenderanno per "linea retta" "il percorso compiuto da un raggio di luce" (come aveva detto Euclide); per noi che osserviamo da fuori, le "linee rette" sono i diametri (**esclusi gli estremi**) e gli archi di *cerchi ortogonali*[1] (**esclusi i loro punti di intersezione con $\mathcal{C}$**).

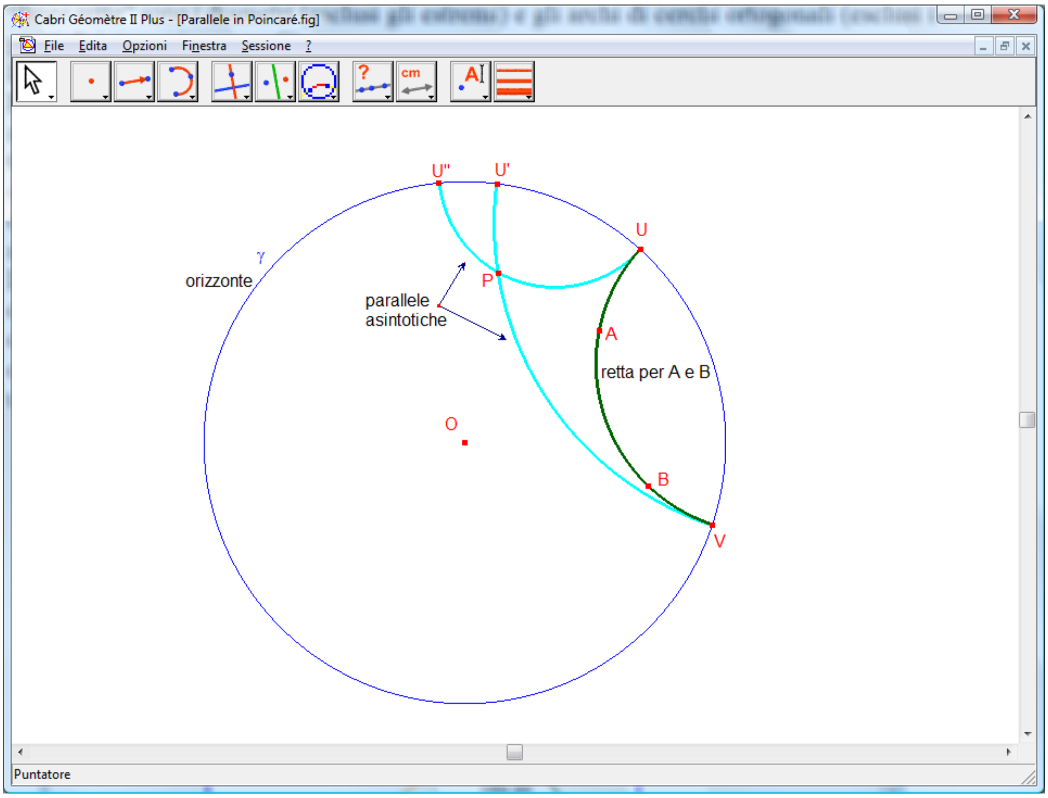
Come evidenzia la figura successiva, in questa geometria ci sono due tipi di rette: i diametri del cerchio $\mathcal{C}$ (che vengono dette rette del primo tipo) e gli archi di circonferenza ortogonali al cerchio, aventi gli estremi sulla circonferenza γ, chiamata anche *orizzonte*, (che vengono dette rette del secondo tipo).



Inoltre, poiché per due punti distinti A e B passa sempre uno ed un solo diametro oppure una ed una sola circonferenza ortogonale all'orizzonte, possiamo affermare che per due punti distinti passa una ed una sola "retta".

Se consideriamo un punto P fuori da questa retta, è immediato osservare come per esso passino certamente *due* rette che non incontrano quella per A e B (sono i due archi di circonferenze ortogonali passanti per gli estremi della retta). Tali rette prendono il nome di *parallele asintotiche* alla retta per A e B.

[1] L'angolo tra due linee che si incontrano in un punto è definito come l'angolo formato dalle rette tangenti alle linee nel loro punto di intersezione. Se quest'angolo è *retto*, allora le due linee si dicono *ortogonali*. Si può dimostrare che *due cerchi sono ortogonali se, e solo se, il raggio di uno di essi passante per uno dei loro punti di intersezione è tangente all'altro cerchio.*

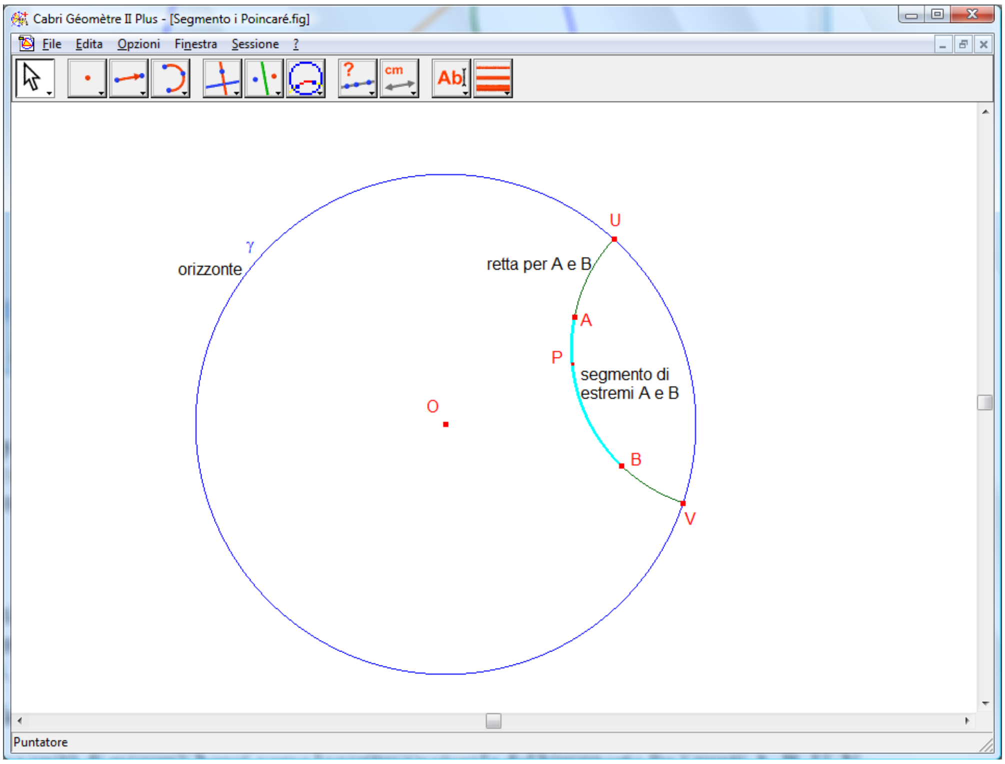


L'incidenza tra le rette di questo nuovo modello è definita come intersezione tra archi o diametri del cerchio.

A questo punto, è possibile dare le definizioni di angolo e di segmento che permettono di parlare di tali enti all'interno del modello:

- l'angolo formato da due rette è definito in modo classico come quello formato dalle rette tangenti alle due curve nel loro punto di intersezione (cfr. nota 1);

- il segmento è l'insieme dei punti di una retta compresi tra due punti di essa, detti estremi del segmento.



Notiamo che la definizione di segmento nel piano di Poincaré coincide con quella di segmento nel piano euclideo. Ma molto diversa è la definizione di misura di un segmento *AB*.

Difatti, nel piano di Poincaré essa è definita non come il rapporto $\frac{AB}{CD}$ (con *CD* assunto come unità di misura), bensì come logaritmo naturale del birapporto fra i punti *A*, *B*, *U*, *V* appartenenti ad un diametro oppure ad un arco di circonferenza ortogonale a γ:

$$\text{lunghezza}(AB) = \ln\left(ABUV\right) = \ln\left(\frac{AU \cdot BV}{AV \cdot BU}\right)$$

dove i punti *U* e *V* sono individuati dalle intersezioni della “retta” *AB* con la circonferenza γ.

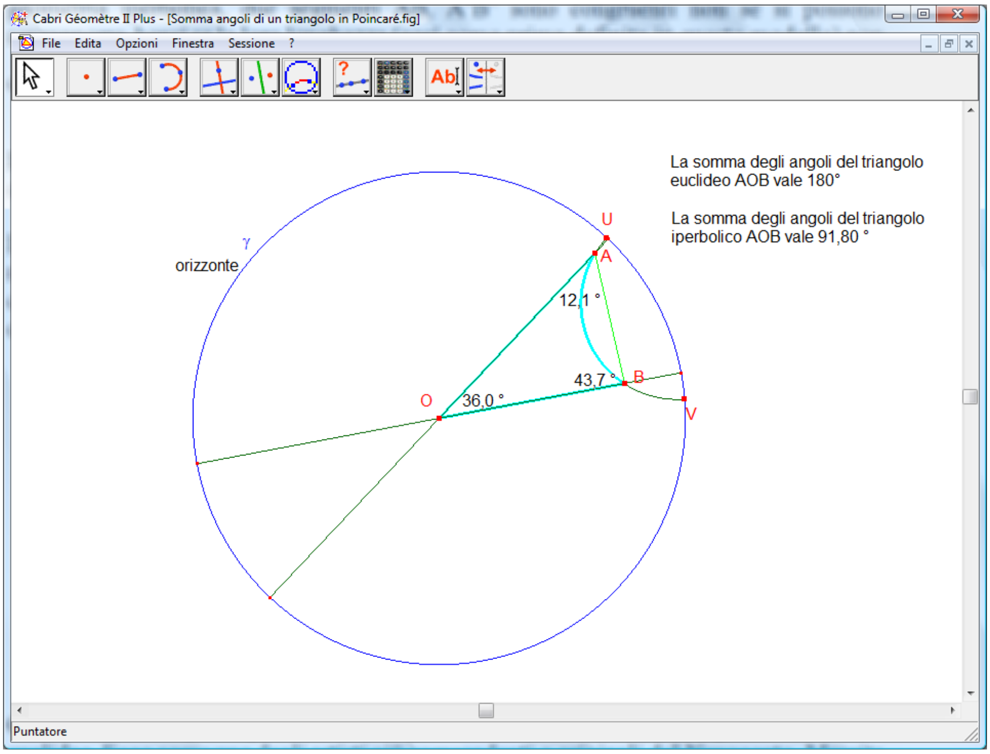
Confrontando le due definizioni di lunghezza, ci rendiamo conto che passando dalla geometria euclidea a quella iperbolica, varia anche il concetto di congruenza.

Nella geometria euclidea, due segmenti si dicono congruenti se esiste un movimento rigido che li porta a coincidere, ossia un movimento che non altera le distanze fra i punti; nella geometria iperbolica, due segmenti *AB*, *A’B’* sono congruenti non se si possono sovrapporre, bensì se la loro lunghezza (così come prima definita in questo modello) non cambia, cioè se $\ln\left(\frac{AU \cdot BV}{AV \cdot BU}\right) = \ln\left(\frac{A'U' \cdot B'V'}{A'V' \cdot B'U'}\right)$.

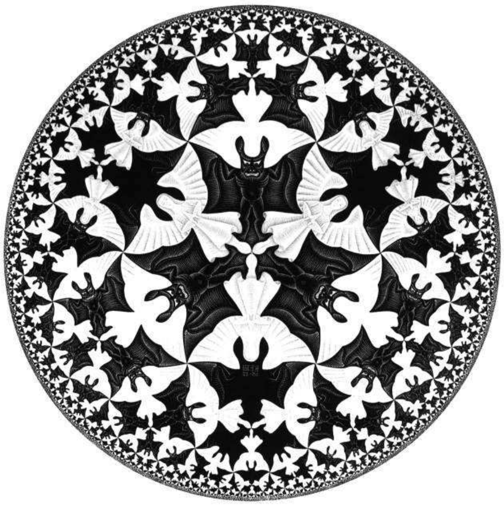
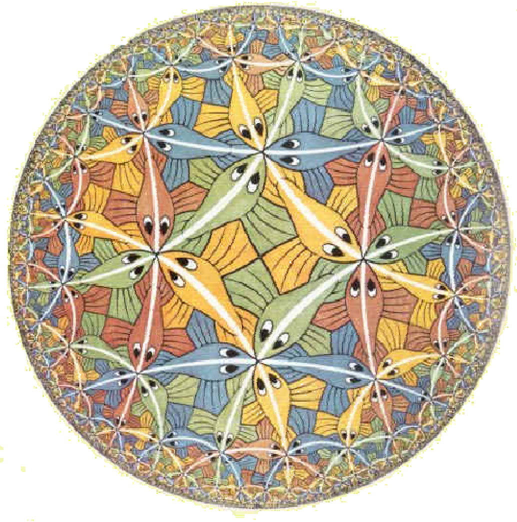
E cosa succede ai triangoli?

Sappiamo che, negato il quinto postulato euclideo, la somma degli angoli interni non è più pari a 180°.

Dato un qualsiasi triangolo iperbolico, è possibile trovare una congruenza iperbolica che mandi uno dei suoi vertici nel centro di $\mathcal{C}$, rendendo rettilinei due suoi lati. In tale congruenza la somma degli angoli interni al triangolo non viene alterata; la figura mostra che questa somma è minore di un angolo piatto.



Generalmente, figure iperboliche congruenti non sono affatto congruenti in senso euclideo. Ecco come uno degli artisti più sorprendenti e originali del Novecento, **Maurits Cornelis Escher**, ricoprì il piano iperbolico con "mattonelle" congruenti tra loro.

Sintetizziamo, infine, in una tabella le nozioni essenziali, che ci permettono di confrontare in modo schematico i tre diversi modelli analizzati:

TIPO DI GEOMETRIA	V POSTULATO	SUPERFICIE	GEODETICHE	SOMMA ANGOLI INTERNI DI UN TRIANGOLO
euclidea	“una ed una sola parallela”	piano euclideo	rette	sempre 180°
ellittica	“nessuna parallela”	sfera	circonferenze massime	maggiore di 180°, non costante
iperbolica	“infinite parallele”	piano di Poincaré	diametri, archi di circonferenza ortogonali al cerchio	minore di 180°, non costante

CONCLUSIONI

«Che cosa penso della domanda: la geometria euclidea è vera? Essa non ha significato. È come chiedersi (…) se la geometria delle coordinate cartesiane è vera e quella delle coordinate polari è falsa.
Una geometria non può essere più vera di un'altra; essa può essere solo più conveniente.»

da *La scienza e l'ipotesi*, J.H. Poincaré

I tre modelli che abbiamo analizzato permettono di stabilire che le tre geometrie, euclidea, ellittica e iperbolica, non sono in alcun modo in conflitto fra loro: la veridicità di una di esse non implica affatto la falsità delle altre due. Né l'una può essere ritenuta più corretta delle altre; esse rappresentano tre sistemi compiuti, indipendenti e logicamente coerenti. Certo è che si tratta di tre teorie differenti, e questo non deve stupire dato che i presupposti da cui partono sono diversi.

Ma c'è di più: dai matematici è stato provato che una contraddizione in una qualsiasi delle tre geometrie si ripercuoterebbe nelle altre due. In altre parole, è stato dimostrato che la geometria iperbolica è coerente se e solo se lo è la geometria euclidea e che allo stesso modo la geometria ellittica è coerente se e solo se lo è quella euclidea. Ciò porta a concludere che la geometria euclidea è non contraddittoria se e solo se è non contraddittoria la geometria iperbolica.

Un'altra osservazione che è possibile fare è che le tre geometrie sono certamente incompatibili fra loro e comunque simultaneamente vere, in quanto si occupano di oggetti diversi: la retta che Euclide descrive nei suoi *Elementi* non è la stessa retta della geometria ellittica, né la stessa retta della geometria iperbolica; i triangoli di cui Euclide parla sono diversi da quelli che si incontrano nelle geometrie ellittica e iperbolica.

Si può, però, affermare che la geometria euclidea è quella più indicata per le applicazioni pratiche, sia per la sua maggiore semplicità, sia perché lo studio della fisica ci assicura che non vi sono discordanze apprezzabili fra i dati rilevabili con gli strumenti a nostra disposizione ed i risultati cui si giunge applicando le leggi della geometria di Euclide. Questo significa che, anche se lo spazio che ci circonda non fosse euclideo, la geometria euclidea ce lo descriverebbe con un'ottima approssimazione, anche se è d'obbligo osservare che, qualora entrino in gioco distanze di ordine astronomico, la geometria ellittica è quella che meglio si adatta alla descrizione dei fenomeni.

BIBLIOGRAFIA

D. GUEDJ, *Il teorema del pappagallo*, Longanesi & C. Ed., Milano 1998

G. GUIDORIZZI, *Il mondo letterario greco*, Einaudi scuola, Milano 2005

STRABONE, *Geografia*, BUR Biblioteca Universale Rizzoli, 1988

G. SACCHERI, *Euclide liberato da ogni macchia. Testo latino a fronte*, Bompiani Ed., 2001

E. AGAZZI, D. PALLADINO, *Le geometrie non euclidee*, A. Mondadori Ed., Milano 1978

CARL B. BOYER, *Storia della matematica*, A. Mondadori Ed., Milano 1990

ERIC T. BELL, *I grandi matematici*, Biblioteca Universale Sansoni, Firenze 1990

P. CUSCANI POLITI, *Geografia generale*, Garzanti Ed., 1973

B. ACCORDI, E. PALMIERI, M. PAROTTO, *Il globo terrestre e la sua evoluzione*, Zanichelli Ed., Bologna 1993

M. BUSSAGLI, *Escher*, Giunti Ed., Firenze – Milano 2004

HENRI J. POINCARÉ, *La scienza e l'ipotesi*, Bompiani Ed., 2003

S. SINGH, *L'ultimo teorema di Fermat*, BUR Biblioteca Universale Rizzoli, Milano 2005

EUCLIDE, *Euclid's Elements. The original Greek text*
(http://www.physics.ntua.gr/~mourmouras/euclid/index.html)